AKATEEMISEN VÄITÖSKIRJAN

MAAN MUODOSTA JA KOOSTA MERIDIAANIKAARIEN PITUUKSIEN PERUSTEELLA

TARJOAVAT JULKISEEN TARKASTUKSEEN

HENRIK JOHAN WALBECK

JA

FREDRIK WILHELM BRUMMER

Filosofian auditoriossa 27. helmikuuta 1819

TURUSSA

Latinasta suomentanut
Jukka Nyblom
6. maaliskuuta 2020

1.

Niin kuin kaikkien empiiristen suureiden määrityksiä on pidettävä vain likiarvoina, suunnilleen samalla tavalla Maan muotoa ja kokoa on vähitellen yhä täydellisemmin tutkittu. Kaikkein oppineimpien astronomien ja matemaatikkojen tutkimuksia on tästä asiasta todella paljon olemassa, joten ehkä kerta kaikkiaan nähdään hyödyttämäksi lisätä niihin mitään uutta. Emme olisi kynään tarttuneetkaan näiden sivujen kirjoittamiseksi, ellemme olisi innostuneet näkemään, mitä tuo etevimmän astronomin GAUSSIN nerokas todennäköisyyden teoria[1] saa luotettavasti tai ainakin todennäköisesti aikaan tässä tärkeässä asiassa. Tietääksemme ei kukaan ole vielä sitä soveltanut tämän ongelman ratkaisemiseksi. GAUSSIN menetelmän avulla ei saada esiin pelkästään tuntemattomien todennäköisiä arvoja vaan myös niiden suhteellinen tarkkuus, jopa absoluuttinen tarkkuus, jos havaintojen määrä on suuri, ja jos on lupa olettaa, etteivät systemaattiset virheet niihin vaikuta.[2] Nykyisin tällaisten tutkimusten kannalta tarpeellinen aineisto lisääntyy melkein päivittäin. Siten esim. uusimmissa Aasiaa koskevissa efemerideissä[3] olemme huomanneet kerrotun, että W. Lambton on hiljattain tehnyt Intian itäosassa erinomaisia mittauksia, jotka ulottuvat 77. pituuspiirin taakse[4] ja jotka ovat suuriarvoisia Maan oikean muodon määrittämisessä.

2.

On huomattava, että yleisen vetovoiman seurauksena useat ilmiöt edellyttävät Maan elliptisyyden olevan suunnilleen välillä $\frac{1}{300} - \frac{1}{330}$. Tosin tätä yhdenmukaisuutta ei yleensä ole löydetty pituuspiirin kaarien vertailukelpoisissa mittauksissa. Tämä oli tavallista varsinkin astemittausten vanhoissa vertailuissa. Vaikka ne osoittivat Maan muodon navoilta litistyneeksi, tämä ellipsoidin muotoiseksi oletettu litistyminen osoittautui kuitenkin kerta toisensa jälkeen hyvinkin vaihtelevaksi meridiaanin (l. pituuspiirin) kaarenpituuksia pareittain verrattaessa. DELAMBREN, MECHAININ ym. Ranskassa tekemässä uusimmassa mittauksessa, joka on tehty varsinaisesti uuden ranskalaisen mittasysteemin määrittelemiseksi, ja MUDGEN melkein samaan aikaan Englannissa tekemässä mittauksessa meillä on todisteita, jotka herättävät epäilyn, että Maan muoto poikkeaa suuresti säännöllisestä ellipsoidista. Sillä tuon Ranskan mit-

[1] *Ilmeinen viittaus teokseen* (Gau09). *Suom. huom.*

[2] Suora lainaus (Nic16, s. 306): ”Jetzt wo die Probabilitäts Theorie und ihre Anwndung auf astronomische Beobachtungen und Rechnungen sehr ausgebildet worden ist, sollte man eigentlich keine astronomische Bestimmung mehr machen, ohne zugleich den Grad der Wahrscheinlichkeit zu entwickeln, welchen man beizulegen berechtigt ist. Erst dadurch erhält die ganze Untersuchung einen wahren Werth, indem auf diese Weise theils in den Stand gesetzt werden beurtheilen, wie viel man sich auf die gemachte Bestimmung überhaupt zu verlassen habe, theils auch erfahren, *welches* unter den verschiedenen Elementen sich mit vorzüglicher Schärfe aus den vorhandenen Datis herleiten lasse. Alle Willkührlichkeiten werden auf diese Art verbannt und man hat nicht nötig, bei der Bestimmung der wahscheinlichen Grenzen der wahren Werthe der Elemente Hypothesen zu ergreifen, welche von der Art sind, dass babei unvermeidlicher Weise jeder seine eigene Ansicht haben muss.” *Suomennos liitteessä 1.*

[3] *Ks.* https://fi.wikipedia.org/wiki/Efemeridi *Suom. huom.*

[4] *Alkuperäisessä tutkielmassa on* 7°, *mutta jäljempänä ilmenee, että* LAMBTONIN *mittausten pituuspiirit ovat* 77° 40′ *ja* 79° 47′ *itäistä pituutta. Suom. huom.*

tauksen perusteella litistyminen on noin[5] $\frac{1}{150}$ (Lap02, T. II s. 173)[6], kun sitä vastoin Englannin meridiaanin mittaus tuotti litistyneisyydeksi noin $-\frac{1}{55}$ (Lin06, s. 142)[7]. Millaista luottamusta nämä osittaiset määritykset nauttivat (vaikka onkin vaikeaa myöntää niiden osoittavan mitään todellista Maan muotoa), kun niitä ei juurikaan voi sijoittaa virherajojensa ulkopuolelle[8]. Tämän tulemme jatkossa näkemään, sillä meidän ensisijainen tarkoitus on tutkia yleisesti kaikkien edellisen vuosisadan puolivälin jälkeen tehtyjen astemittausten perusteella Maan muotoa ja suuruutta sekä mittausvirheiden todennäköisä rajoja. Olettamusta Maan säännöllisestä ellipsoidin muodosta eli pituuspiirien elliptisyydestä ei ole hyväksyttävä ennen kuin on osoitettu, että laskuissa ja havainnoissa olevat erot ja virheet ovat tulleet korjatuiksi. Toki meilläkin on ollut erityinen syy tälle tutkimukselle, nimittäin se, että parallaksin laskuissa meillä olisi jotakin varmaa tietoa Maan elliptisyydestä, jonka uudet kuutaulut olettavat välille $\frac{1}{300} - \frac{1}{330}$ (siis jättävät parallaksin[9] vakioisen arvon määrittämättä).

