DISSERTATIO ACADEMICA

DE FIGURA TELLURIS OPE PENDULORUM DETERMINANDA

PART. I

PRAESIDE

M. GUST. GABR. HÄLLSTRÖM

PRO GRADU PHILOSPHICO

P.P.

ABRAHAMUS REILIN

In Audit. Mathemat. Die xxx Maji MDCCCX

ABOÆ

Exscripsit Jukka Nyblom
III Aprilis MMXIX

De figura telluris pendulorum ope determinanda

Famosa illa quaestio de figura & magnitudine Telluris cognoscenda, ab antiquissimis retro temporibus ventilata, nostro quoque aevo junctis summorum Mathematicorum viribus examinata est. Principia, quibus calculi hoc respectu necessarii superstruendi sunt, duo adhiberi posse judicarunt, quorum primum & praecipuum e mensuris graduum meridianorum terrestrium desumtum est, alterum vero in cognita longitudine penduli simplicis pro diversis terrae locis, tempore unius minuti secundi oscillationes peragentis, vel, quod eodem redit, in dato numero oscillationum invariati cujusdam penduli, dato temporis intervallo in diversis locis oscillantis, quaesitum. Pluribus nempe rationibus edocti id sibi persvasum habuerunt Mathematici, figuram telluris a sphaerica parum aberrare, illamque ellipsoidicam compressam, revolutione ellipseos circa axin suum minorem ortam, proxime esse censendam statuerunt, quo facto e dimensis duobus arcubus ellipseos generatricis, axes illius, hoc est, ipsius telluris determinare potuerunt. Plures vero hujusmodi mensurae inter se comparatae diversam praebuerunt rationem diametri aequatoris & axis terrestris, unde conclusum est, aut figuram sphaeroidicam revolutione ortam terrae non competere, aut etiam mensuras observatas arcuum meriadianorum singulas adeo justas non fuisse, ut de diversa diversorum meridianorum ellipticitate ex illis separatim adhibitis deducta, aliquid certi concludere liceret. Auxit quoque dubium de ellipsoidica telluris figura, quod mensurae ad eam determinandam hucusque sumtae, in Europa praecipue & in America factae sint, quae quidem solae quaestioni solvendae vix sufficere videntur, desideratis nempe mensuris tam graduum meridianorum quorundam asiaticorum, quam etiam linearum aequatori telluris parallelarum. In eo tantum hucusque igitur fuit subsistendum, ut supposita figura terrae ellipsoidica, ex omnibus datis mensuris graduum meridianorum deduceretur maxime probabilis valor rationis axeos telluris ad diametrum aequatoris, qui quidem ab Illustr. *La Place* determinatur esse aequalis[1] 311/312, & a Cel. *Svanberg*, mensuris Lapponicis recentioribus loco antiquiorum substitutis, aequalis [2] 322,065/323,065, vel etiam 323,28/324,28.

Altera methodus figuram telluris determinandi, in qua longitudo penduli simplicis elementum calculi constituit, ab Illustr. *La Place* quoque speciatim est adhibita. Concludendum illi quidem ex examine mensurae graduum meridianorum fuit, tellurem non esse massam homogeneam, sed densitatem illius a superficie versus centrum crescere; assumsit tamen incrementa longitudinis penduli ab aequatore versus polos terrae rationem sequi Sinus latitudinis duplicatam, quae lex pro terra ellipsoidica proxime valet. Inde autem rationem quaerens axeos terrae ad diametrum aequatoris verisimillimam, quam datae quindecim diversae penduli longitudines simul consideratae uti mediam praebent, hanc eruit proportionem 334,78/335,78.[3] Nihil igitur in hac re examinandum restare videtur, si terrae talem figuram competere assumimus, qualem illam plures observationes pendulorum calculum simul ingredientium

[1]Mechanik des Himmels von P. S. Laplace, aus d. Franz. übers. von J. C. Burckhardt, Berlin 1802, 2 Th. S. 171

[2]Exposition des opérations faites en Laponie pour la détermination d'un arc du méridien, en 1801–1803, par J. Svanberg, Stockh. 1805, p. 185.

