METRIN MÄÄRITYS 1799

Jukka Nyblom
2. lokakuuta 2020

1 Johdanto

Aikalaislähteissä ei kerrota yksityiskohtaisesti, miten metri määriteltiin. Lopputulos on selvä, mutta miten siihen päädyttiin jää epäselväksi. Metri määriteltiin keväällä 1799 ja samalta vuodelta löytyy ainakin kaksi hiukan toisistaan poikkeavaa raporttia. Varhaisempi on päivätty 30. huhtikuuta 1799 Kansainvälisen mitta- ja painokomission hyväksymänä (Del14, s. 415–433). Myöhäisempi mainitaan van Swindenin tekemäksi (Swi99) ja se on luettu Mitta- ja painokomission fysiikan ja matematiikan osastossa 25. toukokuuta 1799. Juhallisessa seremoniassa 22. kesäkuuta (Ald02, s. 266) esiteltiin platinatanko, joka määritti metrin mitan.

Laplacen esitys (Lap99, s. 145) tarjoaa kuitenkin joitakin johtolankoja sen suhteen, miten metri tarkkaan ottaen määriteltiin. Laplace oli mittakomission tieteellisesti ansioikkain jäsen ja Bordan lisäksi se, joka sai komission vaihtamaan metrin perustan sekuntiheilurin pituudesta meridiaanineljänneksen pituuteen.

Kun Delambren ja Méchainin mittausoperaation tulokset tuottivat odottamattoman ja kestämättömän arvon Maan litistyneisyydeksi, tarvittiin nopea ratkaisu. Maan litistyneisyyden parempaa arviointia varten tarvittiin Ranskan meridiaanimittauksen ohella jotakin lisää. Laplacen mukaan Bouguerin ja La Condaminen mittaukset päiväntasaajalla olivat parhaita mahdollisia. Niitä piti käyttää mahdollisimman niukasti, ettei uuden mittausoperaation merkitys vähenisi. Tässä Laplace onnistui. Jälkimaailma muistaa erityisesti sen, että metri syntyi nimenomaan tämän uuden vallankumouksellisen Ranskan aikaansaaman mittausoperaation tuloksena.

Seuraava esitys perustuu minun arvaukseeni, miten metri lopulta sai täsmällisen arvonsa. Kun olin omaan ratkaisuuni päätynyt, löysin varhaisemmankin ratkaisun (Bow32, s. 464,465). Ratkaisujen lähtökohdat poikkeavat toisistaan. Vertailu kuitenkin osoitti, että molemmat ratkaisut ovat, paitsi yhtäpitävät, johtavat eri polkuja pitkin samaan litistyneisyyden määrittävään yhtälöön. Sen avulla saadaan yhtäläistä periaatetta käyttämällä sama meridiaanineljänneksen arvo ja lopulta sama metrin arvo.

2 Litistyneisyys

Oletetaan, että Maa on muodoltaan pyörähdysellipsoidi, jonka ekvaattorisäde on a ja napasäde b. Silloin litistyneisyys on $\rho = (a-b)/a$ ja (ensimmäinen) eksentrisyys $e = \sqrt{a^2-b^2}/a = \sqrt{\rho(2-\rho)}$. Merkitään jatkossa $e = e(\rho)$. Meridiaanikaaren pituus ekvaattorilta leveysasteelle ϕ (tässä radiaaneina) saadaan integraalina (Ver14, s. 101)

$$s(\phi,\rho) = a(1-e(\rho)^2)\int_0^{\phi}(1-e(\rho)^2\sin^2 t)^{-3/2}\mathrm{d}t, \tag{1}$$

jota ei voi ratkaista suljetussa muodossa. Tämän kirjoituksen liitteessä on yo. kaavan (1) johto.

