AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA

MAAN MUODON MÄÄRITTÄMISESTÄ HEILUREIDEN AVULLA

Osa IV

PUHEENJOHTAJA

M. GUST. GABR. HÄLLSTRÖM

FILOSOFIAN MAISTERIN ARVON SAAVUTTAMISEKSI

RESPONDENTTI

SIM. VILHELM APPELGREN

Matematiikan auditoriossa 22. kesäkuuta 1810

TURKU

Latinasta suomentanut
Jukka Nyblom
28. tammikuuta 2020

Jos on olettava Maan pituuspiirien yhteensopimattomuus ja erilaisuus, mihin eri pituuspiirien astemittaukset näyttävät viittaavan, ei mikään kuitenkaan estä tarkastelemasta mitä tahansa yksittäisiä pituuspiirejä ellipseinä. Joidenkin mielestä tämä varsin yksinkertainen hypoteesi on asetettava ainakin toistaiseksi etusijalle ja sitä on meidän täällä noudatettava siihen asti, kunnes tulee osoitetuksi, ettei se sovi yhteen kokemuksen kanssa. Koska se liittyy maapallon tiheyteen, oletamme sen aluksi tasaiseksi, kunnes saadaan selville, vahvistavatko heilureiden heilahdukset sen vai eivät. Tämä kysymys kääntyy siis sellaiseksi, että tutkitaan niitä pituuspiirejä, joilta on olemassa aineistoa heilurin pituuksista. Tämä puolestaan johtaa siihen, että määritetään kullakin elliptisellä pituuspiirilla Maan pienemmän akselin suhde suurempaan. Tämän osamäärän vakioisuus tai vaihtelevuus tarjoaa yksinkertaisimman keinon päätellä, ovatko pituuspiirit samanlaisia vai erilaisia.

Olkoon siis maan erään pituuspiirin pienempi puoliakseli eli Maan puoliakseli vakio a, ja tämän suhde suurempaan puoliakseliin $1/n$, jolloin etäisyys maan keskipisteestä päiväntasaajalle tämän pituuspiirin kohdalla on na. On siis tutkittava sitä, onko heilureiden määritämä arvo n eri pituuspiireillä sama vai ei. Matemaatikkojen (Cla43, 2 Partie, § 18, p. 188) ja (Lap02, Th. 2, p. 64) osoittamista tuloksista seuraa, että kun kysymyksessä on homogeeninen ellipsin pyörähdyskappale, painovoima eri paikoissa on verrannollinen pituuspiiriellipsin kohtisuoraan l. normaaliin ja riippuu havaitsijan paikasta. Koska heilureiden pituudet ovat verrannollisia painovoimaan, nekin suhtautuvat toisiinsa Maan normaalien lailla. Oletetaan, että havaitsijan maantieteellisen paikan leveysaste on l ja yksinkertaisen sekuntiheilurin pituus on p. Aloitetaan normaalin arvosta[1] (Wal67, § 3 ja 4)

$$\frac{a}{n\cos l\sqrt{n^2+\tan^2 l}}.$$

Saman pituuspiirin toisessa paikassa, jonka leveysaste on λ ja missä heilurin pituudeksi on havaittu π, normaalin arvo on vastaavasti

$$\frac{a}{n\cos \lambda\sqrt{n^2+\tan^2 \lambda}}.$$

Vertaamalla näitä saadaan

$$\frac{p}{\pi}=\frac{\cos\lambda\sqrt{n^2+\tan^2\lambda}}{\cos l\sqrt{n^2+\tan^2 l}},$$

mistä asianmukaisen sievennyksen jälkeen ilmaantuu etsitty arvo[2]

$$n^2=\frac{\pi^2\sin^2\lambda-p^2\sin^2 l}{p^2\cos^2 l-\pi^2\cos^2\lambda}$$

Luvun n löytämiseksi siis paljastuu vaatimus, että samalla pituuspiirillä olevissa kahdessa paikassa mitataan heilurin pituus. Mutta kun missään ei sellaisia havintoja

[1] Liiteessä osoitetaan, että ao. lauseke on verrannollinen valittuun paikkaan kohtisuoraan osoittavan vektorin normiin. Suom. huom.