[3]L. c. p. 182

ostendunt, in qua methodo excessus & defectus ellipticitatis terrae a diversis observationibus penduli deducti se invicem compensant. Si vero ad aberrationem figurae terrae a sphaeroide elliptica diligentius attendere volumus, patet, longitudines pendulorum singulorum speciatim esse considerandas, cum in eo ipso versetur quaestio, ut non supponatur omnes medianos terrestres inter se esse aequales & similes, sed examinetur an inaequalitas quaedam ab observationibus pendulorum indicetur, adeoque si illud patet, ut in id inquiratur, qualem figuram meridianorum terrestrium quaevis earum indicent. Instituit quidem jam hoc respectu Cel. *Fredr. Mallet* comparationes, diversa paria longitudinum pendulorum examinans.[4] Cum vero datas sibi observationes promiscue sumserit, nulla instituta correctione ut comparabiles inter se redderentur, nulla quoque ejus rei habita ratione, quod ad diversos, forte inaequales vel dissimiles, meridianos terrae hae pertineant; determinata quaedam figura telluris, praeter ellipsoidicam revolutione ortam, inde non potuit cognosci, sed tantum ex ejus calculis sequi videtur, aut aberrationem aliquam a sphaeroide tali, qualis revolutione meridiani oritur, existere, aut etiam, si illud non conceditur, discrepantiam resultantem ab erroribus in observationibus esse derivandam.

Operae igitur pretium fore judicavimus, in quaestione de figura telluris cognoscenda specialiorem adhuc instituere comparationem diversorum meridianorum terrestrium, ut certe innotescat, an revera tanta sese ostendat inaequalitas et dissimilitudo, quae non solum errori cuidam, in observationibus pendulorum inevitabili, debeatur, sed etiam in tellure vere existat. Ante omnia vero in hoc negotio illud est respiciendum, ut ad eundem calorem & eandem aëris pressionem reducantur observatae pendulorum longitudines, quo hae ad longitudines pro spatio aëre vacuo reduci possint, atque quo simul effectus varius caloris in mutandam unitatem, qua mensurata est longitudo penduli, juste aestimetur. Primo nempe e cognitis legibus hydrostaticis sequitur, lentem penduli pondere illius aëris, cujus locum occuppat, sustentari, adeoque tardius delabi in aëre quam in vacuo, ita ut altitudo lapsus unius minuti secundi major sit in vacuo quam in aëre. Facta igitur $1/\mu$ proportione diametri circuli ad peripheriam, atque altitudine lapsus primi $1''$ in vacuo $= g$ & in aëre $= g'$, patet esse, pro minori pendulorum oscillatione & calore m graduum, longitudinem penduli simplicis in spatio aëre vacuo $p(m) = 2g/\mu^2$ & in aëre $p'(m) = 2g'/\mu^2$, adeoque

$$\frac{p(m)}{p'(m)} = \frac{g}{g'} \quad \text{seu} \quad p(m) = \frac{g}{g'}p'(m).$$

Sunt vero g & g' in ratione pressionum corporis in vacuo & in aëre, hoc est, facto pondere corporis absoluto in vacuo $= v$ & pondere aëris sub eodem volumine $= v/r$, in ratione $v/(v - v/r)$, unde eruitur

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}, \ \& \ p(m) = \frac{rp'(m)}{r-1}.$$

Facto vero pondere specifico lentis penduli $= s$ & aëris $= t$, erit $r = s/t$, atque

$$p(m) = \frac{s}{s-t}p'(m) = \left(1 + \frac{t}{s}\right)p'(m) \quad \text{proxime},$$

[4]Svenska Vetenskaps Academiens Handl. för år 1767, Vol. XXVIII, p. 158 &c, 193 &c. Mathem. beskifning om jordklotet, af Fredr. Mallet, Upsala 1772, 4 Cap. §24, p. 81, &c.

ob quantitatem t/s admodum parvam. Est vero t pro calore diverso & pro diversa altitudine Barometri sensibiliter variablis, cum e contrario s constans hic possit assumi. Fieri ergo debet, pro caloris gradu $= m$ in Thermometro centigrado & Barometri altitudine $= h$ pollic. geom. Svecan.,[5]

$$t = \frac{0{,}0000507\,h}{1 + 0{,}00375\,m}$$

& peracta correctione, longitudo penduli in vacuo

$$p(m) = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1 + 0{,}00375\,m)s}\right) p'(m).$$

Quantitas quae hic obvenit corrigens, pro variatione altitudinis h a 25 ad 26,5 pollices, caloris m a 0° ad +30°, atque longitudinis $p(m)$ a 439 ad 441,5 linea Parisinas, intra limites 0,076 & 0,064 continetur existente lente penduli cuprea, sed intra limites 0,052 & 0,044 pro lente plumbea. Universaliter igitur non potest adhiberi correctio illa additiva 0,063 quam hoc respectu proposuit Cel. *Hube*.[6]

