AKATEEMINEN VÄITÖSKIRJA

MAAN MUODON MÄÄRITTÄMISESTÄ HEILUREIDEN AVULLA

Osa I

PUHEENJOHTAJA

M. GUST. GABR. HÄLLSTRÖM

FILOSOFIAN MAISTERIN ARVON SAAVUTTAMISEKSI

RESPONDENTTI

ABRAHAM REILIN

Matematiikan auditoriossa 30. toukokuuta 1810

TURKU

Latinasta suomentanut
Jukka Nyblom
6. toukokuuta 2019

Meidänkin aikamme parhaat matemaatikot ovat yhteisin ponnistuksin tutkineet tuota kuuluisaa kysymystä Maan muodosta ja suuruudesta, josta jo taannoin vanhoina aikoina on kiistelty. Heidän mielestään voidaan käyttää kahta periaatetta, joiden varassa välttämättömät laskut on tässä suhteessa tehtävä. Maan pituuspiirien eli meridiaanien astemittaukset[1] on otettu ensijaiseksi ja pääasialliseksi menetelmäksi. Toinen menetelmä sen sijaan perustuu eri puolilta maailmaa hankittujen yksinkertaisten sekuntiheilurien[2] pituuksiin. Samaan lopputulokseen pääsemiseksi tämä jälkimmäinen menetelmä voidaan korvata hankkimalla paikkakunnittain jonkin vakioheilurin[3] heilahdusten lukumäärät kiinteällä aikavälillä. Korkeasti oppineet matemaatikot ovat toki tulleet monista syistä vakuuttuneiksi siitä, että Maan muoto poikkeaa hiukan pallomaisesta. He ovat päätyneet arvelemaan, että se on likimäärin lyhyemmän akselinsa ympäri pyörähtäneen ellipsin kaltainen litistynyt ellipsoidi, mistä seuraa, että he ovat voineet määrittää Maan akselit kahdesta kaaresta syntyvän ellipsin avulla. Mutta kun useita tuollaisia mittauksia on keskenään vertailtu, on saatu vaihtelevia arvoja Päiväntasaajan halkaisijan ja Maan akselin suhteelle. Tästä on tehty johtopäätös, että joko Maa ei ole pyörähdyskappaleen muotoinen, tai meridiaanikaarien yksittäin tehdyt mittaukset eivät ole olleet riittävän päteviä varmistamaan johtopäätöstä Maan elliptisyydestä. Epäilyä Maan ellipsoidin muodosta onkin lisännyt se, että sen määrittämiseksi mittauksia on tähän asti tehty enimmäkseen Euroopassa ja Amerikassa. Ne tuskin pelkästään riittävät kysymyksen ratkaisemiseksi. Kaivattaisiin toki joitakin pituuspiirien astemittauksia Aasiassa sekä lisäksi Päiväntasaajan kanssa rinnakkaisten leveyspiirien mittauksia. Toistaiseksi tässä asiassa on vain pitänyt tyytyä siihen, että olettamalla Maa ellipsoidin muotoiseksi johdettaisiin kaikista saatavilla olevista pituuspiirien astemittauksista todennäköisin arvo maan akselin ja Päiväntasaajan halkaisijan suhteelle. Toki kunnioitettu *La Place* (Lap02, 2. nide, s. 171) on jo määrittänyt sille arvon[4] 311/312. Kuuluisa *Svanberg* (Sva05, s. 185) korvasi vanhan arvon Lapissa äskettäin tehtyjen mittausten perusteella arvolla 322,065/323,065 tai jopa arvolla 323,28/324,28.

Toista menetelmää, jossa yksinkertaisen heilurin pituus muodostaa laskemisen perustan maan muodon määrittämiseksi, on käyttänyt erityisesti myös kunnioitettu *La Place*. Meridiaanien astemittausten perusteella hänen on täytynyt päätyä siihen, että Maan massa ei ole homogeeninen, vaan sen tiheys kasvaa kuljettaessa Maan pinnalta kohti keskipistettä. Hän on kuitenkin olettanut, että heilurin pituuden kasvu siirryttäessä Päiväntasaajalta kohti Maan napoja on verrannollinen sini-funktion neliöön, kun argumenttina on leveysaste.[5] Ellipsoidin muotoinen Maa likimäärin täyttää tä-

[1] Kahden peräkkäisen leveysasteen välisen meridiaanikaaren pituus. Suom. huom.