[2] Tämä on sama arvo, johon Planman ja Nordberg ovat toista kautta päätyneet (Pla78, s. 14).

ole, olettakaamme heilurin pituudeksi P pohjoisnavalla, jolloin siis leveysasteilla l ja $\lambda = 90°$

$$n = \frac{1}{p \cos l} \sqrt{P^2 - p^2 \sin^2 l}.$$

Jos siis jollakin keinolla P on kerrankin määritetty, mitkä tahansa yksittäiset heilureiden pituudet mahdollistavat tämän yhtälön avulla pituuspiirin lyhyemmän ja pidemmän akselin suhteen laskemisen. Pituuden P löytämiseksi verrattakoon sellaisia paikkoja, jotka ovat täysin tai ainakin melkein samalla pituuspiirillä, jolloin saadaan

$$n = \frac{1}{p \cos l} \sqrt{P^2 - p^2 \sin^2 l} = \frac{1}{\pi \cos \lambda} \sqrt{P^2 - \pi^2 \sin^2 \lambda}.$$

Siitä ratkaistaan arvo

$$\begin{aligned} P &= p\pi \left(\frac{\sin^2 l \cos^2 \lambda - \cos^2 l \sin^2 \lambda}{\pi^2 \cos^2 \lambda - p^2 \cos^2 l} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= p\pi \left(\frac{\sin(l + \lambda) \sin(l - \lambda)}{\pi^2 \cos^2 \lambda - p^2 \cos^2 l} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Asettamalla $\cos q = (p \cos l)/(\pi \cos \lambda)$, saadaan

$$P = \frac{p}{\cos \lambda \sin q} \sqrt{\sin(l + \lambda) \sin(l - \lambda)}.$$

Meillä on vain vähän sellaisia heilureiden arvoja, jotka voidaan liittää samaan pituuspiiriin. Tästä seuraa, että jos väistämättömät pienet virheet heilureiden pituuksien määrittämisessä tuottavat suurta vaihtelua heilurin arvoihin pohjoisnavalla, niin on ilmeistä, että P:lle ei saada riittävän tarkkaa arvoa n:n määrittämiseksi. Niinpä on tutkittava miten muutos dP riippuu muutoksista dp ja $d\pi$. Ottamalla logaritminen kokonaisdifferentiaali saadaan

$$\frac{dP}{P} = \frac{\pi^2 \cos^2 \lambda \cdot \frac{dp}{p} - p^2 \cos^2 l \cdot \frac{d\pi}{\pi}}{\pi^2 \cos^2 \lambda - p^2 \cos^2 l}.$$

Yllä esitettyjen heilureiden pituuksien virheiksi voidaan olettaa korkeintaan 0,02 Pariisin lineaa, kuten useimmat mittausten tekijät havainnoistaan vakuuttavat. Siksi voidaan asettaa $dp = \pm d\pi = \pm 0{,}02$. Koska p ja π ovat rajojen 439,1 ja 441,4 välissä, dp/p ja $d\pi/\pi$ pysyvät rajojen $0{,}02/439{,}1 = 0{,}00004555$ ja $0{,}02/441{,}4 = 0{,}00004531$ sisällä. Tästä seuraa, että voimme ilman virheen pelkoa asettaa $dp/p = \pm d\pi/\pi = \pm 0{,}0000454$. Positiivisen etumerkin valinnasta[3] seuraa $dP/P = dp/p = \pm 0{,}0000454$, ja määritettävä virhe $dP = +0{,}0000454 \cdot P$, joka on pienempi kuin $\pm 0{,}020066$ Pariisin lineaa, koska $P < 442$ lineaa. Mutta jos $dp/p = -d\pi/\pi = \pm 0{,}0000454$, saadaan

$$\frac{dP}{P} = \pm 0{,}0000454 \cdot \frac{\pi^2 \cos^2 \lambda + p^2 \cos^2 l}{\pi^2 \cos^2 \lambda - p^2 \cos^2 l}.$$

[3] So. valitaan $dp/p = d\pi/\pi = \pm 0{,}0000454$. Suom. huom.