Quod deinde vim attinet caloris ad mutandam longitudinem tam penduli quam etiam mensurae ad quam illa refertur, facile patet, utriusque dilationes vel condensationes simul esse considerandas ut vera habeatur longitudo penduli reducta ad calorem quendam normalem, pro quo temperatura congelationis aquae commodissime sumi potest. Facta scilicet mensura, quae in calore 0° est $= 1$, pro calore m graduum $= 1 + \psi(m)$, & penduli in vacuo oscillantis longitudine in calore 0° $= p(0)$ nec non in calore m graduum $= (1+\phi(m))p(0)$, utrisque scilicet mensura, quae est $= 1$, dimensis, erit haec longitudo, pro m gradu caloris, ad unitatem $1 + \psi(m)$ relata

$$p(m) = \frac{1 + \phi(m)}{1 + \psi(m)} p(0).$$

Si jam duo allati quantitatis $p(m)$ valores inter se comparantur, habetur

$$\frac{1 + \phi(m)}{1 + \psi(m)} p(0) = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1 + 0{,}00375\,m)s}\right) p'(m),$$

& longitudo penduli simplicis pro calore 0° in spatio aëre vacuo oscillationes tempore $1''$ peragentis

$$p(0) = \frac{1 + \psi(m)}{1 + \phi(m)} \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1 + 0{,}00375\,m)s}\right) p'(m).$$

Quando ratio longitudinis penduli simplicis pro diversis locis ope invariati cujusdam penduli quaeritur, reductione aliqua etiam opus est. Pro calore m graduum sit longitudo dati penduli invariata $= q(m)$, hocque pendulum tempore $1''$ in aëre caloris m graduum perficiat oscillationes numero $= M'(m)$, ut e theoria pendulorum habeatur longitudo penduli simplicis in hoc aëre $p'(m) = q(m)M'(m)^2$. Si numerus

[5]Cfr. Dissert. Acad. de pondere corporum specifico ad normalem gradum caloris reducendo, Praes G. G. Hällström & Resp. Joh. Dan. Alcenio, Aboae 1809, p. 16.

[6]In libro suo de Telluris forma, Varsaviae, 1780 p. 26.

oscillationum hujus penduli in vacuo & eodem calore m est $= M(m)$, erit penduli simplicis in vacuo oscillantis longitudo $p(m) = q(m)M(m)^2$, adeoque

$$\frac{M'(m)^2}{M(m)^2} = \frac{p'(m)}{p(m)} \quad \text{seu} \quad M(m)^2 = \frac{p(m)}{p'(m)}M'(m)^2.$$

Facta igitur substitutione valoris

$$\frac{p(m)}{p'(m)} = 1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s},$$

qualis ex iis, quae supra allata sunt, deducitur, oritur valor

$$M(m)^2 = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s}\right) M'(m)^2.$$

Simili ratiocinio in alio loco superficiei terrae, ubi tempore $1''$ hocce pendulum in aëre m' graduum calido vibrationes numero $= N'(m')$ peragit, in vacuo vero oscillationes numero $N(m')$, erit, pro altitudine Barometri $= h'$,

$$N(m')^2 = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h'}{(1+0{,}00375\,m')s}\right) N'(m')^2.$$

Sicut vero pro calore m graduum est in vacuo $p(m) = q(m)M(m)^2$, habetur quoque in calore 0 graduum $p(0) = q(0)M(0)^2$; cumque esse debeat $p(m) = p(0)$, erit quoque $q(m)M(m)^2 = q(0)M(0)^2$, adeoque

$$\frac{M(m)^2}{M(0)^2} = \frac{q(0)}{q(m)}.$$

Ratio deinde $q(0)/q(m)$ e praecedentibus est aequalis rationi $1/(1+\phi(m))$, quare patet esse $M(0)^2 = (1+\phi(m))M(m)^2$, atque valore $M(m)^2$, qualis nuper determinabatur, substituto, habetur tandem invariati penduli ad spatium aëre vacuum & calorem 0° reductus oscillationum numerus

$$M(0)^2 = (1+\phi(m)) \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s}\right) M'(m')^2.$$

Simili modo evincitur pro alio calore m' & Barometri altitudine $= h'$ esse numerum oscillationem in vacuo 0° caloris

$$N(0)^2 = (1+\phi(m')) \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h'}{(1+0{,}00375\,m')s}\right) N'(m')^2.$$

Denotantibus igitur $p(0)$ & $\pi(0)$ longitudinibus penduli simplicis pro allatis duobus locis in spatio aëre vacuo & in calore 0°, erit

$$\begin{aligned} \frac{p(0)}{\pi(0)} &= \frac{M(0)^2}{N(0)^2}, \\ \text{atque } \pi(0) &= p(0)\frac{N'(m')}{M'(m)}\frac{1+\phi(m')}{1+\phi(m)}\frac{1+\frac{0{,}0000507\,h'}{(1+0{,}00375\,m')s}}{1+\frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s}}. \end{aligned}$$