3.

Rodriguez (Rod17) teki aivan äskettäin astemittausten vertailuja, jotka näyttävät meistä muuten erittäin tyylikkäiltä lukuun ottaamatta sitä, että hän rakensi laskunsa hyvin harvoille mittauksille. Hän ei liioin määrittänyt esiin kaivamiensa arvojen lopullista tarkkuutta, koska hän ei tuntenut Gaussin teoriaa[10]. Jos otetaan huomioon vanhojen mittausten suhteellinen havaintotarkkuus, vähintäänkin voidaan odottaa, että laskujen perusteella tehtyjen johtopäätösten oikellisuus tulee kasvamaan. Suuremmasta havaintojoukosta on varmasti odotettavissa sellaista hyötyä, että vaikka mittaustarkkuuden rajoista tulisi laajempia, niistä tulisi vastaavasti luotettavampia. Useimmat ovat uskoneet ja edelleen uskovat, että paikalliset syyt kuten meridiaanin erilainen muoto, vuorten vetovoima yms. voivat selittää usein havaittuja poikkeamia. Mutta vaikka emme yleisesti kiellä tällaisten syiden mahdollisuutta, on kuitenkin ilmeistä, että nämä poikkeamat voitaisiin paremminkin lukea havaintojen tai laitteiden vioiksi, koska myös tuoreimmat havainnot ovat kyllin hyvin osoittaneet tarkkojen

[5] Delambre sai tulokseksi $\frac{1}{180}$ (Del14, T. III s. 572)

[6] *Oikeastaan* Laplace *saa arvon* 1/150,6 *ja laskee sen pienimmän maksimaalisen virheen menetelmällä. Suom. huom.*

[7] *Walbeck ja Brummer eivät mainitse, että laskelman on tehnyt kamarineuvos* von Lindenau, *joka viittaa Legendren pienimmän neliösumman esitykseen (Leg05) ja yrittää soveltaa sitä Englannin meridiaanien pituuksiin. Hän ei kuitenkaan onnistu soveltamaan Legendren teoriaa oikein, sillä Legendren tapaan laskemalla litistyneisyydeksi tulee* $-\frac{1}{123}$. *Samassa artikkelissaan von Lindenau laskee litistyneisyyden myös toisen aineiston ja Boscovichin approksimaation avulla. Tämä jälkimmäinen aineisto sisältää osin samoja mittauksia, joita myös Walbeck ja Brummer käyttävät. Näissä jälkimmäisissä laskuissa von Lindenau tekee laskut Laplacen ehdottamalla menetelmällä, missä virheiden itseisarvojen summa minimoidaan ehdolla, että niiden summa on nolla. Hän saa litistyneisyyden arvoksi* 1/304. *Ks. Liite 2. Suom. huom.*

[8] Laplace *kirjoittaa, että hänen saamansa arvo* $\frac{1}{150{,}6}$ *ei mitenkään voi olla sopusoinnussa sen paremmin painovoimateorian kuin akselinsa ympäri pyörivän kappaleen prekession ja nutaation kanssa.* Von Lindenau *kirjoittaa, että hänen saamansa tulos* $-\frac{1}{55}$ *herättää mitä suurinta kummastusta. Ks.* https://fi.wikipedia.org/wiki/Prekessio ja https://fi.wikipedia.org/wiki/Nutaatio *Suom. huom.*

[9] *Ks.* https://fi.wikipedia.org/wiki/Parallaksi *Suom. huom.*

[10] *Tässäkin viitataan luultavasti Gaussin teokseen (Gau09). Suom. huom.*

havaintojen riippuvan mitä suurimassa määrin havaintoinstrumentin laadusta[11,12].

Mitä pidemmälle astronomian hyödyntäminen on edistynyt, sitä vaikeampia hienosyisiä rajanvetoja on ilmaantunut runsaista havainnoista huolimatta. Koska virheiden moninaiset lähteet ovat vaivoin tunnistettavissa, virheiden vaikutus ulottuu usein yleisesti omaksuttuihin havaintoihin asti. Virheiden korjaaminen on vaikeaa, koska samoissa olosuhteissa tehdyn hyvin suurenkaan havaintosarjan avulla niitä ei voida paljastaa eikä eliminoida. Siis suuri määrä keskenään hyvin yhteensopivia havaintojakaan ei juurikaan todista tehdyn mittauksen lopullista luotettavuutta, ellei paneuduta pysyvien virhelähteiden tutkimiseen.

4.

Jos me jatkossa saamme tietää, että sama elliptisyys ja Päiväntasaajan halkaisija[13] voivat tuottaa kaikki, etenkin viimeaikaiset, mittaustulokset, niin silloin virheet astronomisissa suureissa eivät ole odotettua suurempia, vaikka toisaalta vanhojen laitteiden käyttö ei tee näitä virheitä täysin epätodennäköisiksi. Kovasti ilmenee yksinkertaisia periaatteita, jotka määräävät hylkäämään hypoteesin säännöllisestä elliptisestä muodosta, etenkin kun sitä on sovellettu yleisen painovoiman ja meren tasapainon teoriaan. Mutta jo alun alkaen on jo ollut havaittavissa, ettei maan muodossa ylipäätään ole odotettavissa säännöllistä jatkuvuutta. Kokemus osoittaan selvästi, että mantereet eivät ole homogeenisia, vaan mitä kauempana valtamerestä ne sijaitsevat sitä korkeampia ne ovat. Tämän takia asiantuntijoiden on tapana palauttaa mittaukset merenpinnan tasoon. Bouguerin Chimborazolla[14], Maskelynen Schiehallionilla[15] ja v. Zachin Mont Mimetissa[16] tekemät kokeet ovat huomionarvoisia toisin kuin ne poikkeamat, jotka herra Mechain kohtasi Barcelonan Montjouissa[17,18]. Mutta tämän