Supistamalla osamäärä lausekkeella $\pi^2 \cos^2 \lambda$ ja ottamalla käyttöön merkintä $\cos q$ saadaan

$$\frac{dP}{P} = \pm 0{,}0000454 \cdot \frac{1+\cos^2 q}{1-\cos^2 q} = \pm 0{,}0000454 \left(\frac{2}{\sin^2 q} - 1 \right),$$

mistä seuraa

$$dP = \pm 0{,}0000454 \left(\frac{2}{\sin^2 q} - 1 \right) P.$$

Tästä nähdään, että dP vähenee, kun

$$\sin^2 q = 1 - \frac{p^2 \cos^2 l}{\pi^2 \cos^2 \lambda}$$

kasvaa ja päivastoin. Koska osamäärä p^2/π^2 vaihtelee vain vähän, dP on pieni silloin, kun $\cos l$ on pieni suhteessa arvoon $\cos \lambda$. Tästä on siis pääteltävä, että leveyspiiri λ pitää valita niin pieneksi ja l niin suureksi kuin mahdollista, jolloin P:n arvo tulee varmemmaksi silloin kun erotus $l - \lambda$ suuri kuin siinä tapauksessa, että se on pieni.

Näitä periaatteita noudattaen valitkaamme ensiksi Upsalassa ja Hyväntoivonniemessä tehdyt havainnot[4]. Näiden paikkojen pituuspiirien erotus on vain $0^\circ\, 44'\, 45''$. Edellisistä osista saamme $l = 59^\circ\, 51'\, 50''$, $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$, $p = 440{,}9168$, $\pi = 440{,}0898$, ynnä vielä $q = 52^\circ\, 41'\, 15''$ et $P = 441{,}3958$. Kun nämä yhdessä tuottavat maksimaalisen vaihtelun rajoiksi $dP = \pm 0{,}043319$, saadaan rajat 441,4388 ja 441,3522, joiden välissä P on.

Huippuvuorten ja Gothan pituuspiirit eivät poikkea enempää kuin $0^\circ 50' 39''$. Lisäksi $l = 79^\circ 47'$, $\lambda = 50^\circ\, 56'\, 17''$, $p = 441,3796$, $\pi = 440{,}5860$, $q = 73^\circ, 37'\, 4\, 5''$ ja $P = 441{,}4569$. Näistä saadaan $dP = \pm 0{,}0235$ ja P:n raja-arvot 441,4804 ja 441,4334.

Upsalan ja Wienin pituuspiirien erotus on $1^\circ 15' 43''$. Lisäksi $l = 59^\circ\, 51'\, 50''$, $\lambda = 48^\circ\, 12'\, 36'$, $p = 440{,}9168$, $\pi = 440{,}5500$, $q = 41^\circ\, 3'\, 29''$ja $P = 411{,}4263$. Näistä saadaan $dP = \pm 0{,}07287$, ja P:n raja-arvot 441,4992 ja 441,3534.

Pituuspiirien erotus Wienin ja Hyväntoivonniemen välillä on $2^\circ\, 0'\, 28''$, joten näitä paikkoja voidaan pitää tyydyttävinä P:n arvon määrittämiseksi. Saatavilla on lisäksi $l = 48^\circ\, 12'\, 36$", $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15$", $p = 440{,}5500$ ja $\pi = 440{,}0898$, $q = 36^\circ\, 29'\, 38{,}6$", joista saadaan $P = 441{,}3884$ ja $dP = \pm 0{,}0933$. Nämä johtavat P:n raja-arvoihin 441,4817 ja 441,2951.

Kokoamalla Huippuvuorten ja Rooman havainnot saadaan pituuspiirien erotukseksi $2^\circ\, 34'\, 9''$. Lisäksi $q = 50^\circ\, 33'\, 44{,}3''$, $P = 441{,}4442$, $dP = \pm 0{,}0225$. Nämä tuottavat P:n raja-arvot 441,4667 ja 441,4217.

Kuressaaren ja Hyväntoivonniemen pituuspiirien erotus on $4^\circ\, 4'\, 36''$, $l = 58^\circ\, 15'\, 9''$. Lisäksi $l = 79^\circ\, 47'$, $\lambda = -33^\circ\, 55'\, 15''$, $p = 440{,}8848$, $\pi = 440,0898, q = 50^\circ\, 33'\, 44{,}3''$, $P = 441{,}4236$, $dP = \pm 0{,}0472$, ja lopuksi raja-arvot $P = 441{,}4708$ et 441,3764.