[2] Matemaattinen heilurin malli (lat. pendulum simplex), jossa kitkattomaan niveleen on kiinnitetty massaton varsi ja varren päähän pistemäinen paino. Lisäksi heilurin täydellinen heilahdus alkuasennosta toiseen ääriasentoon ja takaisin alkuasentoon kestää yhden sekunnin. Suom. huom. https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum

[3] Vakioheiluri (lat. pendulum invariatum tai pendulum invariabile) on oikea fyysinen heiluri. Suom. huom. https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum

[4] Tässä ja jatkossakin tämä suhde annetaan muodossa $(x-1)/x$, missä x lasketaan havaintomittausten avulla. Suom. huom.

[5] Jos p_0 ja p_1 ovat heilurin pituudet leveysasteilla l_0 ja l_1 vastaavasti, niin $p_1 - p_0 = \text{vakio} \cdot (\sin^2 l_1 - \sin^2 l_0)$. Suom. huom.

män ehdon. Kun sitten tämän perusteella etsitään Maan akselin pituuden ja Päiväntasaajan halkaisijan suhteen todennäköisintä arvoa, 15 erisuuruista heilurin pituutta (Lap02, s. 179. Suom. huom.) yhdessä antavat keskimääräiseksi arvoksi osamäärän 334,78/335,78 (Lap02, s. 182). Jos otaksumme, että on riittävää pitää Maan muotoa sellaisena, jollaiseksi sen useimmat laskelmaan mukaanotetut heilurihavainnot yhdessä osoittavat, ja että eri heilurihavainnoista tällä menetelmällä johdetut Maan elliptisyyden arvon ylitykset ja alitukset kumoavat toisensa, ei mitään tutkittavaa enää näytä jäävän jäljelle. Mutta jos haluamme kiinnittää tarkemmin huomiota Maan muodon poikkeamaan pyörähdysellipsoidista, on ilmeistä, että yksittäisten heilureiden pituuksien pitää erityisesti olla tarkastelun kohteena. Silloin kysymys suuntautuisi juuri sen tutkimiseen, millaiseen poikkeavuuteen havainnot viittaisivat, kun kaikkia Maan pituuspiirejä ei oletettaisi yhdenvertaisiksi ja samanlaisiksi. Jos sellaisesta poikkeavuudesta saataisiin riittävästi todisteita, tutkittaisiin millaisen Maan muodon eri havainnot tuottaisivat. Toki jo kuuluisa *Fredr. Mallet* on tehnyt tässä suhteessa heilureiden pituuksien parivertailuja, (Mal67a, s. 158 jne), (Mal67b, s. 193 jne.) ja (Mal72, 4. Cap. §24, s. 81 jne.). Mutta koska hänen hallussaan olleet havainnot olivat sekaisin, mikään korjausyritys ei palauttaisi keskenään vertailukelposia alkuperäisiksi, eikä hänen hallussaan ollut mitään keinoa torjua heilurihavaintojen liittämistä sattumalta vääriin tai sopimattomiin Maan pituuspiireihin. *Malletin* aineistosta ei voida saada selville, onko Maa muun kuin pyörähdysellipsoidin muotoinen. Mutta se näyttää hänen laskuistaan seuraavan, että joko on olemassa jonkinlainen poikkeama sellaisesta pallomaisesta muodosta, jollainen pituuspiirin pyörähtämisestä syntyy, tai jos tuota ei uskota, syntyvä ristiriita on johdettava havaintovirheistä.

Saadaksemme tietää maan muodon olemme arvelleet tässä vaiheessa vaivan arvoiseksi erityisen vertailun eri pituuspiirien välillä. Silloin tulisi varmasti tiedoksi, osoittautuvatko pituuspiirien yhteensopimattomuus ja erilaisuus sellaisiksi, että ne olisivat todella Maan ominaisuuksia eivätkä johtuisi jostakin väistämättömästä virheestä heilurihavainnoissa. Ennen kaikkea tässä tehtävässä on kuitenkin otettava huomioon, että heilureiden havaitut pituudet saatetaan samaan lämpötilaan ja samaan ilmanpaineeseen. Tätä varten ne voidaan saattaa vastaamaan pituutta tyhjiössä. Samalla arvioidaan lämmön vaihteleva vaikutus asianmukaisesti siinä yksikössä, jossa heilurin pituus on oikeasti mitattu. Hydrostatistiikan tunnetuista laeista seuraa ensinnäkin, että heilurin linssiä viivyttää sen syrjäyttämän ilman paino. Ilmassa linssi liukuu alas siinä määrin hitaammin kuin tyhjiössä, että yhden sekunnin heilahduksen korkeus on tyhjiössä suurempi kuin ilmassa. Kun otetaan ympyrän halkaisijan suhteelle sen piiriin merkintä[6] $1/\mu$ ja yhden sekunnin kestävän pudotuksen aloituskorkeudeksi tyhjiössä g ja ilmatilassa g', on selvää, että m asteen lämpötilassa tämän heilurin pituus