Laplace esittää yksinkertaisimman approksimaation taivaanmekaniikkaa käsittelevän teoksensa (Lap99) sivulla 126. Koska tiedettiin, että Maa on vain hyvin vähäisesti litistynyt eli $|e(\rho)| << 1$, kaavan (1) integroitavalle pätee likimäärin

$$(1 - e(\rho)^2 \sin^2 t)^{-3/2} \approx 1 + \frac{3}{2} e(\rho)^2 \sin^2 t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Leveysasteiden $\phi_1 < \phi_2$ välisen kaaren pituudelle saadaan näin ollen likiarvot

$$\begin{aligned} s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho) &\approx a(1 - e(\rho)^2) \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left(1 + \frac{3}{2} e(\rho)^2 \sin^2 t\right) \mathrm{d}t, \\ &\approx a(1 - e(\rho)^2)(\phi_2 - \phi_1) \left[1 + \frac{3}{2} e(\rho)^2 \sin^2 \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Kun nyt jaetaan puolittain erotuksella $\phi_2 - \phi_1$ saadaan Laplacen kaava (Lap99, ks. kaava (A) s. 126)

$$\frac{s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho)}{\phi_2 - \phi_1} \approx a(1 - e(\rho)^2) \left[1 + \frac{3}{2} e(\rho)^2 \sin^2 \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\right].$$

Koska ρ on pieni, $e(\rho)^2/2 \approx \rho$ saamme likimääräisen kaavan

$$\frac{s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho)}{\phi_2 - \phi_1} \approx a(1 - e(\rho)^2) \left[1 + 3\rho \sin^2 \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\right].$$

Laplacen mukaan (Lap99, s. 138) Bouguerin mittaama kaari centesimaaliasteissa[1] on $3{,}4633^G$, ja keskipiste päiväntasaajalla 0 asteessa. Maastossa mitattu pituus on 25538,85 moduulia yhtä centesimaaliastetta kohti. Ranskassa Delambren ja Méchainin mittaaman kaaren vastaavat arvot ovat pituus centesimaaliasteissa 10.7487^G , keskipiste 51.3327^G ja pituus maastossa 25658,29 moduulia centesimaaliastetta kohti. Asettamalla yhden asteen pituuksien osamäärän yhtä suureksi sen teoreettisen arvon kanssa saamme yhtälön

$$\begin{aligned} \frac{25658{,}29}{25538{,}85} &= \frac{1 + 3\rho \sin^2(\pi\, 51{,}3327^G/200)}{1 + 3\rho \sin^2 0} \\ 1{,}004676 &= 1 + \rho\, 1{,}562784, \end{aligned} \tag{2}$$

mistä tulee ratkaisuksi

$$\rho = \frac{0{,}004677}{1{,}562784} = \frac{1}{334{,}16} \approx \frac{1}{334}.$$

Metrin määrityksessä käytettiin tätä pyöristettyä litistyneisyyden arvoa 1/334.

[1] $100^G = 90^o = \pi/2$ radiaania.

3 Meridiaanineljänneksen pituus ja metrin määritys

Metrin lopullista määrittämistä varten kaavan (1) integroitava kehitetään sarjaksi. Kirjoitetaan aluksi

$$(1-x)^{-3/2} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots, |x| < 1. \tag{3}$$

Saamme helposti rekursion

$$c_0 = 1,\ c_{k+1} = \frac{2k+3}{2k+2} c_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Koska $e^2 << 1$, saamme myös

$$s(\phi, \rho) = a(1 - e(\rho)^2)\left(\phi + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e(\rho)^{2k} \int_0^{\phi} \sin^{2k} t \,\mathrm{d}t\right). \tag{4}$$

Intergaalit voimme myös laskea rekursiivisesti

$$\int_0^{\phi} \sin^{2k} t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2k} \cos\phi \, \sin^{2k-1}\phi + \frac{2k-1}{2k} \int_0^{\phi} \sin^{2k-2} t \,\mathrm{d}t.$$

