Algebra 1A, Harjoitus 3, 15.4. 2015

1. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = x^3$, on isomorfismi multiplikatiiviselta ryhmältä $\mathbb{R}^*$ itselleen.

2. Osoita, että ryhmä $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ei ole isomorfinen ryhmän D_4 kanssa.

3. Olkoon $f : G \to H$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että käänteiskuvaus f^{-1} on myös isomorfismi.

4. Olkoot H ja K ryhmän G aliryhmiä. Osoita, että $H \cap K$ on ryhmän G aliryhmä.

5. Anna esimerkki ryhmästä G ja aliryhmistä H ja K siten, että $H \cup K$ ei ole ryhmän G aliryhmä.

6. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$, $f([x]_9) = [2x]_9$, on isomorfismi additiiviselta ryhmältä $\mathbb{Z}_9$ itselleen.

7. Osoita, että additiivinen ryhmä $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ei ole syklinen. Osoita edelleen, että on olemassa kahden alkion joukko joka virittää ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

8. Osoita, että multiplikatiivinen ryhmä $\mathbb{R}^*$ ei ole isomorfinen multiplikatiivisen ryhmän $\mathbb{C}^*$ kanssa.

9. Osoita, että multiplikatiivinen ryhmä $\mathbb{R}^*$ ei ole isomorfinen additiivisen ryhmän $\mathbb{R}$ kanssa.

10. Olkoon G ryhmä jonka kertaluku $|G| \leq 5$. Osoita, että G on Abelin ryhmä.