[11] Eräät astronomit vain vaivoin myöntävät 13 sekunnin virheen Maupertuisin Lapissa mittaaman kaaren pituudessa ja sen takia arvelevat, että on hyväksyttävä joko elliptisyyden arvo $\frac{1}{180}$ tai vuorten vetovoiman häiriövaikutus. Tämän selityksen kanssa on kuitenkin ristiidassa äskeinen Svanbergin mittaus, joka on paljon paremmalla laitteella tehty ja sopii hyvin yhteen Maan säännöllisen muodon kanssa, ja johon samojen vetovoimien olisi pitänyt vaikuttaa, jos olisivat olleet olemassa. Lisäksi uuden retkikunnan johtaja osoitti tutkimuksillaan, ettei sellaisia poikkeamia esiintynyt sillä nimenomaisella paikalla. (Koska tämä ero on kuitenkin jollakin tavalla selitettävä eikä Tornion leveysastetta pidä kyseenalaistaa, pitää ehkä epäillä Maupertuisin zeniittimittauksen kohtisuoruutta kaaren pohjoisrajalla Kittilässä.) Tiedämme, että usein virheitä on pantu vuorten vetovoiman syyksi, kun tosiasiassa havaintojen tekijää pitäisi arvioida. Sitenhän P. Schieg selitti Reichenbachin laitteen lukemakehällä löydetyn 16 sekunnin virheen, mutta mistä syystä (Zac12, s. 330.)

[12] *Alkuperäisessä tutkielmassa on virheellisesti nimi* Schiegg *ja sivunumero* 530. Schieg *ehdottaa virhelähteeksi Baijerin vuoriston aiheuttamaa vetovoimaa, mutta Monatliche Correspondenz -sarjan julkaisija* v. Zach *väittää, että on vähintäänkin epätodennäköistä, että vuoristomassa aiheuttaisi niin suuren (16 sekunnin) vaikutuksen. Hänen mukaansa taustalla on useita syitä. Suom. huom.*

[13] *Tarkoittanee olettamusta, että Maa on pyörähdysellipsoidi. Suom. huom.*

[14] *Tulivuori Andeilla. Suom. huom.* https://en.wikipedia.org/wiki/Chimborazo

[15] *Vuori Skotlannissa. Suom. huom.* https://en.wikipedia.org/wiki/Schiehallion

[16] *Kunta Ranskassa Marseillen lähistöllä. Suom. huom.* https://fr.wikipedia.org/wiki/Mimet

[17] *Kukkula Barcelonassa. Suom. huom.* https://en.wikipedia.org/wiki/Montjuïc

[18] Viimeisimmän esimerkin sellaisesta poikkeamasta saa nahdäkseen Zachin ja Inghiramin tekemisistä Pisassa, missä 120 Pohjantähden yläkulminaation mittauksesta on johdettu leveysaste $44^\circ\,43'\,11'', 68$ ja 90 alakulminaation mittauksesta sekuntiosa $11'', 88$; 120 Pienen Karhun β-tähden yläkulminaation mittauksesta sekuntiosa $11'', 76$ ja 174 alakulminaation mittauksesta sekuntiosa

kaltaiset vaihtelut eivät estä tavoittelemasta yleistä maan muotoa tähänastisten havaintojen perusteella. Se kuitenkin paljastuu, ettei kahden astemittauksen keskinäinen vertailu ole sopiva menetelmä osoittamaan missä suhteessa Maan epäsäännöllisyydet näyttävät todellisia suuremmilta. Sen sijaan on otettava kaikki havainnot mukaan saadaksemme pienimmän neliösumman menetelmällä selville tuntemattomien suureiden todennäköisimmät arvot. Näin tulee tunnetuksi niin elliptisyys kuin *metrin* pituus, jonka oikeasta arvosta uusimman Ranskassa tehdyn mittauksen perusteella saadaan tulokset, jotka hiukan poikkeavat niistä, jotka on asetettu metrin perustaksi jo 20 vuotta sitten.

5.

Heti kun meillä on tuntemattomien likiarvot ja näemme, kuinka hyvin ne sopivat yhteen uusimpien mittausten kanssa, paljastunee, onko pelkästään niiden varaan rakennettavissa Maan teoria varmemmin kuin käyttämällä myös vanhempia vähemmän tarkkoja mittauksia. Aluksi kokoamme niiden avulla todisteita vain meridiaanin muodosta. Merkitään seuraavasti:

S on meridiaanikaarien yhden asteen pituuksien keskiarvo l. meridiaanin neljänneksen 90. osa.

ρ on Maan elliptisyys suuremman akselin osina[19].

α on niiden leveysasteiden ϕ ja ϕ' erotus, joiden maantieteellinen etäisyys on Δ.

Jos alustavassa tarkastelussa jätetään korkeamman asteen termit ρ^2 jne. pois, Laplacen mukaan (Lap02, s. 172) Päiväntasaajan ja leveysasteen ϕ välisen kaaren pituus on[20]

$$\Delta = S\left(\phi - \frac{3}{4}\rho\frac{180}{\pi}\sin 2\phi\right).$$

Tämän kaavan asettamme käsillä olevan tutkimuksen perustaksi. Siis jos α esitetään on 60-järjestelmässä sekunteina, niin[21]

$$\frac{3600\Delta}{S} = \alpha - \frac{3}{2}\rho\frac{180\cdot 60^2}{\pi}\sin(\phi'-\phi)\cos(\phi'+\phi).$$

Otamme käyttöön merkinnän[22]

$$S = \frac{s}{1-m} = s(1+m+\&c.).$$

$11'', 77$. Keskiarvo on $43°\,43'\,11'', 77$, jota siis pidetään luotettavana. Mutta geodeettinen mittaus Pisan ja Firenzen observatoriot yhdistämällä saadaan leveysaste $43°\,43''\,19'', 4$. (Zac18, s. 223 jne.)