Sarjakehitelmän (4) lineaarinen approksimaatio ($c_1 = 3/2$) johtaa kaavoihin

$$\begin{aligned}
s(\phi, \rho) \approx s_1(\phi, \rho) &= a(1 - e(\rho)^2)\left[\phi + c_1 e(\rho)^2 \int_0^{\phi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t\right] \\
&= a(1 - e(\rho)^2)\left[\phi + \frac{3}{2} e(\rho)^2 \left(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}\sin\phi\cos\phi\right)\right] \\
&= a(1 - e(\rho)^2)\left[\left(1 + \frac{3}{4} e(\rho)^2\right)\phi - \frac{3}{4} e(\rho)^2 \sin\phi\cos\phi\right] \\
&= a(1 - e(\rho)^2)\left[\left(1 + \frac{3}{4} e(\rho)^2\right)\phi - \frac{3}{8} e(\rho)^2 \sin 2\phi\right]. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Meridiaanikaaren neljännes on $s(100^G, \rho)$. Leveysasteiden ϕ_1 ja ϕ_2 välisen kaarenpituuden suhde meridiaanikaaren neljänneksen pituuteen

$$\frac{s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho)}{s(100^G, \rho)} \tag{6}$$

on laskettavissa mittaustuloksista, koska se riippuu vain leveysasteista ja litistyneisyydestä, joka on jo tiedossa, vaikka itse neljännes $s(100^G, \rho) = m$ on tuntematon. Delambren ja Méchainin mittaaman Dunkerquen ja Barcelonan välisen kaaren pituus on 275793 moduulia. Tuntematon m on ratkaistavissa, kun asetetaan osamäärä (11) yhtä suureksi kuin mitatun kaaren pituuden ja tuntemattoman meridiaanineljänneksen m osamäärä. Saamme siis yhtälön

$$\frac{s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho)}{s(100^G, \rho)} = \frac{275793{,}3}{m}. \tag{7}$$

Sijoitetaan vasemmalle puolelle $\rho = 1/334$ ja Ranskassa mitatun kaaren päätepisteet $\phi_1 = 41{,}36252^G$ ja $\phi_2 = 51{,}03635^G$. Sitten käyttämällä lineaarista approksimaatiota $s_1(\phi, \rho)$ saamme numeerisen yhtälön

$$0{,}1075070 = \frac{275793{,}3}{m},$$

jonka ratkaisu on 2565352 moduulia. Sen kymmenesmiljoonas osa on 443,293 Pariisin linjaa[2]. Tämä poikkeaa hieman arvosta 443,296 Pariisin linjaa, mikä tuli virallisen metrin pituudeksi. Kun otetaan sarjakehitelmän (3) neliötermi mukaan, saamme yhtälön

$$0{,}1075063 = \frac{275793{,}3}{m},$$

jonka ratkaisu on $2565369 \approx 2565370$ moduulia, jota käytettiin metrin määrittelyssä (Lap99, s. 145). Sen kymmenesmiljoonasosa on 443,296 Pariisin linjaa, joka on sama kuin metrin virallinen arvo.

Mittaustulokseen tehtiin vielä kaksi korjausta, jotka kuitenkin kumosivat toisensa (Swi99, s. 53-54) ja (Del10, s. 138). Pariisin syli (*toise*) oli 864 Pariisin linjaa, mutta mittatankojen (*Toise du Nord* ja *Toise de Pérou*) pituudet olivat vain 863,99 Pariisin linjaa, joten metriä piti lyhentää kertoimella 863,99/864. Mutta toisaalta metri määriteltiin $16{,}25^o$ Celsius-asteessa ja mittaukset oli standardoitu $17,6^o$ Celsius-asteeseen. Tämä puolestaan teki metristä liian lyhyen. Korjaukset olivat varsin pieniä ja vaikuttivat vastakkaisiin suuntiin lähes yhtä paljon. Ne eivät lopulta muuttaneet saatua metrin arvoa 443,296 Pariisin linjaa.

4 Metrin määritys Bowditchin mukaaan

Anders Hald käsittelee tilastotieteen historiassaan myös Laplacen osuutta metrin määrittelyssä (Hal98, luku 6.8), mutta nojautuu pelkästään sarjakehitelmän (3) lineaariseen ja kvadraattiseen approksimaatioon. Haldin ratkaisu on ilmeisesti peräisin Laplacen Taivaanmekaniikan teoksen (Lap99) englanninkielisestä käännöksestä (Bow32). Nathaniel Bowditch on varustanut käännöksensä laajoin kommentein ja selityksin. Hald viittaa historiassaan useassa kohdass Bowditchin käännökseen mutta ei metrin määrittelystä kertoessaan. Käännöksessään (Bow32, s. 464) Bowditch päätyy myös litistyneisyyden arvoon 1/334. Esitän seuraavaksi hänen päättelynsä.