[6] Tavallisesti μ:n sijasta käytetään tunnetusti π:tä. Suom. huom.

tyhjiössä[7] on $p(m) = 2g/\mu^2$ ja ilmassa $p'(m) = 2g'/\mu^2$, joten

$$\frac{p(m)}{p'(m)} = \frac{g}{g'} \quad \text{eli} \quad p(m) = \frac{g}{g'}p'(m).$$

Korkeuksien g ja g' suhde on kappaleen painojen suhde tyhjiössä ja ilmassa. Siis kun oletetaan, että kappaleen absoluuttinen paino tyhjiössä on v, ja sen syrjäyttämän ilman paino on v/r, niin kappaleen paino tyhjiössä suhteessa sen painoon ilmassa on $v/(v - v/r)$. Tästä seuraa, että

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r}{r-1}, \quad \text{ja} \quad p(m) = \frac{rp'(m)}{r-1}.$$

Kun oletetaan, että heilurin linssin täsmällinen paino on tyhjiössä s ja sen syrjäyttämän ilman paino t, pätee $r = s/t$ ja

$$p(m) = \frac{s}{s-t}p'(m) = \left(1 + \frac{t}{s}\right)p'(m) \quad \text{likimäärin},$$

kun osamäärä t/s on riittävän pieni. Kuitenkin t vaihtelee tuntuvasti ilman lämpötilan ja ilmanpaineen mukaan, kun sitä vastoin s voidaan tässä olettaa vakioksi. Kun lämpötila on m Celsius-astetta ja ilmanpaine h Ruotsin tuumaa elohopeaa, pitää siis olla (ks. Häl09, s. 16)[8]

$$t = \frac{0{,}0000507\,h}{1 + 0{,}00375\,m}.$$

Heilurin pituuden korjattu arvo tyhjiössä saadaan kaavasta

$$p(m) = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1 + 0{,}00375\,m)s}\right)p'(m).$$

Barometrin lukeman vaihtelu 25–26,5 Ruotsin tuumaa, lämpötilan vaihtelu 0°–30° ja heilurin pituuden $p'(m)$ vaihtelu 439–441,5 Pariisin lineaa[9] antavat tämän korjauksen suuruudelle rajat 0,076 ja 0,064, kun heilurin linssi on kuparia, mutta rajat 0,052 ja 0,044, kun linssi on lyijyä. Siis yleisesti ei voida käyttää additiivista korjausta 0,063, jota kuuluisa *Hube* (Hub80, s. 26) on tässä tarkoituksessa ehdottanut.

[7] Jos vapaassa pudotuksessa kuljetaan yhden sekunnin aikana matka g tyhjiössä ja ilmatilassa vastaavasti matka g', niin putoamiskiihtyvyys on tyhjiössä on $2g$ ja ilmatilassa $2g'$. Perustelu löytyy myös tutkielmasta (Häl05, s. 4–5), johon tämän tutkielman alkuperäisessä versiossa ei viitata. Jos täyden heilahduksen (alkuasennosta toiseen ääriasentoon ja takaisin) kesto on T sekuntia, niin yksinkertaisen heilurin pituus p tyhjiössä saadaan (likimäärin) kaavasta $T = 2\mu\sqrt{p/(2g)}$, kun heilahduskaari on pieni. Ilmatilassa saadaan yksinkertaisen heilurin pituus p', kun g korvataan g':lla. Yllä annetut pituudet $p(m)$ ja $p'(m)$ saadaan, kun oletetaan, että $T = 2$ eli heilahduksen puolikas kestää 1 sekunnin. Suom. huom.
https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum

[8] Hällström ja Alcenius viittaavat Annalen der Physik -sarjaan 1807, B. 25, St. 4. s. 362, 395, 401 ja perustavat ilmeisesti kaavansa havaintoihin, joita ovat tehneet Louis-Joseph Gay-Lussac, Jean-Baptiste Biot ja François Arrago. Suom. huom.

