1. FUNKTIONAALI-MENETELMÄT

1.1 POLKUINTEGRAALI (pikakertaus)

Olkoon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\varphi) \qquad (1)$$

Polkuintegraali

(Weyl järjestys)

$$\underbrace{\int_{\substack{\phi(0,\vec{x})=\phi_a(\vec{x})\\ \phi(T,\vec{x})=\phi_b(\vec{x})}} \mathcal{D}\phi\, e^{\frac{i}{\hbar}\overbrace{\int_0^T d^4x\, \mathcal{L}}^{=iS[\phi]}}}_{\text{integraali yli kaikkien konfiguraatioiden}} = \langle \phi_b | e^{-iHT} | \phi_a \rangle \qquad (2)$$

= transitioamplitudi

Missä

$$\hat{H} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right]$$

$$[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{x}',t)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Konstruktio:

- Kukin 'polku' yhtä todennäköinen (paino $\triangleq$ vaihe)
- Klassisen polun ympäristö kontribuoi eniten koska

$$\frac{\delta}{\delta\phi} S\Big|_{\phi=\phi_{cl}} = 0 \qquad (3)$$

$$\boxed{\text{P.I. (Lagrangen funktio) määrittelee teorian}}$$

1.2. GREENIN FUNKTIOT

KKT-I:llä on opittu että sirontateorian observaabelit (S-matriisielementit) voidaan esittää vakuumi-vakuumi Greenin funktioiden avulla (LSZ-reduktio).

N-pistefunktio:

aikajärjestys

Heisenberg-operaattori

$$G_N(x_1 \ldots x_N) = \langle \Omega | T(\hat{\phi}_H(x_1) \ldots \hat{\phi}_H(x_N)) | \Omega \rangle \tag{4}$$

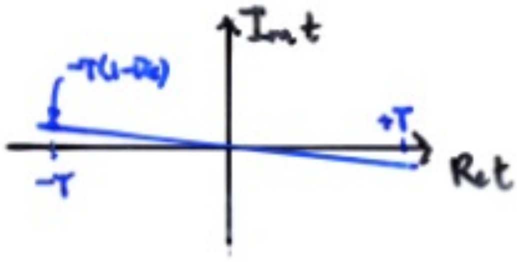
v.v. teorian vakuumi $H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$

voidaan esittää PI:nä

$$\boxed{G_N(x_1 \ldots x_N) = \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1) \ldots \phi(x_N)\, e^{i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}}}{\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}}}} \tag{5}$$

Huom, Tämä on eksakti tulos!

aikapolun kallistaminen asettaa reunaehdon oikein.



Esimerkki: 2-piste korrelaattori

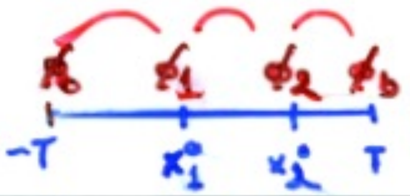
$$\int \mathcal{D}\phi\; \phi(x_1)\phi(x_2)\, e^{i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}}$$

$\phi(-T,\vec{x}) = \phi_a(\vec{x})$
$\phi(T,\vec{x}) = \phi_b(\vec{x})$

= S osilleista tr. amplitudia

$$= \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2\, \phi_1(\vec{x})\phi_2(\vec{x}) \left[\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int_{-T}^{T} d^4x\, \mathcal{L}} \right]$$

$\phi(-T,\vec{x}) = \phi_a(\vec{x})$
$\phi(T,\vec{x}) = \phi_b(\vec{x})$
$\phi(x_1^0,\vec{x}) = \phi_1(\vec{x})$
$\phi(x_2^0,\vec{x}) = \phi_2(\vec{x})$



$(x_1^0 < x_2^0$; oletus$)$

$$= \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \; \phi_1(\vec{x}) \phi_2(\vec{x}) \Big[\langle \phi_b | e^{-iH(T - x_2^0)} | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | e^{-iH(x_2^0 - x_1^0)} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-iH(x_1^0 + T)} | \phi_a \rangle \Big]$$