Kun $\phi = 100^G$, $\sin(2\phi) = 0$ ja saamme kaavan (5) mukaan meridiaanikaaren neljänneksen pituudeksi

$$s(100, \rho) = a(1 - e(\rho)^2)(1 + (3/4)e(\rho)^2)100,$$

ja yhden centesimaaliasteen keskimääräinen pituudeksi $s = a(1-e(\rho)^2)(1+(3/4)e(\rho)^2)$. Saamme osamäärän

$$\begin{aligned} \frac{s(\phi,\rho)}{s} &= \phi - \frac{\frac{3}{8}e(\rho)^2}{1+\frac{3}{4}e(\rho)^2}\sin 2\phi \\ &\approx \phi - \frac{3}{4}\rho \sin 2\phi, \end{aligned}$$

[2]Yksi moduuli on 1728 Pariisin linjaa.

missä toinen rivi saadaan jättämällä ρ:n toisen ja korkeamman asteen termit pois. Laplace antaa myös tämän kaavan (Lap99, s. 141). Leveysasteiden ϕ_1 ja ϕ_2 väliin jäävan kaaren pituudeksi saadaan, kun unohdetaan likimääräisyys

$$s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho) = s\left(\phi_2 - \phi_1 - \frac{3}{2}\rho \sin(\phi_2 - \phi_1)\cos(\phi_2 + \phi_1\right).$$

Jakamalla puolittain erotuksella $\phi_2 - \phi_1$ ja olettamalla se riittävän pienksi, että $\sin(\phi_2 - \phi_1)/(\phi_2 - \phi_1) = 1$, saamme yhtälön

$$\frac{s(\phi_2, \rho) - s(\phi_1, \rho)}{\phi_2 - \phi_1} = s\left(1 - \frac{3}{2}\rho \cos(\phi_2 + \phi_1)\right).$$

Sijoitetaan tähän päiväntasaajan arvo $(\phi_2 + \phi_1)/2 = 0$ ja Ranskan mittauksen arvo $\phi_2 + \phi_1)/2 = 51{,}3327^G$. Teoreettisten pituuksien osamääräksi tulee silloin

$$\frac{1 + \rho\, 0{,}0628}{1 - \frac{3}{2}\rho} \approx 1 + \rho\, 1{,}5628. \tag{8}$$

Asetetaan maastossa mitattujen kaarien osamäärä yhtä suureksi teoreettisten arvojen osämäärän kanssa ja käytetään yo. kaavaa (8). Silloin

$$\frac{25658{,}28}{25538{,}85} = 1 + \rho\, 1{,}5628, \tag{9}$$

mistä saadaan $\rho = 1/334$. Huomaamme, että yllä saatu yhtälö (9) on pyöristystä lukuunottamatta sama kuin jo aikaisemmin saatu yhtälö (2). Lopullisen arvon 443,296 Pariisin linjaa olen laskenut jokseenkin samoin kuin Bowditch ja Hald käyttämällä sarjakehitelmän (3) kvadraattista approksimaatiota.

Oman arvaukseni, miten litistyneisyyden 1/334 laskettiin, tein jo ennen kuin olin löytänyt Bowditchin ratkaisun ja siihen nojautuvia Haldin laskuja. Aikaisraporttien (Lac99; Swi99) mukaan litistyneisyyden laskemisessa oli mukana useita tekijöitä ja useita kaavoja, joten edellä esitetyt kaavat (2) ja (9) ovat varmaankin olleet mukana metrin pituuden määrityksessä.