[19] *Päiväntasaajan säteen ja napasäteen erotuksen suhde Päiväntasaajan säteeseen. Suom. huom.*

[20] *Kaavassa oleva tulo $\rho 180/\pi$ ilmoittaa elliptisyyden asteissa. Myös (Lap02, s. 172) ilmoittaa elliptisyyden asteissa. Liitteessä 2 on Laplacen kaavan perustelut. Suom. huom.*

[21] *Tässä on siirrytty asteista sekunteihin ja laskettu leveyksien erotus $\alpha = \phi - \phi'$. Lisäksi on käytetty yhtäsuuruutta $\sin(2\phi) - \sin(2\phi') = 2\sin(\phi'-\phi)\cos(\phi'+\phi)$. Kaavaan on myös lisätty ρ, joka on virheellisesti jäänyt pois alkuperäisestä tekstistä. Suom. huom.*

[22] *Toinen tuntematon ρ:n lisäksi on S, joka tässä kirjoitetaan tunnetun s:n ja tuntemattoman m:n avulla. Suom. huom.*

Tuloksena on yhtälö, jonka olemme esittäneet siten, että selvemmin tulee näkyviin leveysasteiden tai pikemminkin niiden välisten etäisyyksien tärkeä, tarkka määritys[23]:

$$\frac{3600}{s}\Delta - \frac{3600}{s}\Delta m = \alpha - \frac{3\rho}{\sin 2''}\sin\alpha\cos(\phi' + \phi).$$

Valitaan $s = 57000$ syltä[24] (Jatkossa käytämme mittayksikköä, joka on asiantuntijoiden parissa yleistynyt ja perustuu ranskalaiseen mittatankoon, Toise de fèr de Pérou[25], lämpötilassa 13°R = 16,2°C). Yhtälö saa yksinkertaisemman muodon

$$C\Delta - \alpha = C\Delta m - c\sin\alpha\cos(\phi' + \phi)\rho,$$

missä[26] $\log_{10} C = 8{,}8004276$ ja $\log_{10} c = 5{,}49052$. Jos Δ ilmaistaan Englannin jaloissa, Ranskan ja Englannin jalkojen suhdetta[27,28] 4,263/4,000 käyttämällä pätee[29] $\log_{10} C = 7{,}9946211$.

6.

Kaikkein luotettavimmat mittaukset ovat seuraavat[30]:

A) *Mittaus Perussa*, jonka Bouguer ja La Condamine tekivät vuosina 1742 ja 1743. Vaikka tämän retken mittausten tarkkuudesta on paljon väitelty ja suuri epäilys on julkisuudessa tuotu esiin siellä käytettyjen laitteiden hyvyydestä, on kuitenkin ilmeistä, että Päiväntasaajan läheisyyden takia tällä mittauksella on suurehko painoarvo. Uudella v. Zachin tekemällä korjauksella saadaan nämä arvot: $\Delta = 176940$ syltä korkeudessa 1226 syltä, mistä seuraa merenpinnan tasolla arvo $\Delta = 176874$ syltä. Samoihin aikoihin La Condaminen Mama Tarquissa[31] ja Bouguerin Cotquesquissa tekimistä havainnoista saamme arvon $\alpha = 3° \, 7' \, 3'',79$, jonka nyt mielihyvin otamme laskuissamme huomioon. Se sopii yhteen myös v. Zachin toisella tavalla on johta-

[23] *Kaavassa on ilmeisesti* $2\pi/(180 \cdot 60^2) = 2$" *korvattu arvolla* $\sin(2\pi/(180 \cdot 60^2)$*, joka on käytännöllisesti katsoen sama. Suom. huom.*

[24] *Ranskan syli (ransk. toise) on ollut tämän tutkielman kirjoittamisen aikaan* 1,949 *metriä joten* 57000 *syltä = n.* 111 *km. Suom. huom.*

[25] *Nimi viittaa Ranskan akatemian valmistuttamaan syli- l. toise-mitan prototyyppiin lämpötilassa* 13° R = 16,25° *C, joka perustui toukokuun* 16. *päivänä* 1766 *annettuun kuninkaalliseen säädökseen (Str57, s. 10). Suom. huom.*

[26] *Kertoimen C tarkoitus ehkä liittyy Barlowin taulukoihin (Bar14). On helppo todeta, että*

$$100 \cdot 3600/57000 = 6{,}315789 \text{ ja } 10^{0{,}8004276} = 6{,}315789.$$

Oikea lopputulos saadaan kuitenkin, kun valitaan $C = 3600/57000$ *ja* Δ*:n yksiköksi Ranskan syli. Sen sijaan* $\log_{10}(3/\sin 2'') = 5{,}49052$ *Suom. huom.*

[27] (Rod12, s. 329), (Con13, s. 259), (Zac14, s. 338), (Zac09) jne.

[28] *Englannin jalka muunnetaan Ranskan jalaksi kertoimella* 4/4,263 *ja jakamalla vielä* 6*:lla (*1 *syli =* 6 *jalkaa) saadaan Ranskan syli. Suom. huom.*

[29] *Nyt pätee* $6 \cdot 4{,}263/4 = 6{,}3945$ *ja* $10^{8{,}8004276}/10^{7{,}9946211} = 6{,}3945$ *Suom. huom.*

[30] Koska mittausten tekijöillä on tapana kertoa vain vähän näistä eri paikkojen mittaustuloksista, olemme ottaneet ne suoraan lähteistä, emmekä ole aineistoa mitenkään muuttaneet, ettei lukijalle nousisi epäilys jonkin etukäteen oletetun hypoteesimme suosimisesta.

