Algebra 1A, Harjoitus 4, 22.4. 2015

1. Olkoon G Abelin ryhmä ja $f : G \to H$ surjektiivinen homomorfismi. Osoita, että H on Abelin ryhmä.

2. Olkoon $f : G \to H$ homomorfismi. Osoita, että $f(a^n) = f(a)^n$ kaikilla $a \in G$ ja $n \in \mathbb{Z}$.

3. Olkoon $G = \langle a \rangle$ on syklinen ryhmä, ja $f : G \to H$ surjektiivinen homomorfismi. Osoita, että H on syklinen ryhmä $\langle f(a) \rangle$ (sovella edellistä tehtävää).

4. Esitä seuraavat permutaatiot erillisten syklien yhdisteenä:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = (14)(27)(523)(34)(1472).$$

5. Osoita, että permutaation

$$(1236)(5910)(465)(5678) \in S_n$$

kertaluku on 21 (kun $n \geq 10$).

6. Osoita, että $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ on ryhmän A_4 aliryhmä.

7. Osoita, että additiivinen ryhmä $\mathbb{Q}$ ei ole syklinen. Päättele tästä, että $\mathbb{Q}$ ei ole isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa.

8. Osoita, että vaihdot $(12), (13), \ldots, (1n)$ virittävät ryhmän S_n, eli

$$S_n = \langle (12), (13), \ldots, (1n) \rangle.$$

9. Olkoon G ryhmä. Isomorfismeja $f : G \to G$ kutsutaan *automorfismeiksi*. Automorfismien joukko $\operatorname{Aut} G$ laskutoimituksella $f \circ g$ varustettuna on ryhmä. Osoita, että $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ on isomorfinen ryhmän S_3 kanssa.

10. Olkoon G ryhmä, Muotoa $f(g) = c^{-1}gc$, $c \in G$, olevien kuvausten joukko $\operatorname{Inn} G$ on ryhmän $\operatorname{Aut} G$ aliryhmä. Osoita, että $\operatorname{Inn} D_4$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ kanssa (vihje: muista, että $r_2 g = g r_2$ kaikilla $g \in D_4$).