Nyt:

$$\hat{\phi}_S(\vec{x}) |\phi_1\rangle = \phi_1(\vec{x}) |\phi_1\rangle \qquad (6)$$

$$\hat{\phi}_H(\vec{x}, t) = e^{iHt} \hat{\phi}_S(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} \qquad (7)$$

Joten

$$= \langle \phi_b | e^{-iH(T - x_2^0)} \hat{\phi}_S(\vec{x}) \underbrace{\left(\int \mathcal{D}\phi_2 |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \right)}_{=1} e^{-iH(x_2^0 - x_1^0)} \hat{\phi}_S(\vec{x}) \left(\int \mathcal{D}\phi_1 |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \right) e^{-iH(x_1^0 + T)} |\phi_a\rangle$$

$$= \langle \phi_b | e^{-iHT} \phi_H(x_2) \phi_H(x_1) e^{-iHT} | \phi_a \rangle \, .$$

Jos olisimme olettaneet $x_2^0 < x_1^0$ olisivat operaattorit tulleet automaattisesti toisin päin. Siis

$$\int \mathcal{D}\phi \; \phi(x_1)\phi(x_2) \, e^{i\int_{-T}^{T} d^4x \, \mathcal{L}}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi_a \mathcal{D}\phi_b \underbrace{\langle \phi_b | e^{-iHT}}_{=?} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aikajärjestys automaattinen}}}{T} \big(\phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \big) \overbrace{e^{-iHT} |\phi_a\rangle}^{=?}$$

Edelleen (nyt siis huomioidaan $T \to T(1-i\epsilon)$):

$$e^{iHT(1-i\epsilon)}|\phi_a\rangle = \sum_n e^{-iE_nT(1-i\epsilon)}|n\rangle\langle n|\phi_a\rangle$$

$$\xrightarrow{T\to\infty} \underbrace{\langle\Omega|\phi_a\rangle e^{-iE_0T-\epsilon TE_0}}_{\equiv N_a(T)}|\Omega\rangle$$

Ja vast. $|\phi_b\rangle$:lle, joten

$$\int\mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\, e^{i\int_{-T}^{T}d^4x\,\mathcal{L}}$$

$$\xrightarrow{T\to\infty(1-i\epsilon)} \underline{\langle\Omega|T(\phi_H(x_1)\phi_H(x_2))|\Omega\rangle}\left[\overbrace{\int\mathcal{D}\phi_a\mathcal{D}\phi_b\, N_a(T)N_b^*(T)}^{\text{vakio}}\right]$$

Lopulta todetaan vielä

$$\int\mathcal{D}\phi\, e^{i\int_{-T}^{T}d^4x\,\mathcal{L}} = \int\mathcal{D}\phi_a\mathcal{D}\phi_b\,\langle\phi_b|e^{-iHT}e^{-iHT}|\phi_a\rangle$$

$$\xrightarrow{T\to\infty(1-i\epsilon)} \underbrace{\langle\Omega|\Omega\rangle}_{\equiv 1}\left[\int\mathcal{D}\phi_a\mathcal{D}\phi_b\, N_a(T)N_b^*(T)\right]$$

sama!

Toisin sanoen

$$\boxed{\langle\Omega|T(\phi_H(x_1)\phi_H(x_2))|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)}\frac{\int\mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\,e^{-i\int_{-T}^{T}d^4x\,\mathcal{L}}}{\int\mathcal{D}\phi\, e^{-i\int_{-T}^{T}d^4x\,\mathcal{L}}}} \qquad (8)$$

Tämä siis on edelleen eksakti tulos!

- $T \to \infty(1-i\epsilon)$ -preskriptio siis poimii vakuumin $|\Omega\rangle$ Greenin funktion reunaehdoiksi. Se ei kytke pois vuorovaikutuksia äärettömyydessä.