[31] *Kaupunki Ecuadorissa.* http://trip-suggest.com/ecuador/azuay/mama-tarqui/

man arvon $\alpha = 3^\circ\,7'\,4''{,}65$ kanssa[32]. Tosin Delambre uudella tutkimuksella (Del14, s. 567) sai $\alpha = 3^\circ\,7'\,3''$, $\Delta = 176877$, $\phi' + \phi = -3^\circ\,2'\,1''$.[33]

B) *Pidempi mittaus Intiassa*, missä W. LAMBTON vuosina 1805–1811 teki mittauksia pituuspiirillä 77° 40′ Greenwichistä itään. Hän mittasi Punnaen ja Namthabadin välisen etäisyyden 13 keskenään yhteensopivan zeniittisektorissa näkyvän tähden avulla. Jättämällä pienemmät pituudet huomiotta hänen tuloksensa ovat seuraavat[34]

$$\begin{aligned} \alpha &= 6^\circ\,56'\,22''{,}25 \\ \Delta &= 2518223{,}4 \text{ Engl. jalkaa lämpötilassa } 62^\circ\text{F} \\ \phi + \phi' &= 23^\circ\,15'\,38'' \end{aligned}$$

C) *Lyhyempi mittaus Intiassa* missä Lambton myös teki mittauksia pituuspiirillä 79° 47′ Greenwichistä itään. Käyttämällä Aldebaranin etäisyyttä zeniitistä hän sai tulokset (Lam08, s. 184, 185,193) ja (Lam16b, s. 86 jne.)

$$\begin{aligned} \text{Paudreen leveys} &= 13^\circ\,19'\,49''{,}02 \\ \text{Trivandeporumin leveys} &= 11^\circ\,44'\,52''{,}59; \\ \Delta &= 574337{,}0 \text{ Engl. jalkaa} \end{aligned}$$

D) *Mittaus Ranskassa*, jonka tekivät MECHAIN, DELAMBRE, BIO ja ARAGO. Näiden uusimpien havaintojen perusteella, ja jos tuo meridiaanikaari pidennetään Greenwichin observatorioon asti, voidaan nojautua DELAMBREN tuloksiin (Del14,

[32]Monatl. Corr. 1812 2. 52 jne. Tätä mittausta vastaan tehdyt huomautukset, jotka ovat ilmestyneet sarjassa M. Corr. 1807, Oct. pag. 301 jne, eivät meidän arviomme mukaan vähennä V. ZACHIN tekemän määrityksen merkitystä, sillä V. ZACH on rakentanut laskelmansa niiden havaintojen varaan, joita BOUGUER ja CONDAMINE ovat selvästi pitäneet luotettavina. Muutoin on huomattava, että tämä BOUGUERIN mittaus, vaikka se on jonkin verran epäluotettava, ei johda vääriin johtopäätöksiin, koska kaksi astemittaussarjaa on kyllin lähellä Päiväntasaajaa ja yhdessä saavat aikaan melkein kolminkertaisen Päiväntasaajan kaaren pituuden. Sitä paitsi ne ovat epäilemättä tarkempia, kuten on varsin helppo nähdä vertailemalla zeniittien etäisyyksiä.

[33]*Lopullisessa analyysissä on käytetty arvoja* $\Delta = (3600/57000) \cdot 176874 = 11171$, *jolloin saadaan alkuperäisen tutkielman sivulla* 16 *olevan* m'*:n kertoimen arvo 11,171 sekä arvot* $\alpha = 3^\circ\,7'\,3''{,}79$ *ja* $\phi' + \phi = -3^\circ\,2'\,1''$. *Nämä antavat* $c \sin\alpha \cos(\phi' + \phi) = 16803$, *joka on yhtäpitävä alkuperäisen tutkielman sivulla* 16 *olevan* ρ'*:n kertoimen* 16,803 *kanssa. Edelleen vasteen arvoksi saadaan* $C\Delta - \alpha = -52''{,}80$, *joka on tutkielman s.* 16 *arvon vastaluku. Samoin lasketaan myös muut alkuperäisen tutkielman s.* 16 *olevat vasteen arvot ja* m'*:n ja* ρ'*:n kertoimet. Suom. huom.*

[34]Aivan viime aikoina Lambton on ryhtynyt laajentamaan hankettaan tähänastista pidemälle kohti pohjoista (Lam16a, s. 294 jne.). *Alkuperäisessä tutkielmassa on virheellisesti julkaisuvuosi* 1818. *Suom. huom.*

T. III, s. 566)[35]

$$\begin{aligned} \Delta &= 730431{,}3 \text{ syltä} \\ \text{Formenteran leveys} &= 38^\circ\,39'\,56'',11 \\ \text{Greenwichin leveys Besselin mukaan} &= 51^\circ\,28'\,39'',56, \end{aligned}$$

mistä saadaan $\alpha = 12^\circ\,48'\,43'',45$ ja $\phi' + \phi = 90^\circ\,8'\,36''$. Tämän perusteella on myös ilmeistä, että tämä Ranskan meridiaanikaari riippuu vähiten elliptisyydestä ja eniten keskimääräisestä asteenpituudesta S.

E) *Mittaus Englannissa*, jonka teki W. Mudge vuosina 1800 – 1802. Jos käytämme hänen havainnoistaan ainoastaan pisintä kaarta, joka on Dunnosen ja Cliftonin välinen (Mud03, s. 383, 384, jne), saamme äärimmäisistä pisteistä arvot

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^\circ\,50'\,23'',38 \\ \Delta &= 1036337 \text{ Engl. jalkaa} \\ \phi' + \phi &= 104^\circ\,4'\,40''. \end{aligned}$$

F) *Mittaus Lapissa*, jonka tekivät Svanberg, Överbom, Palander ja Holmquist vuosina 1801–3 Maupertuisin vanhalla mittauspaikalla. Leveysasteiden etäisyys on 92777,98 syltä. Olettamalla siellä käytetyn rautatangon kahden metrin pituuden olleen 0° C:n lämpötilassa (eikä 16,2° C:n lämpötilassa) sama kuin Pariisin Instituutin kaksi metriä. Tämä jälkimmäinen on jäätymispisteessä $2 \cdot 443{,}296$ linjaa[36] mitattuna syli-mitan protyypin[37] mukaan, kun se on $16,2^\circ$ C:n lämpötilassa. Tämän olettamuksen oikeutus (josta epäilys on tarttunut arvoisaan retkikunnan johtajaan Svanbergiin) on lupa päätellä Laplacen teoksesta (Lap13, s. 63)[38]. Sitä paitsi Besselin ja Laplacen refraktiokaavan[39] avulla löytyy arvot[40]

[35]Taulukko, josta tämä aineisto on johdettu, sisältää joitakin painovirheitä, jotka on korjattu. Rodriguez (Rod17, s. 74) asetti $\Delta = 730430{,}7$. $\phi' = 51^\circ\,28'\,38'',0$, jonka virhe on Pondin ja Besselin mukaan korkeintaan $1''$.