Voisimme vielä lisäksi ottaa mukaan Päiväntasaajalla Perussa ja Portobellossa tehdyt havainnot, mutta jätämme ne tässä yhteydessä pois sen takia, että ne antavat ilmeisen virheellisen, liian pienen, arvon heilurin pituudelle P. Tämä tulos viittaa

[4]Seuraavassa esitetyt P:n ja dP:n arvot on laskettu uudelleen lähtötietojen avulla ja luettavissa liitteen Taulukosta 1. Uudet tulokset poikkeavat jonkin verran tässä esitettävistä. Suom. huom.

siihen, että Portobellossa on omaksuttu oikeasti liian pieni heilurin pituus. Tämä tulee ymmärrettaväksi jatkuvuuden perusteellakin, kuten naapuripaikkojen mittaukset osoittavat.

Kokoamalla määrittämisjärjestykseen heilurin pituuksien arvot Pohjoisnavalla, saamme seuraavan taulukon:

P	=	441,3958	dP	=	±0,0433
		4569			0235
		4263			0729
		3884			0933
		4442			0225
		4236			0472
Keskiarvo	=	441,5225			

Aritmeettinen keskiarvo[5] ei kuitenkaan tuota kaikkein todennäköisintä arvoa, koska nämä kaikki P:n arvot eivät ole yhtä luotettavia. Mitä suurempi on P:hen liittyvien raja-arvojen erotus, sitä suurempi on dP ja sitä epävarmempi P:n arvo. Tästä seuraa, että kunkin P:n arvon todennäköisyyttä mittaa sitä vastaava $1/dP$. Merkitään $1/dP' = A'$, $1/dP'' = A''$, $1/dP''' = A'''$, jne. jokaista vastaavaa arvoa P', P'', P''' jne. kohti. Todennäköisempi heilurin arvo Pohjoisnavalla on[6]

$$P = \frac{A'P' + A''P'' + A'''P'''\&c.}{A' + A'' + A'''\&c.} = 441,4361 \text{ Pariisin lineaa.}$$

Tämä arvo ei ainoastaan näytä pysyvän edellä määritettyjen rajojen puitteissa vaan myös näyttää olevan täsmälleen sama, jonka antavat pohjoisimmat rajat. Emme ota kantaa siihen, käykö näin sattumalta vai välttämättömyyden pakosta. Kun verrataan Upsalan ja Hyväntoivonniemen havaintojen antamia rajoja, joiden mukaan $P < 441{,}4388$, niihin rajoihin, jotka johdetaan Huippuvuorten ja Gothan havainnoista, niin pitää olla $P > 441{,}4335$. Näiden rajojen keskiarvo 441,4361 on täsmälleen sama, jonka olemme johtanee jo aikaisemmin kaikkien havaintojen painotettuna keskiarvona. Siis siihen asti kunnes uudet havainnot osoittavat jonkin toisen arvon olevan sitä parempi, päätämme käyttää sitä.

Kun P:n arvo näin määritetty, voidaan johtaa minkä tahansa sellaisen pituuspiiriellipsin akseleiden suhde, jolta on jonkin heilurin pituus tiedossa. Yhtälö

$$n = \frac{\sqrt{P^2 - p^2 \sin^2 l}}{p \cos l} = \frac{1}{p}\sqrt{P^2 + (P^2 - p^2)\tan^2 l},$$

ratkaistaan helpohkosti kahdella askeleella:

$$\sin r = \frac{p}{P} \sin l, \quad n = \frac{P \cos r}{p \cos l}.$$

[5]Taulukon lukujen keskiarvo on 441,4224 eikä 441,5225. Suom. huom.

[6]Taulukon lukujen painotettu keskiarvo on 441,4321 eikä 441,4361. Suom. huom.

Kun n:n arvo on todella selvitetty, saadaan myös Laplacen elliptisyydeksi nimittämä suure $n-1$, jonka käänteisarvo $s = 1/(n-1)$ ilmoittaa elliptisyyden osuutena Maan puoliakselista.[7]

Juuri sen takia, että n:n arvo määritetään jatkossa minkä tahansa pituuspiirin avulla, on samalla tutkittava, osoittavatko tämän arvon vaihtelut oikeasti jotakin ellipsoidista poikkeavaa maan muodossa, vai onko tämä poikkeama pikemmenkin vain sen suuruinen, että se selittyy pelkästään pituuksien P ja p mittausvirheillä. Tämän päämäärän saavuttamiseksi on siis etsittävä suureiden P ja p samanaikaisista vaihteluista riippuvan arvon n vaihtelu. Ottamalla arvon n logaritminen kokonaisdifferentiaali, saadaan

