DISSERTATIO ACADEMICA

DE FIGURA TELLURIS OPE PENDULORUM DETERMINANDA

PART. IV

PRAESIDE

M. GUST. GABR. HÄLLSTRÖM

PRO GRADU PHILOSPHICO

P.P.

SIM. VILHELMUS APPELGREN

In Audit. Mathemat. Die xxii Junii MDCCCX

ABOÆ

Exscripsit Jukka Nyblom
III Aprilis MMXIX

Si quiden inaequalitas & dissimilitudo in meridianis terrestribus supponenda est, quod mensurae graduum meridianorum diversorum innuere videntur, nihil tamen impedit, quominus quivis meridiani singuli ut elliptici considerentur. Haec hypothesis, uti simplicissima, saltem eo usque aliis praeferenda videtur, adeoque a nobis hic adhibenda, donec ostensum sit illam experientae non convenire. Quod ad densitatem telluris attinet, illam primum aequabilem supponimus, ut innotescat an oscillationes pendulorum eam confirment nec ne. In eo igitur quaestio hic versatur, ut examinentur illi meridiani, pro quibus longitudo aliqua penduli data est, quod quidem eo ducit, ut determinetur pro quovis meridiano elliptico ratio axeos minoris ad majorem; ex aequalitate enim vel inaequalitate hujus rationis facillima erit conclusio de similitudine vel dissimilitudine meridianorum.

Sit igitur meridiani cujusdam terrestris semiaxis minor seu semiaxis telluris constans $= a$, ratio vero hujus ad semiaxin majorem ut $1/n$, ut sit distantia a centro telluris ad aequatorem in hoc meridiano $= na$. In id inquirendum est, ut ope pendulorum determinetur, an valor n in diversis meridianis diversus sit nec ne. Ex iis quae demonstrarunt Mathematici[1] sequitur, in sphaeroide ellipsoidica homogenea vim gravitatis pro diverisis locis rationem tenere normalis meridiani elliptici ad locum observatoris relati, cumque sint logitudines pendulorum in ratione vis gravitatis, erunt quoque inter se ut normales telluris. Facta vero latitudine geographica loci observatoris $= l$, atque penduli simplicis minuta secunda ibi oscillantis longitudo $= p$, erit primo valor normalis[2] =

$$\frac{a}{n\cos l\sqrt{n^2+\tan^2 l}}.$$

Pro alio loco ejusdem meridiani, cujus latitudo est $= \lambda$, & ubi longitudo penduli est observata $= \pi$, erit similiter normalis =

$$\frac{a}{n\cos \lambda\sqrt{n^2+\tan^2 \lambda}}.$$

Instituta deinde comparatione habetur

$$\frac{p}{\pi} = \frac{\cos\lambda\sqrt{n^2+\tan^2 l}}{\cos l\sqrt{n^2+\tan^2 l}},$$

unde post debitam reductionem eruitur valor quaesitus[3]

$$n^2 = \frac{\pi^2\sin^2\lambda - p^2\sin^2 l}{p^2\cos^2 l - \pi^2\cos^2\lambda}.$$

Apparet igitur, ad inveniendum numerum n requiri ut in eodem meridiano duobus locis observata sit longitudo penduli. Deficientibus autem ubique talibus observationibus, ponamus longitudinem penduli sub ipso polo telluris esse $= P$, ut pro latitudine

[1]Theorie de la Figure de la Terre par Clairaut, Paris 1743, 2 Partie, § 18, p. 188.
Mechanik des Himmels von P. S. La Place, übers. von J. C. Burckhardt, Berlin 1802, 2 Th. p. 64.

[2]Dissert. Acad. resolvens problemata nonnulla posita figura telluris ellipsoidica, Praes. Mart. Joh. Wallenio & Resp. Thom. Mattheiszen, Aboæ 1767, § 3 & 4.

[3]Hic idem est valor, quem alia ratione inventum praebet Dissert. Acad. de Figura telluris pendulorum ope definieneda, Praes. Andr. Planman & Resp. Isaac. Nordberg Aboæ 1778 P. I, p. 14.

poli $= 90°$ habeatur

$$n = \frac{1}{p\cos l}\sqrt{P^2 - p^2\sin^2 l}.$$

Si igitur quodam artificio semel determinata est P, singulae quaevis longitudines pendulorum hujus aequationis ope rationem praebent axeos minoris meridiani ad majorem. Ad inveniendum vero P comparentur loca, quae perfecte vel saltem proxime ad eundem pertinent meridianum, ut habeatur

$$n = \frac{1}{p\cos l}\sqrt{P^2 - p^2\sin^2 l} = \frac{1}{\pi\cos\lambda}\sqrt{P^2 - \pi^2\sin^2\lambda}.$$