[9] V. 1799 määriteltiin, että 1 metri on 443,296 Pariisin lineaa. Suom. huom.
https://en.wikipedia.org/wiki/Toise

Koska lämmön vaikutus ulottuu niin heilurin pituuteen kuin myös siihen mittaan, jolla mitataan, on vaivatonta samanaikaisesti tarkastella kummankin venymisiä ja supistumisia, jotta saataisiin heilurin todellinen pituus korjattua johonkin normilämpötilaan. Sellaiseksi voidaan tarkoituksenmukaisimmin valita veden jäätymislämpötila. Oletetaanpa nyt, että mitta, joka lämpötilassa 0° on 1, on m asteen lämpötilassa $1+\psi(m)$. Edelleen oletetaan, että tyhjiössä ja 0° asteessa heilurin pituus on $p(0)$. Silloin m asteen lämpötilassa sen pituus on $(1+\phi(m))p(0)$. Koska tietysti molemmissa mittauksissa mitan pituuden täytyy olla 1, niin lämpötilassa m heilurin pituus täytyy suhteuttaa mitan muutokseen $1+\psi(m)$, joten

$$p(m) = \frac{1+\phi(m)}{1+\psi(m)}p(0).$$

Jos kahta pituudelle $p(m)$ jo kehitettyä arvoa keskenään verrataan, saadaan

$$\frac{1+\phi(m)}{1+\psi(m)}p(0) = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s}\right)p'(m),$$

mistä seuraa, että tyhjiössä ja 0 asteen lämpötilassa yhden sekunnin heilahduksia tekevän yksinkertaisen heilurin pituus on

$$p(0) = \frac{1+\psi(m)}{1+\phi(m)}\left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s}\right)p'(m).$$

Koska yksinkertaisen heilurin pituus lasketaan eri paikoissa jonkin vakioheilurin avulla, on jälkimmäiseenkin tehtävä jonkinlainen korjaus. Oletetaan, että annetun vakioheilurin pituus lämpötilassa m astetta on $q(m)$, ja edelleen, että lämpötilassa m tämä heiluri tekee yhden sekunnin aikana $M'(m)$ heilahdusta. Heilureiden teorian mukaan yksinkertaisen heilurin pituus tällaisessa ilmatilassa[10] on $p'(m) = q(m)M'(m)^2$. Jos tämän heilurin heilahdusten lukumäärä tyhjiössä ja samassa lämpötilassa on $M(m)$, on tyhjiössä heilahtelevan yksinkertaisen heilurin pituus $p(m) = q(m)M(m)^2$. Näistä seikoista seuraa, että

$$\frac{M'(m)^2}{M(m)^2} = \frac{p'(m)}{p(m)} \quad \text{eli} \quad M(m)^2 = \frac{p(m)}{p'(m)}M'(m)^2.$$

Kun siis tehdään sijoitus

$$\frac{p(m)}{p'(m)} = 1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s},$$

joka on aikaisemmin johdettu, saadaan arvo

$$M(m)^2 = \left(1 + \frac{0{,}0000507\,h}{(1+0{,}00375\,m)s}\right)M'(m)^2.$$

[10]Kun määritellään vakioheilurin pituus kaavana $q = I/(aR)$, missä I on heilurin hitausmomentti nivelen suhteen, a on heilurin massa ja R nivelen etäisyys heilurin painopisteestä, niin $q(m)$ toteuttaa alaviitteen 7 yhtälön, kun siihen sijoitetaan $p = q(m)$, $T = 1/M'(m)$ ja $g = g'$. Saamme ratkaisuksi $q(m) = 2g'/[\mu M'(m)]^2$. Toisaalta kun yksinkertaisen heilurin heilahduksen puolikas kestää yhden sekunnin, sen pituus on $p'(m) = 2g'/\mu^2$. Näistä seuraa, että $p'(m)/q(m) = M'(m)^2$. Suom. huom. https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum

Toisessa paikassa maan pinnalla, missä yhden sekunnin aikana tämä heiluri heilahtaa m' asteen lämpö-ja ilmatilassa $N'(m')$ kertaa ja tyhjiössä vastaavasti $N(m')$ kertaa, samanlainen päättely johtaa barometrin arvolla h' tulokseen

$$N(m')^2 = \left(1 + \frac{0{,}0000507\, h'}{(1 + 0{,}00375\, m')s}\right) N'(m')^2.$$