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{\cos^2 r}\left(\frac{dP}{P} - \frac{dp}{p}\right) \text{ ja } dn = \frac{n}{\cos^2 r}\left(\frac{dP}{P} - \frac{dp}{p}\right).$$

[7] Aikaisemmin a on merkinnyt sädettä navoilla. Jos b on säde Päiväntasaajalla, niin $n-1 = b/a-1$ ja edelleen $s = a/(b-a)$, mikä on osuus puoliakselista. Käännös on tulkinta alkuperäisen virkkeen ajatuksesta, joka jää hieman epäselväksi. Tarkoituksena on ehkä ollut ilmaista elliptisyys muodossa $1/s$, mikä on ollut ja on edelleen tavanomainen tapa kirjoittaa Maan elliptisyys. Nykyisin maan elliptisyys määritellään lausekkeena $1-a/b$. Kansainvälinen ellipsoidi 1924 määrittelee elliptisyyden $1-a/b = 1/297$, joten Laplacen elliptisyys samalla tavalla ilmaistuna on tässä tapauksessa $b/a-1 = 1/s = 1/296$. Suom. huom.

Suomentajan liite.

Tutkielmansa alussa Hällström ja Appelgren ilmoittavat, että kullakin paikalla Maan pinnalla painovoima on verrannollinen paikan normaalin arvoon ja antavat normaalin arvoksi lausekkeen

$$\frac{a/n}{\cos\lambda\sqrt{n^2+\tan^2\lambda}}, \tag{1}$$

missä a on napojen etäisyys Maan keskipisteestä, na on etäisyys Maan keskipisteestä Päiväntasaajalle, ja λ on leveysaste. Painovoima on siis verrannollinen lausekkeeseen (1). Otamme myös käyttöön merkinnän $b = na$, joka on Maan säde Päiväntasaajalla.

Seuraavan sivun kuva valaisee jatkotarkastelua. Oletamme, että maa on ellipsin pyörähdyskappale. Kuvassa musta kaari on Maan poikkileikkaus jonkin meridiaanin suhteen. Koska poikkileikkaus on ellipsi ja pitäytymällä toistaiseksi radiaaneissa, voimme kuvata sitä kaavana

$$e(\theta) = (b\cos\theta, a\sin\theta), -\pi \le \theta < \pi.$$

Pohjoisnapaa vastaa nyt $\theta = \pi/2$, Etelänapaa $\theta = -\pi/2$ ja Päiväntasaajaa $\theta = 0$. Punainen kaari on sen ympyrän kaari, jonka säde on sama kuin Päiväntasaajan säde.

Kiinnitetään ellipsin kaarelta arvo θ_0. Riittää, kun oletetaan $0 < \theta_0 < \pi/2$ (jokin pohjoisen pallonpuolen paikka). Asetetaan tässä parametroinnissa paikan M koordinaateiksi

$$M = (b\cos\theta_0, a\sin\theta_0) = e(\theta_0).$$

Kuvassa kulma θ_0 (redukoitu leveysaste) on kulma jonka jana CP tekee Päiväntasaajan kanssa. Piste P, jonka koordinaatit ovat $(b\cos\theta_0, b\sin\theta_0)$ saadaan pisteestä M siirtämällä sitä pystyakselin suuntaan punaiselle ympyränkaarelle.

Seuraavaksi etsitään Maan sisällä, Päiväntasaajan tasossa, sijaitseva sellainen piste N, että jana MN on kohtisuorassa Maan paikan M kautta kulkevaa tangenttitasoa vastaan. Leveysaste (täsm. geodeettinen leveysaste) λ on tämän janan ja Päiväntasaajatason välinen kulma. Tässä yhteydessä (Pla78, § VIII) on hyödyllisempi viite kuin (Wal67, § 3 ja 4).