- Tulokset (5) ja (8) ovat siis eksakteja. Käytännössä osaamme laskea P.I:t vain vapaille teorioille ja vv. teorioille vain häiriöteoriassa.

1.3 VAPAAN KLEIN-GORDON TEORIAN 2-PISTEFUNKTIO

Jos teoriamme on

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \qquad (9)$$

ovat PI:t laskettavissa eksaktisti. (Gaussisia integraaleja.)

- Diskretoimalla $(t, \vec{x})$-avaruuden saamme

$$\int \mathcal{D}\phi \; e^{-i\int d^4x \mathcal{L}_{KG}} = \int \left[\prod_x d\phi(x)\right] e^{-i\int d^4x \mathcal{L}_{KG}}$$

Muunnos Fourier-avaruuteen:

"summataan"

$$\phi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \phi(k) \equiv U_{xk}\phi_k \qquad (10)$$

Jotta

$$\prod_x d\phi(x) = \prod_k d\phi(k)$$

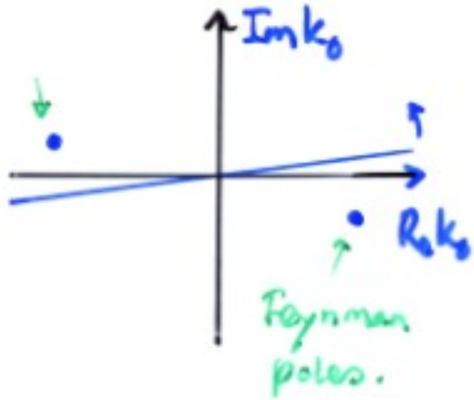
On muunnoksen (10) oltava unitaarinen. Normaalisti tämä on OK:

$$\phi_x \equiv U_{xk} U^*_{kx'} \phi_{x'}$$

$$\Rightarrow U_{xk} U^*_{kx'} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} = \delta^4(x-x')$$

mutta kun aikapolku on käännetty $t \to t(1-i\epsilon)$ unitaarisuus toteutuu vain jos vastaavasti

$$k_0 \to k_0(1+i\epsilon). \qquad (11)$$



Kun tämä on ymmärretty, on helppo nähdä että (ks. Peskin & Schroeder)

$$\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{KG}} = \prod_{k_0>0} \int d\mathrm{Re}\,\phi_k \, d\mathrm{Im}\,\phi_k \, e^{+i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\theta(k_0)\left(k^2-m^2+i\epsilon\right)|\phi_k|^2}$$

$$= \underline{\text{vakio} \times \mathrm{Det}\left(-\partial^2+m^2-i\epsilon\right)} \qquad (12)$$

rajoitus koska $\phi(k) = \phi(-k)$ (koska $\phi(x) \in \mathbb{R}$)

Funktionaalideterminantti

Vastaavasti voidaan laskea $\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{KG}}$

ja tuloksena on juuri yllä saatu funktionaalideterminantti kerrottuna Feynmanin propagaattorilla, eli

$$\boxed{\langle 0|T(\phi_0(x_1)\phi_0(x_2))|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}} \qquad (13)$$

vapaan teorian vakuumi.

Feynmanin preskriptio, merkkiä myöten seurausta aikapolun kallistamisesta $T \to T(1-i\epsilon)$.

$\Updownarrow$

Välttämätön ehto P.I:n suppenemiselle.

(Yksityiskohdat; ks. PS siv. 284-288.)

1.4 GENEROIVAT FUNKTIOT

Vuorovaikuttavien kenttien Greenin funktioiden laskemiseen tarvitaan häiriöteoriaa. P.I-menetelmässä HT konstruoidaan generoivien funktioiden avulla.