Inde enim elicitur valor

$$\begin{aligned} P &= p\pi\sqrt{\frac{\sin^2 l\cos^2\lambda - \cos^2 l\sin^2\lambda}{\pi^2\cos^2\lambda - p^2\cos^2 l}} \\ &= p\pi\sqrt{\frac{\sin(l+\lambda)\sin(l-\lambda)}{\pi^2\cos^2\lambda - p^2\cos^2 l}}, \end{aligned} \tag{2}$$

seu etiam, facto $\cos q = (p\cos l)/(\pi\cos\lambda)$,

$$P = \frac{p}{\cos\lambda\sin q}\sqrt{\sin(l+\lambda)\sin(l-\lambda)}.$$

Cum non nisi pauciores habeamus ejusmodi observationes pendulorum, quae ad eundem meridianum referri possent, unde si ex inevitabilibus parvis erroribus in longitudinibus pendulorum magnae variationes in valore penduli polaris oriuntur, patet valorem P non adeo accurate determinari posse, ut ad inveniendam n illo uti liceat, examinandum est quomodo variatio dP a variationibus dp & $d\pi$ dependeat. Sumtis igitur differentialibus logarithmicis habetur

$$\frac{dP}{P} = \frac{\pi^2\cos^2\lambda\cdot\frac{dp}{p} - p^2\cos^2 l\cdot\frac{d\pi}{\pi}}{\pi^2\cos^2\lambda - p^2\cos^2 l}.$$

Error, cui obnoxii esse possunt valores longitudinis pendulorum supra allati, intra limites $\pm 0{,}02$ lineae parisinae contineri supponitur, ut de observationibus suis plerique asseverant auctores. Poni itaque potest $dp = \pm d\pi = \pm 0{,}02$; cumque valores p & π limites 439,1 & 441,4 non excedant, valores dp/p & $d\pi/\pi$ continebuntur intra limites 0,02/439,1 & 0,02/441,4, hoc est, intra 0,00004555 & 0,00004531, unde apparet, sine metu erroris fieri posse $dp/p = \pm d\pi/\pi = \pm 0{,}0000454$. Pro signo positivo erit hinc $dP/P = dp/p = \pm 0{,}0000454$ & error determinandus $dP = +0{,}0000454\cdot P$, qui minor erit quantitate $\pm 0{,}020066$ lin. parisin., quoniam $P < 442$ lin. Si vero $dp/p = -d\pi/\pi = \pm 0{,}0000454$, erit

$$\frac{dP}{P} = \pm 0{,}0000454\cdot\frac{\pi^2\cos^2\lambda + p^2\cos^2 l}{\pi^2\cos^2\lambda - p^2\cos^2 l}.$$

seu dividendo per $\pi^2 \cos^2 \lambda$, & substituendo valorem $\cos q$,

$$\frac{dP}{P} = \pm 0{,}0000454 \cdot \frac{1+\cos^2 q}{1-\cos^2 q} = \pm 0{,}0000454 \left(\frac{2}{\sin^2 q} - 1\right),$$

unde

$$dP = \pm 0{,}0000454 \left(\frac{2}{\sin^2 q} - 1\right) P.$$

Hinc autem apparet, decrescere valorem dP crescente

$$\sin^2 q = 1 - \frac{p^2 \cos^2 l}{\pi^2 \cos^2 \lambda},$$

& contra, & quidem cum ratio p^2/π^2 parum sit variabilis dP minorem fieri quo minor sumitur $\cos l$ respectu $\cos \lambda$. Inde igitur concludendum est, latitudinem λ minimam eligi debere, & illam l maximam, quae sumi potest, atque valorem P esse certiorem pro majori differentia $l - \lambda$ quam pro minori.

Secundum haec principia eligamus primum observationes Upsaliae & in Promontorio bonae spei factas, pro quibus locis differentia meridianorum non est nisi $0^\circ\, 44'\, 45''$, atque habemus ex praecedentibus $l = 59^\circ\, 51'\, 50''$, $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$, $p = 440{,}9168$, $\pi = 440{,}0898$, adeoque $q = 52^\circ\, 41'\, 15''$ & $P = 441{,}3958$. Cumque simul proveniat variatio maxima $dP = \pm 0{,}043319$, apparet limites intra quos continetur valor P, esse 441,4388 & 441,3522.

Pro Spitzbergen & Gotha, quorum locorum meridiani non nisi $0^\circ\, 50'\, 39''$ a se distant, est $l = 79^\circ\, 47'$, $\lambda = 50^\circ\, 56'\, 17''$, $p = 441{,}3796$, $\pi = 440{,}5860$, $q = 73^\circ\, 37'\, 4'',5$, $P = 441{,}4569$, $dP = \pm 0{,}0235$, atque valoris P limites 441,4804 & 441,4334.

Pro Upsalia & Vienna est differentia meridianorum $1^\circ\, 15'\, 43''$, $l = 59^\circ\, 51'\, 50''$, $\lambda = 48^\circ\, 12'\, 36'$, $p = 440{,}9168$, $\pi = 440{,}5500$, nec non $q = 41^\circ\, 3'\, 29''$, & $P = 411{,}4263$, $dP = \pm 0{,}07287$, adeoque limites valoris $P = 441{,}4992$ & 441,3534.