Paikan M kautta kulkevan tangentin $t(x)$ yhtälö saadaan derivaatan avulla

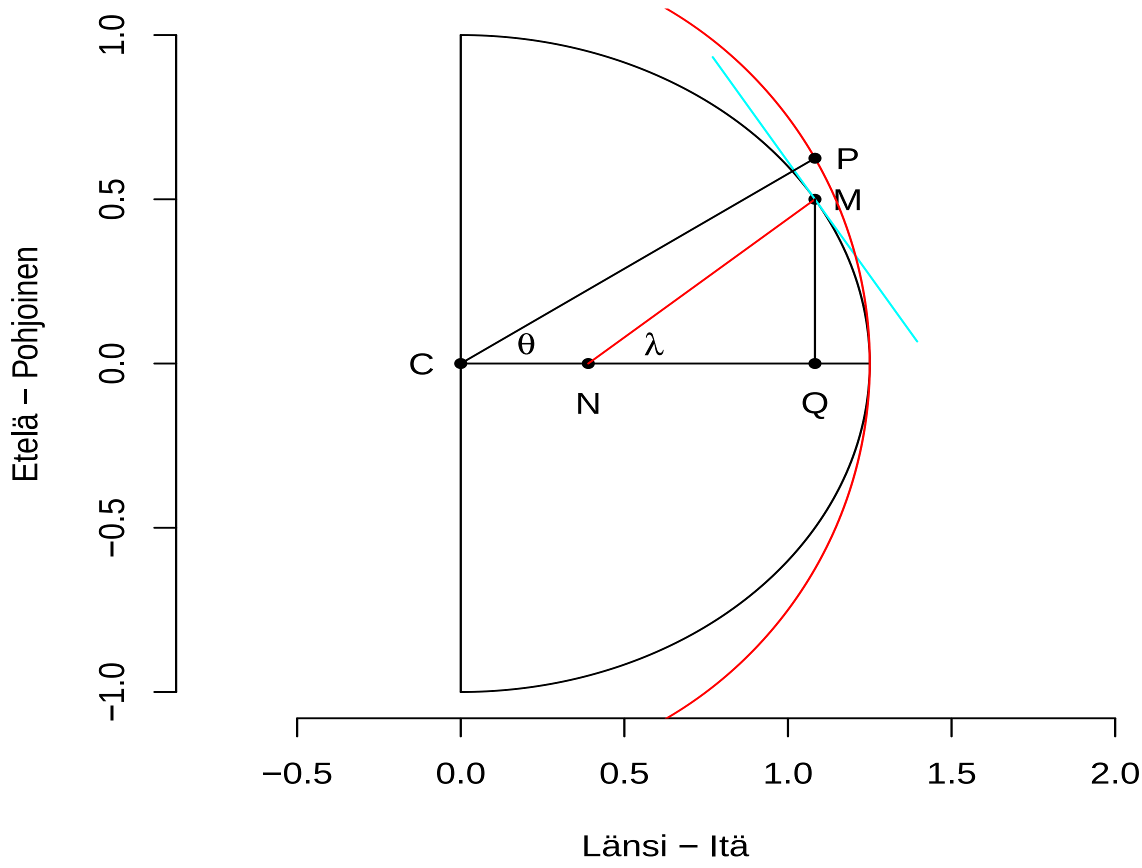
$$\begin{aligned} e'(\theta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}e(\theta) = (-b\sin\theta, a\cos\theta), \\ t(x) &= e(\theta_0) + xe'(\theta_0), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Tämän tangentin normaali saadaan suntavektorin $e^{\perp}(\theta_0)$ avulla, joka on kohtisuorassa vektoria $e'(\theta)$ vastaan. Valitaan $e^{\perp}(\theta_0) = (a\cos\theta_0, b\sin\theta_0)$. Paikan M kautta kulkeva normaali on suora

$$u(x) = e(\theta_0) + xe^{\perp}(\theta_0) = e(\theta_0) + x(a\cos\theta_0, b\sin\theta_0), \quad -\infty < x < \infty.$$

Tämä suora leikkaa ellipsin vaaka-akselin, kun $x = -a/b$. Siis aikaisemmin määritelty N on näillä merkinnöillä

$$N = \left(\left(b - \frac{a^2}{b}\right)\cos\theta_0, 0\right).$$



Kuva 1: Musta puoliympyrä on Maan itäinen puolisko poikkileikkauksena akselin suhteen. Paikan M maantieteellinen leveysaste on λ ja redukoitu leveysaste θ.

Määritellään vielä piste Q, joka on paikan M projektio Maan akselin suunnassa Päiväntasaajatasoon, joten $Q = (b\cos\theta_0, 0)$. Käytetään nyt vektorin V pituudelle l. normille merkintää $||V||$.