5 Liite

Napa-akselin pituus on b, keskipisteen C etäisyys Päiväntasaajasta on a, $a/b > 1$. Kuvassa 1 Sininen suora on pisteen $M = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ kautta kulkeva tangentti, ja punainen suora on sen normaali. Tässä tarkastelussa leveysasteet ovat välillä $0, 90^o$,joten radiaaneissa $0 \leq \theta, \phi \leq \pi/2$. Tämän normaalin leikkauspiste Päiväntasaajan janalla on $N = ((a - b^2/a)\cos\theta, 0)$. Päiväntasaajan janan ja pisteen M kautta kulkevan kohtisuoran leikkauspiste on $Q = (a\cos\theta, 0)$. Luonnollisesti $C = (0,0)$. Olkoon $||V||$ janan V pituus. Leveysasteelle (toistaiseksi radiaaneissa) ϕ pätee

$$
\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{||M-Q||}{||M-N||} = \frac{b\sin\theta}{\sqrt{\frac{b^4}{a^2}\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}}, \\
\cos\phi &= \frac{||Q-N||}{||M-N||}\frac{\frac{b^2}{a}\cos\theta}{\sqrt{\frac{b^4}{a^2}\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \frac{\frac{b}{a}\cos\theta}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \\
\tan\phi &= \frac{a}{b}\tan\theta > \tan\theta.
\end{aligned}
$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että

$$
\sin^2\phi + \frac{a^2}{b^2}\cos^2\phi = \frac{1}{\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}. \tag{10}
$$

Viimeinen yhtälö antaa parametrin θ leveysasteen funktiona

$$
\begin{aligned}
\theta(\phi) &= \arctan\left(\frac{b}{a}\tan\phi\right), \\
\theta'(\phi) &= \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\phi} \cdot \frac{1}{\cos^2(\phi)} \\
&= \frac{\frac{b}{a}}{\cos^2\phi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\phi} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

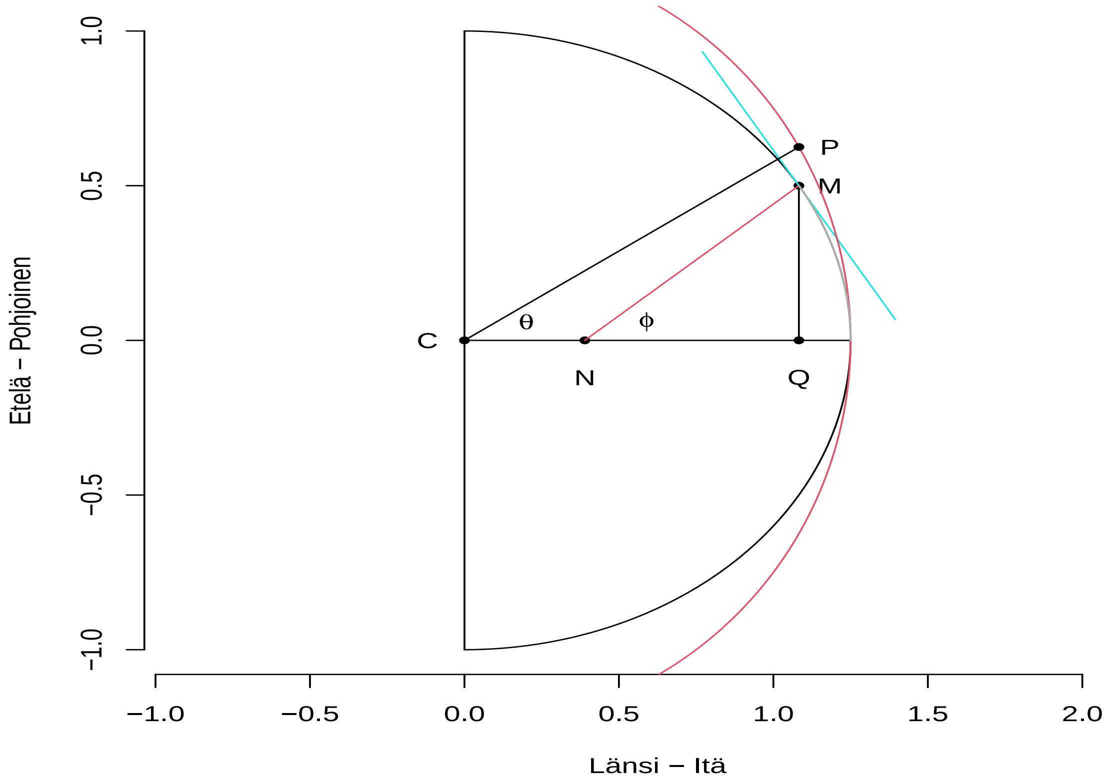
Kirjoitetaan

$$
M = M(\phi) = (a\cos\theta(\phi), b\sin\theta(\phi)).
$$

Meridiaanikaaren pituus Δ päiväntasaajalta leveysasteelle ϕ saadaan tavalliseen tapaan integraalina