Määritellään teoriassa (1) generoiva funktio

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x))} \qquad (14)$$

ulkoinen lähde. (matemaattinen apuri)

Selvästi

$$\boxed{G_N(x_1 \dots x_N) = \frac{1}{Z[0]} \frac{(-i)^n \delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}} \qquad (15)$$

On selvää että $Z[J]$:n ja siten funktioitten $G_n(x_1 \ldots x_n)$ laskeminen suljetussa muodossa on mahdotonta kun $\mathcal{L}_\phi$ on yleinen vuorovaikuttava teoria. Tarkastellaan sen vuoksi ensin vapaata KG-teoriaa. Nyt

$$= \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \phi\Box\phi$$

$\to 0$ pintatermi

NORM. YKKÖSEEN

$$\tilde{Z}[J]_{KG} = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int d^4x\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi\right)} \quad ; \underline{N \equiv Z[0]}$$

$$= \frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\int_{yx}\phi_y \hat{D}^{-1}_{y,x}\phi_x + i\int_x J_x\phi_x} \qquad (5.44)$$

missä määrittelimme differentiaali-operaattori:

$$\int_y iD^{-1}_{y,x}\phi_x \equiv -(\partial_x^2 + m^2)\phi_x, \qquad (5.45)$$

eli

$$iD^{-1}_{y,x} = -(\partial_y^2 + m^2)\delta^4(y-x)$$

$$= -(\partial_y^2 + m^2)\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(y-x)} \quad ; (y-x)_0 \to T(1-i\epsilon)$$

$$= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(+p^2 - m^2 + i\epsilon)\,e^{-ip\cdot(y-x)} \qquad (5.46)$$

Siis

$$\underline{D_{y,x}} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{+i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}e^{-ip\cdot(y-x)} = \underline{+\Delta_F(y-x)} \qquad (5.47)$$

Feynmanin propagaattori.

⌈ Tämän olisi voinut johtaa myös identiteetistä

$$\int d^4y\, D_{x,y}D^{-1}_{y,z} = \delta^4(x-z) \qquad (5.48)$$

⌋

(5.44):ssä esiintyvä integraali on Gaussinen. Kirjoitetaan:

$$\frac{i}{2}\int_{y,x} \phi_y (+iD^{-1}_{y,x})\phi_x + i\int_x J_x \phi_x$$

$$= \frac{i}{2}\int_{y,x} \left(\phi_y - \int_z J_z\, iD_{zy}\right)\left[+iD^{-1}_{y,x}\right]\overbrace{\left(\phi_x - \int_{z'} iD_{xz'} J_{z'}\right)}^{\equiv \phi'_x}$$

$$+ \frac{i}{2}\int_{y,x} J_y\, iD_{y,x}\, J_x$$

äärellinen joss $J_{z'} \to 0$, $z' \to \pm\infty$

$$= \frac{i}{2}\int_{y,x} \phi'_y (+iD^{-1}_{yx})\phi'_x + \frac{i}{2}\int_{y,x} J_y\, iD_{y,x}\, J_x$$

Nyt integraali muuttujan ϕ' yli voidaan suorittaa, ja se antaa selvästikin vain tekijän N, jolloin jäljelle jää vain

$$\boxed{\tilde{Z}[J]_{KG} = e^{\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\; i\Delta_F(x-y)\, J(y)}} \qquad (5.49)$$

Kun $Z[J]_{KG}$ on tunnettu, voimme helposti laskea eri Greenin funktioita

- $$G_2(x_1,x_2) = \frac{(-i)^2\,\delta^2}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\tilde{Z}[J]_{K\text{-}G}\Big|_{J=0}$$

$$= -i\cdot i\Delta_F(x_1-x_2) = \Delta_F(x_1,x_2) \qquad (5.50)$$

Eli

$$\boxed{\frac{1}{N}\int \mathcal{D}\phi\; \phi(x_1)\phi(x_2)\, e^{i\int \mathcal{L}_{KG}} = \langle 0|T(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2))|0\rangle_0} \qquad (5.51)$$