Näillä merkinnöillä leveysasteelle λ pätee

$$\begin{aligned}\sin^2\lambda = \frac{||M-Q||^2}{||M-N||^2} &= \frac{a^2\sin^2\theta_0}{\frac{a^4}{b^2}\cos^2\theta_0 + a^2\sin^2\theta_0} \\ &= \frac{\sin^2\theta_0}{\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0} \\ \cos^2\lambda = \frac{||Q-N||^2}{||M-N||^2} &= \frac{\frac{a^4}{b^2}\cos^2\theta_0}{\frac{a^4}{b^2}\cos^2\theta_0 + a^2\sin^2\theta_0} \\ &= \frac{\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_0}{\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0}.\end{aligned}$$

Nyt voimme kirjoittaa lausekkeen (1) nimittäjän neliöön korotettuna muotoon

$$\begin{aligned}n^2\cos^2\lambda + \sin^2\lambda = \frac{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0}{\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0} &= \frac{1}{\frac{1}{n^2}\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0} \\ &= \frac{b^2}{a^2\cos^2\theta_0 + b^2\sin^2\theta_0}.\end{aligned}$$

Lauseke (1) voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\frac{a/n}{\cos\lambda\sqrt{n^2+\tan^2\lambda}} = \frac{a^2}{b^2}\sqrt{a^2\cos^2\theta_0 + b^2\sin^2\theta_0}\,, \qquad (2)$$

joka on verrannollinen paikan M kautta kulkevan kohtisuoran suuntavektorin $e^{\perp}(\theta_0) = (a\cos\theta_0, b\sin\theta_0)$ normiin, sillä

$$||e^{\perp}(\theta_0)|| = \sqrt{a^2\cos^2\theta_0 + b^2\sin^2\theta_0}\,.$$

Planman ja Nordberg (Pla78, s. 14) johtavat geometrisin argumentein lausekkeen, joka tässä käytetyin merkinnöin on

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2\cos^2\lambda + a^2\sin^2\lambda}},$$

ja joka on myös verrannollinen painovoimaan paikassa M.

Maantieteellisen ja redukoidun leveysasteen liittää toisiinsa kaava (Ver14, vrt. s. 97)

$$\tan\lambda = \frac{a\sin\theta}{\frac{a^2}{b}\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta.$$

Voidaan määritellä myös geosentrinen leveysaste, jota kuvaan ei ole piirretty. Se on kulma, jonka jana Maan keskipisteestä pisteeseen M muodostaa Päiväntasaajan kanssa. Jos sitä merkitään β:lla, niin, niin helposti nähdään, että

$$\tan\beta = \frac{a}{b}\tan\theta = \frac{a^2}{b^2}\tan\lambda.$$

Tutkielman lähtökohta, missä oletetaan, että painovoima on verrannollinen lausekkeeseen (1) ei pidä paikkaansa aivan täsmälleen. Somiglianan ja Pizzettin kaava (Ver14, s. 104) antaa painovoiman γ mielivaltaisessa paikassa M. Redukoidun leveysasteen funktiona kaava on

$$\gamma = \frac{b\gamma_p \sin^2\theta + a\gamma_e \cos^2\theta}{\sqrt{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}} \tag{3}$$

ja sijoittamalla $\tan\theta = \frac{a}{b}\tan\lambda$ saamme sen leveysasteen funktiona

$$\gamma = \frac{b\gamma_e \cos^2\lambda + a\gamma_p \sin^2\lambda}{\sqrt{b^2\cos^2\lambda + a^2\sin^2\lambda}}. \tag{4}$$

Hällströmin ja Appelgrenin väite olisi tosi jos kaavassa (4) osoittaja olisi vakio. Tämä puolestaan johtaa siihen, että täytyisi olla

$$b\gamma_e = a\gamma_p \Leftrightarrow \frac{b}{a} - \frac{\gamma_p}{\gamma_e} = 0. \tag{5}$$

Määritellään

$$p = \frac{a\gamma_p}{b\gamma_e} - 1 \text{ ja } e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}.$$

Silloin

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + p\sin^2\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}}.$$

Edelleen Hällströmin ja Appelgrenin olettaman (5) perusteella olisi $p = 0$. Koska e^2 on pieni, saamme approksimaation

$$\gamma \approx \gamma_e(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\lambda).$$