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \int_0^\phi \left\|\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}\right\| |\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\phi \sqrt{a^2\sin^2\theta(t) + b^2\cos^2\theta(t)}\,|\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\phi a\sqrt{\sin^2\theta(t) + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta(t)}\,|\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\phi \frac{a\,|\theta'(t)|\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + \frac{a^2}{b^2}\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

Meridiaanikaaren pituuden johtaminen.



Kuva 1: Maan itäinen puolisko poikkileikkauksena akselin suhteen. Paikan M (geodeettinen) leveysaste on ϕ ja θ on redukoitu leveysaste. Keskipisteestä pisteesen M kulkeva jana, jota ei ole kuvassa, on geosentrinen leveysaste. Harmaa kaari päiväntasaajalta paikkaan M on mittauksen kohteena.

missä kolmannella rivillä on käytetty kaavaa (10). Sijoittamalla viimeisen rivin kaavaan

$$\theta'(t) = \frac{\frac{b}{a}}{(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2 t)\cos^2 t} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2}\cos^2 t + \sin^2 t}$$

saamme

$$\Delta = \frac{a^2}{b}\int_0^{\phi}\left(\frac{a^2}{b^2}\cos^2 t + \sin^2 t\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t.$$

Seuraavaksi kirjoitamme $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ ja muokkaamme suluissa olevan osan integroitavan muotoon

$$\frac{a^2}{b^2}\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{a^2}{b^2}\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 t\right).$$

Ensimmäinen eksentrisyys (Ver14, s. 101) on $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ ja $(a^2/b)(b^3/a^3) = b^2/a = a(1 - e^2)$. Saamme kaavan

$$\Delta = a(1 - e^2)\int_0^{\phi}(1 - e^2\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

joka ilmoittaa meridiaanikaaren pituuden päiväntasaajan säteen, eksentrisyyden (tai litistyneisyyden) ja leveysasteen avulla.

Viitteet

[Ald02] Alder, K.: *The Measure of All Things.* Abacus, London, 2002.

[Bow32] Bowditch, N.: *Mécanique céleste*, vol. 2. Hilliard, Grey, Little, and Wilkins, Boston, 1832. Translation into English of Lapalce's Traité de Mécanique Céleste.
https://ia802707.us.archive.org/6/items/mcaniquecles02laplrich
/mcaniquecles02laplrich.pdf.

[Del10] Delambre, J. B.: *Base du système du métrique décimal*, Tome III. Baudouin, Paris, 1810.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110604s.texteImage.

[Del14] Delambre, J. B.: *Astronomie théorique et pratique*, Tome III. Courcier, Paris, 1814.
https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-46128.

[Hal98] Hald, A.: *A History of Mathematical Statistics From 1750 to 1930.* Wiley, New York, 1998.

[Lac99] La comission des poids et mesures: *Rapport sur la mesure de la méridienne de France, et les résultats qui en ont été déduits pour déterminer les bases du nouveau systéme métrique.* Memoires de l'Institut National des Sciences & arts. Sciences Mathematiques et Physiques., Tome II, Histoire: 23–80, 1799.
https://biodiversitylibrary.org/page/16302865.

[Lap99] Laplace, P. S. de: *Traité de Mécanique Céleste*, 2. Duprat, Paris, 1799.
https://www.library.si.edu/digital-library/book/traitdemcaniquec03lapl.

[Swi99] Swinden, J.H. van: *Rapport sur la mesure de la méridienne de France, et les résultats qui en ont été déduits pour déterminer les bases du nouveau systéme métrique.* Memoires de l'Institut National des Sciences & arts. Sciences Mathematiques et Physiques., Tome II, Histoire: 23–80, 1799.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3217h/f3.image.

[Ver14] Vermeer, M. & Rasila, A.: *Maailman kartta — johdatus matemaattiseen geodesiaan.* Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry., Helsinki, 2014.