[36]443,296 *linjaa (ransk. linea) on vuoden 1799 mittakomitean määritelmän (Lac99, s. 74) mukaan 1 metri, ja 864 linjaa on 1 syli (ransk. toise). Suom. huom.*

[37]*Toise fer de Pérou. Suom. huom.*

[38]Vrt. (Sva05, s. 162, 192). Koska monet auktoriteetit ovat kyseenalaistaneet julkisuuteen tuodun metrin luotettavuuden, kannattaa esittää seuraavat seikat, jotka osoittavat, että nämä ovat olleet vasthakoisuuden syynä: "Quoiqu'il en soit, c'est toujours au mètre légal qui est représenté par une règle de platine soumise à la temperature de la glace fondante, et dont la valeur est 443,296 lignes de toise de Pérou pris à 13° du thermomètre du Réaumure, que l'on doit rapporter comme par le passé, toutes les mésures géodesic."(Pui10, s. 29). *Suomennos liitteessä 2.*

[39]*Refraktiosta eli valon taittumisesta ilmakehässä ks.* https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_refraction *Suom. huom.*

[40]Koska arvoisa retkikunnan johtaja on epäillyt Bradleyn refraktiokaavan tarkkuutta, etenkin lämpötilan kertoimia, sekä noudattanut toista, kuuluisan Pronyn mielipidettä, niin me olemme etsineet refraktioarvoja sekä Laplacen kaavaa, Delambren vakiota että Besselin kaavaa varten refraktiotaulukoista (Tables Astronimiques, par le Bureau de longitudes, missä taulukko VII ei

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 92777{,}98 \text{ syltä} \\
\alpha &= 1^\circ\, 37'\, 19'',55 \\
\phi' + \phi &= 132^\circ\, 40'\, 20''.
\end{aligned}
$$

7.

Laskujen vaivattomuuden[41] takia otamme käyttöön $m' = 1000m$, $\rho' = 1000\rho$. Niinpä näistä kudesta meridiaanikaaresta syntyy seuraavat yhtälöt:

$$
\begin{array}{lcrcrcr}
\text{A)}\ 0 & = & 52\text{"},80 & + & 11{,}171\, m' & - & 16{,}803\, \rho' \\
\text{B)}\ 0 & = & 110\text{"},80 & + & 24{,}872\, m' & - & 34{,}343\, \rho' \\
\text{C)}\ 0 & = & 23\text{"},76 & + & 5{,}673\, m' & - & 7{,}738\, \rho' \\
\text{D)}\ 0 & = & -9\text{"},05 & + & 46{,}131\, m' & + & 0{,}172\, \rho' \\
\text{E)}\ 0 & = & -12\text{"},43 & + & 10{,}236\, m' & + & 3{,}729\, \rho' \\
\text{F)}\ 0 & = & -20\text{"},11 & + & 5{,}860\, m' & + & 5{,}936\, \rho'
\end{array}
$$

Oletamme, että nämä yksittäiset yhtälöt ovat tarkkuudeltaan samanveroisia. Silloin on ilmeistä, että Intian (B), Päiväntasaajan (A) ja Ruotsin (F) kaaret määrittävät ρ:n sekä Ranskan (D) ja Intian kaaret S:n asianmukaisesti. Pienimmän neliösumman menetelmässä näistä saadaan yhtälöt:

$$
\begin{array}{lcrcrcr}
0 & = & 2797{,}99 & + & 3042{,}86\, m' & - & 1004{,}90\, \rho' \\
0 & = & -5016{,}07 & - & 1004{,}90\, m' & + & 1570{,}84\, \rho'.
\end{array}
$$

ole Littrowin käsityksen mukaan virheellinen lämpötilakorjauksen ansiosta. (Con18, Ks. s. 387)). Olemme saaneet Mallörnille näiden kaavojen kanssa yhteensopivat refraktiot

$$23'',94,\ 24'',18,\ 24'',48,\ 24'',65,\ 24'',67,\ 24'',44,\ 24{,}89.$$

Keskimääräinen Bradleyn korjaus on $+0'',22$. Pahtavaaran havaintoihin liittyvät Pohjantähden yläkulminaation korjaukset ovat

$$22'',94,\ 24'',30,\ 24'',50,\ 23'',89,\ 23'',85,\ 23'',47,\ 23'',63.$$

Keskimääräinen korjaus on $+0'',18$. Näiden kahden sarjan alakulminaatioiden refraktiot ovat $28'',83$ ja $29'',58$, ja korjaukset $+0'',28$ ja $0'',35$. Näistä seuraa, että jos Svanbergin havaitsemaa deklinaatiota käytetään (5. lokakuuta 1802 se on Delambren mukaan $88^\circ\, 15'\, 19'',14$, sekuntiosa on Svanbergin mukaan $17'',52$ ja Besselin mukaan $18'',48$.), Mallörnin leveysaste on $65^\circ\, 30'\, 50'',05$ ja Pahtavaaran $67^\circ\, 8'\, 49'',60$, joten niiden suuruuksiin Bradleyn refraktio ei aiheuta mitään virhettä. Tämä aineisto muuttuu vain vähän, jos Besselin mukaista deklinaatiota sovelletaan edes Mallörnissa tehtyihin havaintoihin, ja aberraatio ja nutaatio lasketaan havainnoista tavanomaisten kaavojen mukaan. Besselin kaava on muuten käyttökelpoinen näissäkin ilmasto-olosuhteissa. Sen osoittavat nuo kaksi Auringosta tehtyä havaintoa 23. joulukuuta 1802 ja 5. tammikuuta 1803. Ks. em. kohtaa s. 163.