Kuten aikaisemminkin paikan M tangenttitason meridiaanin suuntainen vektori on $e'(\theta) = (-b\sin\theta, a\cos\theta)$, jonka normaali on $e^\perp(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$. Merkitään kahden vektorin $u = (u_1, u_2)$ ja $v = (v_1, v_2)$ sisätuloa $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$. Painovoimakaavaan (3) liittyen määritellään vektori $g_r(\theta) = (\gamma_e\cos\theta, \gamma_p\sin\theta)$ ja sen projektio aliavaruudelle, jonka vektori $e^\perp(\theta)$ virittää (so. origon kautta kulkevalle suoralle). Helppo lasku osittaa, että tämän projektion

$$q(\theta) = \frac{g_r(\theta)\cdot e^\perp(\theta)}{||e^\perp(\theta)||^2} e^\perp(\theta)$$

normi on

$$||q(\theta)|| = \frac{|g_r(\theta)\cdot e^\perp(\theta)|}{||e^\perp(\theta)||^2}||e^\perp(\theta)|| = \frac{|g_r(\theta)\cdot e^\perp(\theta)|}{||e^\perp(\theta)||} = \frac{b\gamma_p\sin^2\theta + a\gamma_e\cos^2\theta}{\sqrt{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}} = \gamma.$$

Vastaavasti kaavaan (4) liittyen voidaan määritellä $f(\lambda) = (b\cos\lambda, a\sin\lambda)$ sekä $g_l(\lambda) = (\gamma_e\cos\lambda, \gamma_p\sin\lambda)$. Nyt vektorin $g_l(\lambda)$ projektio $f(\lambda)$:n virittämälle aliavaruudelle on

$$r(\lambda) = \frac{g_l(\lambda)\cdot f(\lambda)}{||f(\lambda)||^2} f(\lambda),$$

jonka normi on

$$||r(\lambda)|| = \frac{b\gamma_e \cos^2 \lambda + a\gamma_p \sin^2 \lambda}{\sqrt{b^2 \cos^2 \lambda + a^2 \sin^2 \lambda}} = \gamma.$$

Gravimetriset arvot GRS80-vertausellipsoidilla (Ver14, s. 125-126) ovat

$$\begin{aligned} a &= 6356752{,}31414\ m, \\ b &= 6378137\ m, \\ \gamma_e &= 9{,}7803267715\ m/s^2, \\ \gamma_p &= 9{,}8321863685\ m/s^2. \end{aligned}$$

Näillä arvoilla

$$\frac{\gamma_p}{\gamma_e} - \frac{b}{a} = 0.00193835,$$

joten tutkielman lähtökohta on likimäärin oikein.

Taulukko 1: **Tutkielman lähtötiedoista uudelleen lasketut heilurin pituudet ja niiden virhearviot.**

Paikkakunnat		Heilurin pituus Pohjoisnavalla	Arvioitu virhe
Upsala	Hyväntoivonniemi	441,3965	0,0433
Huippuvuoret	Gotha	441,4481	0,0235
Upsala	Wien	441,3997	0,0729
Wien	Hyväntoivonniemi	441,3896	0,0933
Huippuvuoret	Rooma	441,4442	0,0225
Kuressaari	Hyväntoivonniemi	441,4218	0,0472
	Keskiarvo	441,4166	
	Painotettu keskiarvo	441,4275	

Viitteet

[Cla43] Clairaut, M.: *Theorie de la Figure de la Terre*. David Fils, Paris, 1743. https://www.irphe.fr/~clanet/otherpaperfile/articles/Clairaut/N0062579_PDF_1_352.pdf.

[Lap02] Laplace, P. S. de: *Mechanik des Himmels*, Teil 2. La Garde, Berlin, 1802. Übersetzt von J. C. Burckhardt. https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/449281.

[Pla78] Planman, M. & Nordberg, I.: *Figura telluris, pendulorum ope definienda*. Pro Gradu Philosophico, Academia Aboænsis, Junius 1778. http://urn.fi/URN:NBN:fi-fd2014-00003843.

[Ver14] Vermeer, M. & Rasila, A.: *Maailman kartta — johdatus matemaattiseen geodesiaan*. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry., Helsinki, 2014.

[Wal67] Wallenius, M. J. & Mattheiszen, T.: *Resolvuntur nonnulla problemata, posita figura telluris ellipsoidica*. Pro Gradu Philosophico, Academia Aboænsis, November 1767. http://urn.fi/URN:NBN:fi-fd2014-00006074.