Algebra 1A, Harjoitus 7, 12.5. 2015

Huom. laskuryhmä ma 11.5. ja harjoitukset ti 12.5. 12-14 MaD259

1. Anna kaikki ryhmään A_4 kuuluvat 3-syklit.

2. Olkoot $k, n, r \geq 2$ kokonaislukuja siten, että k jakaa luvun n. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_k$, $f([a]_n) = [ra]_k$ on hyvin määritelty, eli riippumaton edustajan a valinnasta.

3. Olkoon $f : \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_4$, $f([a]_{16}) = [3a]_4$. Osoita että f on surjektiivinen homomorfismi, ja anna kuvauksen f ydin.

4. Mille ryhmille H löytyy surjektiivinen homomorfismi $f : \mathbb{Z}_{12} \to H$ (vihje: H on syklinen Harj. 4 t.3:n nojalla)?

5. Olkoon G Abelin ryhmä, $K = \{a \in G : |a| \leq 2\}$, $H = \{x^2 : x \in G\}$. Tällöin K ja H ovat ryhmän G aliryhmiä. Osoita, että $G/K \cong H$.

6. Mille ryhmille H löytyy surjektiivinen homomorfismi $f : D_4 \to H$?

7. Olkoon G ryhmä jonka kertaluku on muotoa pq, missä p ja q ovat alkulukuja. Osoita, että keskus $Z(G)$ on joko $\langle e \rangle$ tai G.

8. Osoita, että $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle (2, 2) \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

9. Olkoon

$$H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tällöin H_3 matriisien kertolaskulla varustettuna on ryhmä, *Heisenbergin ryhmä.* Etsi ryhmän H_3 keskus $Z(H_3)$ ja osoita, että $H_3/Z(H_3) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

10. Olkoon N ryhmän G normaali aliryhmä, ja $f : G \to H$ homomorfismi jonka ydin K. Oletetaan, että kuvauksen f rajoittuma aliryhmään N on isomorfismi. Osoita, että $G \cong N \times K$.