[41] Tässä yhteydessä ovat suositeltavia Barlowin New mathematical Tables (Bar14), joiden olemme käytännössä huomanneet suuresti lyhentävän numeeristen laskujen suorittamista.

Ratkaisut ovat[42]:

$$\begin{array}{rcllcl} m' & = & +\,0{,}177120, & \text{tarkkuus} & = & 48{,}99 \\ \rho' & = & +\,3{,}3028, & \text{tarkkuus} & = & 35{,}20, \end{array}$$

kun on oletettu, että taivaanhavaintojen mittaustarkkuuden yksikkö on 60-järjestemän mukaisesti ilmaistuna 1 sekunti. Koska $S = s(1 + m + \cdots)$, on yhden asteen keskipituus eli 90. osa meridiaanista 57009,76 syltä[43] ja

$$\text{elliptisyys} = \frac{1}{302{,}78}.$$

Pituu-[44]

[42] *Jos kirjoitamme lineaarisen mallin nykykäytännön mukaisesti* $y = X\beta + \epsilon$, *niin tarkkuus saadaan matriisin* $(X'X)^{-1}$ *lävistäjäalkioiden neliöjuurien käänteislukuina, so. se on verrannollinen keskivirheiden käänteisarvoihin (Gau09, s. 219–220) Suom. huom.*

[43] *Laskemalla estimaatit uudelleen tutkielman lähtötiedoista saadaan elliptisyydeksi* 1/302,80 *ja yhden asteen keskimääräiseksi pituudeksi* 57009,77 *Ranskan syltä, joka vastaa 111114 metriä. Nykytekniikka antaa 95%:n luottamusvälit elliptisyydelle* $(1/311{,}33, 1/294{,}73)$ *ja yhden asteen pituudelle* $(57006{,}06, 57013{,}47)$ *syltä, joka on metreinä* $(111107, 111121)$. *Nykyinen elliptisyyden arvo samalla tarkkuudella on* 1/298,26, *(Ver14, s. 125,126) Suom. huom.*

[44] *Turun akatemian tapa oli, että respondentti, tässä tapauksessa* F. W. Brummer, *joutui maksamaan väitöskirjan painatuskulut, minkä takia julkaisu sisälsi useimmiten enintään* 16 *sivua. Tässä tapauksessa väitöskirja loppuu kesken sanan eikä loppuosaa ei ole julkaistu. Joka tapauksessa* Walbeck *on kuitenkin pääasiansa saanut sisältymään näihin sivuihin. Ks. (Don93, s. 427). Suom. huom.*

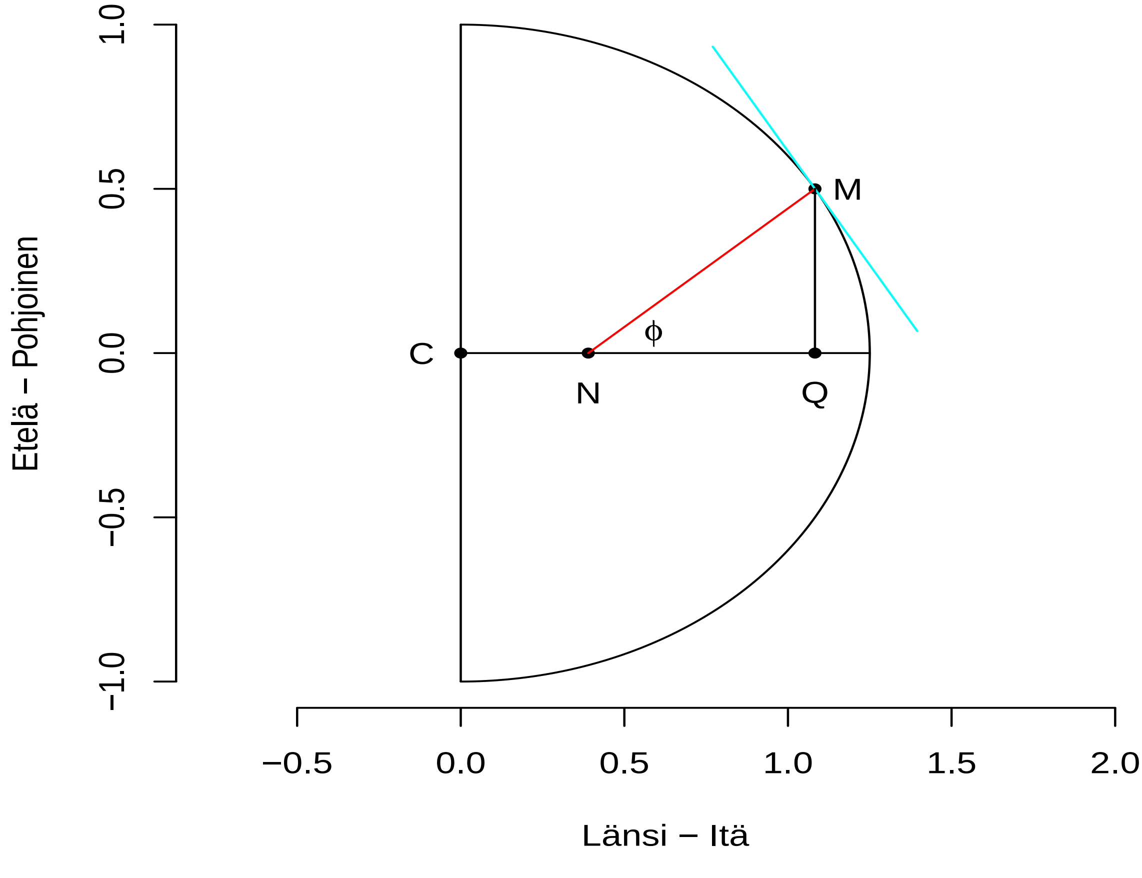
Suomentajan liite 1

Nicolai: "Nyt kun todennäköisyysteoriaa ja sen soveltamista tähtitieteellisiin havaintoihin ja laskelmiin on kehitetty varsin hyvin, ei pitäisi oikeastaan tehdä mitään tähtitieteellistä määritystä kehittämättä samanaikaisesti siihen perustellusti liittyvää todennäköisyysteoriaa. Vain tällä tavalla koko tutkimus saa todellisen arvon, sillä tällä tavoin voidaan osittain arvioida, kuinka paljon tehtyyn määritykseen voi luottaa. Osittain myös saadaan selville, mikä eri perustekijöiden joukosta tulee selvästi esiin olemassa olevasta aineistosta. Kaikki mielivaltaisuus poistuu tällä tavoin, eikä ole tarpeen tehdä olettamuksia määritettäessä eri tekijöiden todellisen arvon todennäköisiä rajoja. Nehän ovat luonnostaan sellaisia, että jokaisella on väistämättä niistä oma näkemyksensä."