Differentia meridianorum quoque Viennae & Promontorii bonae spei non est nisi $2^\circ\, 0'\, 28''$, quare apparet horum locorum observationes idoneas esse ad inveniendum valorem P. Ipsa autem comparatione instituta, factaque $l = 48^\circ\, 12'\, 36''$, $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$, $p = 440{,}5500$, & $\pi = 440{,}0898$, provenit $q = 36^\circ\, 29'\, 38'',6$, $P = 441{,}3884$, atque $dP = \pm 0{,}0933$, adeoque limites 441,4817 & 441,2951.

Collatis observationibus pro Spitzbergen & Roma quorum locorum differentia meridianorum est $2^\circ\, 34'\, 9''$, erit $l = 79^\circ\, 47'$; $\lambda = 41^\circ,\, 53'\, 54''$, $p = 441{,}3796$; $\pi = 440{,}3101$; $q = 76^\circ\, 10'\, 47'',5$, $P = 441{,}4442$, $dP = \pm 0{,}0225$, & valoris P limites 441,4667 ja 441,4217.

Ex observationibus Arensburgi & ad Promontorium bonae spei factis, pro quibus locis differentia meridianorum est $4^\circ\, 4'\, 36''$, $l = 58^\circ\, 15'\, 9''$; $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$ $p = 440{,}8848$; $\pi = 440{,}0898$; $q = 50^\circ\, 33'\, 44'',3$, $P = 441{,}4236$, $dP = \pm 0{,}0472$, atque limites valoris $P = 441{,}4708$ & 441,3764.

Quam adhuc instituere possemus comparationem inter observationes sub aequatore in Peru & in Portobello factas, ideo hic omittimus, quod aperte erroneum, nimis nempe parvum, praebeat valorem longitudinis P. Illud indicat longitudinem penduli in Portobello justo minorem esse assumtam, quod etiam ex continuitatis lege, quam indicant observationes locorum vicinorum, intelligitur.

Collatis jam valoribus longitudinis penduli polaris eo ordine quo determinati sunt, oritur sequens comparatio:

P	$=$	441,3958	dP	$=$	$\pm 0{,}0433$
		4569			0235
		4263			0729
		3884			0933
		4442			0225
		4226			0472
Medium	$=$	441,5225			

Illud autem medium arithmeticum non efficit valorem maxime probabilem, cum diversi hi valores P non omnes eadem certitudine gaudeant. Quo latiores nempe sunt limites, intra quos continetur P, hoc est, quo majores sunt variationes dP, eo incertiorem esse patet hunc ipsum, unde sequitur, gradum probabilitatis cujusque valoris P mensurari correspondente qvantitate $1/dP$. Factis igitur $1/dP' = A'$, $1/dP'' = A''$, $1/dP''' = A'''$, &c., pro qvibuscunque valoribus P', P'', P''' &c., erit probabilior longitudinis penduli polaris valor

$$P = \frac{A'P' + A''P'' + A'''P''' + \&c.}{A' + A'' + A''' + \&c.} = 441{,}4361 \text{ lin. paris.}$$

Et quidem hunc valorem non solum intra limites supra praescriptos contineri apparet, verum etiam, non dixerimus utrum fortuito an necessitate urgente, praecise eundem esse, quem requirunt arctissimi limites. Comparatis enim limitibus ex observationobus Upsaliae & in Promontorio bonae spei factis, qui requirunt, ut sit valor $P < 441{,}4388$, cum illis, qui ex observationibus in Spitzbergen & Gothae institutis derivantur, & secundum quos esse debet $P > 441{,}4335$, colligitur, medium inter hos valorem esse $P = 441{,}4361$ seu praecise eundem, quem ex consideratis omnibus valoribus & eorum limitibus supra determinavimus. Eo usque igitur, donec novis observationibus ostensum sit alium valorem huic esse praeferendum, eo utendum esse judicamus.

Determinato sic valore P, derivari potest ratio axium cujuscunque Meridiani terrestris elliptici, in quo data est longitudo quaedam penduli, ex hac aequatione

$$n = \frac{\sqrt{P^2 - p^2 \sin^2 l}}{p \cos l} = \frac{1}{p}\sqrt{P^2 + (P^2 - p^2)\tan^2 l},$$

quae quidem ob faciliorem calculum in duas sequentes resolvatur:

$$\sin r = \frac{p}{P}\sin l, \ \& \ n = \frac{P\cos r}{p\cos l}.$$

Cognita vero n, data quoque erit $n-1$, quae quantitas a *La Place* ellipticitas appellata, parte aliquota $\frac{1}{s}$ semiaxis telluris exprimatur, ita ut sit $s = \frac{1}{n-1}$.

Eo vero ipso, quo pro quovis meridiano hinc determinatur valor n, simul in id inquirendum est, an variationes hujus valoris revera indicent aliquam esse in figura telluris aberrationem ab ellipsoide, vel an potius apparens tantum sit haec aberratio, ab erroribus tantum in valoribus P & p derivanda. In eum igitur finem quaerenda est variatio valoris n a synchronis variationibus quantitatum P & p dependens. Sumtis scilicet differentialibus logarithmicis valoris n, habetur

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{\cos^2 r}\left(\frac{dP}{P} - \frac{dp}{p}\right), \quad \text{atque} \quad dn = \frac{n}{\cos^2 r}\left(\frac{dP}{P} - \frac{dp}{p}\right).$$