Algebra 1A, Harjoitus 5, 29.4. 2015

1. Luettele ryhmän D_4 aliryhmän $K = \{r_0, v\}$ oikeat sivuluokat ja ryhmän S_3 aliryhmän $K = \{(1), (23)\}$ oikeat sivuluokat.

2. Anna indeksit $[\mathbb{Z}_{12} : \langle 3 \rangle]$ ja $[S_4 : \langle (1234) \rangle]$.

3. Olkoon $K = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Harjoitusten 4 tehtävän 6 nojalla K on ryhmän A_4 aliryhmä. Näin ollen K on myös ryhmän S_4 aliryhmä. Kuinka monta aliryhmän K oikeaa sivuluokkaa on ryhmässä A_4? Entä ryhmässä S_4?

4. Olkoon $K \subset S_4$ edellisen tehtävän aliryhmä. Päteekö oikeille sivuluokille $K(12) = K(34)$? Entä $K(1234) = K(1324)$?

5. Olkoon G ryhmä jonka kertaluku on pienempi kuin 100. Oletetaan, että ryhmällä G on kertalukua 10 ja 25 olevat aliryhmät. Mikä on ryhmän G kertaluku?

6. *Kvaternioiden ryhmä*

$$Q = \{\mathbf{1}, \mathbf{i}, -\mathbf{1}, -\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}\}$$

varustetaan kompleksikertoimisten matriisien kertolaskulla, missä

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j},$$

ja muodosta näiden avulla ryhmän Q laskutaulukko (riittää muodostaa alkioille $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$).

7. Olkoon G ryhmä jonka kertaluku on parillinen. Osoita, että ryhmässä G on alkio jonka kertaluku on 2 (vihje: jos $|a| \geq 3$, niin $a^{-1} \neq a$).

8. Olkoon G Abelin ryhmä jonka kertaluku on $2n$, missä n on pariton. Osoita, että ryhmässä G on täsmälleen yksi alkio jonka kertaluku on 2.

9. Olkoon G alkioiden a ja b, $a \neq b$, virittämä ryhmä, jolle pätee $|a| = 4$, $b^2 = a^2$, ja $ba = a^3 b$. Osoita, että $|G| = 8$ (lisätehtävä: osoita, että G on isomorfinen tehtävän 6 ryhmän Q kanssa).

10. Osoita, että ryhmällä A_4 ei ole aliryhmää jonka kertaluku on 6 (vihje: Huomaa, että tehtävän 3 aliryhmä K sisältää kaikki ne ryhmän A_4 alkiot joiden kertaluku on 2).