Aivan niin kuin tyhjiössä m asteen lämpötilassa pätee, että $p(m) = q(m)M(m)^2$, 0 asteen lämpötilassa on voimassa $p(0) = q(0)M(0)^2$. Koska pitää olla[11] $p(m) = p(0)$, pätee myös $q(m)M(m)^2 = q(0)M(0)^2$, mistä seuraa

$$\frac{M(m)^2}{M(0)^2} = \frac{q(0)}{q(m)}.$$

Edellä esitetyn perusteella osamäärä $q(0)/q(m)$ on yhtä kuin $1/(1 + \phi(m))$, mistä seuraa $M(0)^2 = (1 + \phi(m))M(m)^2$. Kun $M(m)^2$, joka äsken määritettiin, sijoitetaan tähän, saadaan vihdoin tyhjiökorjatun ja 0 asteeseen muunnetun vakioheilurin heilahtelujen lukumäärälle kaava

$$M(0)^2 = (1 + \phi(m)) \left(1 + \frac{0{,}0000507\, h}{(1 + 0{,}00375\, m)s}\right) M'(m)^2.$$

Samalla tavalla saadaan toisen lämpötilan m' ja barometrin arvon h' avulla heilahtelujen lukumääräksi tyhjiössä ja 0 asteen lämpötilassa

$$N(0)^2 = (1 + \phi(m')) \left(1 + \frac{0{,}0000507\, h'}{(1 + 0{,}00375\, m')s}\right) N'(m')^2.$$

Otetaan merkinnät $p(0)$ ja $\pi(0)$ yksinkertaisten heilureiden pituuksille kahdessa eri paikassa, kun molemmat on tyhjiökorjattu ja muunnettu 0 asteeseen. Silloin on voimassa[12]

$$\begin{aligned} \frac{p(0)}{\pi(0)} &= \frac{M(0)^2}{N(0)^2}, \\ \pi(0) &= p(0) \left(\frac{N'(m')}{M'(m)}\right)^2 \frac{1 + \phi(m')}{1 + \phi(m)} \frac{1 + \frac{0{,}0000507\, h'}{(1+0{,}00375\, m')s}}{1 + \frac{0{,}0000507\, h}{(1+0{,}00375\, m)s}}. \end{aligned}$$

[11] Kuten aikaisemmin jo todettiin, heilurin linssin paino oletettiin tyhjiössä vakioksi s, johon ei lämpötila vaikuta. Suom. huom.

[12] Koska samalla vakioheilurilla on tehty mittauksia kahdella paikkakunnalla, pätee $p(0) = q(0)M(0)^2$ ja $\pi(0) = q(0)N(0)^2$. Alkuperäisen tutkielman viimeisessä kaavassa on $N'(m')/M'(m')$, kun pitää olla sen neliö kuten yllä. Suom. huom.

Viitteet

[Häl05] Hällström, G. G. & Appelgren, A. S.: *De longitudine penduli simplicis pro Aboa determinanda.* Pro Gradu Philosophico, Academia Aboænsis, Junius 1805.
http://urn.fi/urn:nbn:fi:fv-12625.

[Häl09] Hällström, G. G. & Alcenius, J. D.: *De pondere corporum specifico ad normalem gradum caloris reducendo.* Pro Gradu Philosophico, Academia Aboænsis, December 1809.
http://urn.fi/urn:nbn:fi:fv-12628.

[Hub80] Hube, M.: *De Telluris forma.* Michalis Gröll, Varsavia, 1780.
http://opacplus.bsb-muenchen.de/title/BV001527909/ft/bsb10133933?page=3.

[Lap02] Laplace, P. S. de: *Mechanik des Himmels*, Teil 2. La Garde, Berlin, 1802. Übersetzt von J. C. Burckhardt.
https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/449281.

[Mal67a] Mallet, F.: *Nogaste uträkning på jordens rätta figur, genom pendel-försöks jämförelser.* Svenska Vetenskaps Academiens Handlingar för år 1767, XXVIII: 158–163, Aprilis, Majus, Junius 1767.
https://biodiversitylibrary.org/page/46723044.

[Mal67b] Mallet, F.: *Nogaste uträkning på jordens rätta figur, genom pendel-försöks jämförelser.* Svenska Vetenskaps Academiens Handlingar för år 1767, XXVIII: 193–209, Julius, Augustus, September 1767.
https://biodiversitylibrary.org/page/46723044.

[Mal72] Mallet, F.: *Matematisk beskriftning om jordklotet*. Upsala, 1772.

[Sva05] Svanberg, J.: *Exposition des opérations faites en Lapponie pour la détermination d'un arc du méridien, en 1801–1803.* L'académie des sciences, Stockholm, 1805.
https://archive.org/details/TO0E037814_TO0324_PNI-2547_000000/page/10.