

Algebra 1A, Harjoitus 6, 6.5. 2015

Huom. viimeiset luennot ma 4.5. normaalisti ja ti 5.5. 12:15-15:00 MaD380

1. Osoita, että ryhmän S_4 aliryhmä $\{(1), (1234), (13)(24), (1432)\}$ ei ole normaali.
2. Olkoon $N = \langle [6]_{18} \rangle$. Osoita, että tekijäryhmä \mathbb{Z}_{18}/N on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z}_6 kanssa.
3. Olkoot $M = \{r_0, v\}$ ja $N = \{r_0, v, r_2, h\}$ diedriryhmän D_4 aliryhmiä. Osoita, että M on ryhmän N normaali aliryhmä ja että N on ryhmän D_4 normaali aliryhmä, mutta M ei ole ryhmän D_4 normaali aliryhmä.
4. Olkoot $M = \langle (0, 2) \rangle$ ja $N = \langle (1, 2) \rangle$ ryhmän $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ sykliset aliryhmät. Tällöin $M \cong N \cong \mathbb{Z}_2$. Anna tekijäryhmien G/M ja G/N laskutaulukot. Onko $G/M \cong G/N$?

5. Olkoon

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Onko D ryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ normaali aliryhmä?

6. Olkoon G Abelin ryhmä. Tällöin *torsioryhmä*

$$T = \{a \in G : |a| < \infty\}$$

on ryhmän G normaali aliryhmä. Osoita, että jokaisen $Tb \in G/T$, $Tb \neq Te$, kertaluvulle pätee $|Tb| = \infty$.

7. Olkoon $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Osoita, että kertaluku $|a| < \infty$. Osoita lisäksi, että jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ löytyy $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ siten, että $|a| = k$.
8. Olkoon H ryhmän G aliryhmä, $|H| = n$. Oletetaan, että ryhmällä G ei ole muita aliryhmiä joiden kertaluku on n . Osoita, että H on ryhmän G normaali aliryhmä.
9. Olkoon G ryhmä, $S = \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}$, ja $G' := \langle S \rangle$ joukon S virittämä aliryhmä. Aliryhmää G' kutsutaan ryhmän G *kommutaattorialiryhmäksi*. Osoita, että G' on ryhmän G normaali aliryhmä, jolle tekijäryhmä G/G' on Abelin ryhmä.
10. Olkoon G ryhmä. Harjoitusten 4 tehtävän 10 nojalla muotoa $f(g) = c^{-1}gc$, $c \in G$, olevien kuvausten joukko $\text{Inn } G$ on ryhmä. Osoita, että $G/Z(G) \cong \text{Inn } G$.