Puissant: "Olipa lukema mitä tahansa, se on aina mitattu virallisella mitalla, jota edustaa platinatanko jään sulamispisteen lämpötilassa, ja jonka pituus on 443,296 linjaa 13 asteessa Réaumure-asteikolla. Kuten aiemminkin tämän mitan mukaisesti kaikki geodeettiset mitat on ilmoitettava."

Ks. https://fi.wikipedia.org/wiki/Réaumur-asteikko

Suomentajan liite 2



Kuva 1: Maan itäinen puolisko poikkileikkauksena akselin suhteen. Paikan M leveysaste on ϕ.

Napa-akselin pituus on a, keskipisteen C etäisyys Päiväntasaajasta on b, $n = b/a > 1$. Kuvassa 1 Sininen suora on pisteen $M = (b\cos\theta, a\sin\theta)$ kautta kulkeva tangentti, ja punainen suora on sen normaali. Tämän normaalin leikkauspiste Päiväntasaajan janalla on $N = ((b - a^2/b)\cos\theta, 0)$. Päiväntasaajan janan ja pisteen M kautta kulkevan kohtisuoran leikkauspiste on $Q = (b\cos\theta, 0)$. Luonnollisesti $C = (0, 0)$. Olkoon $||V||$ janan V pituus. Leveysasteelle (toistaiseksi radiaaneissa) ϕ pätee

$$\begin{aligned}
\sin\phi &= \frac{||M-Q||}{||M-N||} = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{\frac{a^4}{b^2}\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{n^{-2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}}, \\
\cos\phi &= \frac{||Q-N||}{||M-N||}\frac{\frac{a^4}{b^2}\cos\theta}{\sqrt{\frac{a^4}{b^2}\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} = \frac{n^{-2}\cos\theta}{\sqrt{n^{-2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \\
\tan\phi &= \frac{a\sin\theta}{\frac{a^2}{b}\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta > \tan\theta.
\end{aligned}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että

$$\sin^2\phi + n^2\cos^2\phi = \frac{1}{n^{-2}\cos^2\theta + \sin^2\theta}. \tag{1}$$

Viimeinen yhtälö antaa parametrin θ leveysasteen funktiona

$$\theta(\phi) = \arctan(n^{-1}\tan\phi),$$

jolloin

$$M = M(\phi) = (b\cos\theta(\phi), a\sin\theta(\phi)).$$

Meridiaanikaaren pituus Δ päiväntasaajalta leveysasteelle ϕ saadaan tavalliseen tapaan integraalina

$$\begin{aligned}
\Delta &= \int_0^\phi \left\|\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}\right\| |\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\phi \sqrt{b^2\sin^2\theta(t) + a^2\cos^2\theta(t)}\,|\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\phi b\sqrt{\sin^2\theta(t) + n^{-2}\cos^2\theta(t)}\,|\theta'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\phi \frac{b\,|\theta'(t)|\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + n^2\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

missä kolmannella rivillä on käytetty kaavaa (1). Sijoittamalla viimeisen rivin kaavaan ensin

$$\theta'(t) = \frac{n^{-1}}{(1 + n^{-2}\tan^2 t)\cos^2 t} = \frac{n}{n^2\cos^2 t + \sin^2 t}$$

ja sitten $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ saamme

$$\Delta = bn\int_0^\phi (n^2\cos^2 t + \sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{b}{n^2}\int_0^\phi [1 - (1 - n^{-2})\sin^2 t]^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Ensimmäinen eksentrisyys (Ver14, s. 101) on $e = \sqrt{b^2 - a^2}/b$. Silloin $1 - 1/n^2 = (b^2 - a^2)/b^2 = e^2$ ja $1/n^2 = 1 - e^2$. Lopuksi saamme kaavan

$$\Delta = b(1 - e^2) \int_0^\phi (1 - e^2 \sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}t, \tag{2}$$

joka on sama kuin Vermeerin ja Rasilan antama (Ver14, s. 101). Huomaa kuitenkin, että a ja b ovat heillä päinvastoin kuin tässä esityksessä.

Integraalia ei voi laskea suljetussa muodossa. Koska $|e^2 \sin^2 t| < e^2 < 0.01$, käytämme approksimaatiota

$$(1 - e^2 \sin^2 t)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Siis

$$\begin{aligned} \int_0^\phi (1 - e^2 \sin^2 t)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t &\approx \int_0^\phi \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= \left(1 + \frac{3}{4} e^2\right) \phi - \frac{3}{8} e^2 \sin 2\phi, \\ \Delta &\approx b(1 - e^2) \left[\left(1 + \frac{3}{4} e^2\right) \phi - \frac{3}{8} e^2 \sin 2\phi\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Jatkossa korvaamme yhtälössä (3) likimääräisen yhtäsuuruuden yhtäsuuruudella. Kun $\phi = \pi/2$, saamme meridiaanikaaren neljänneksen pituudeksi $S' = b(1 - e^2)(1 + (3/4)e^2)\pi/2$. Yhden asteen keskimääräinen pituus S saadaan jakolaskulla

$$S = \frac{S'}{90} = b(1 - e^2)(1 + (3/4)e^2) \frac{\pi}{180}. \tag{4}$$

Saamme kaavoista (3) ja (4) osamäärän

$$\frac{\Delta}{S} = \frac{180\phi}{\pi} - \frac{180}{\pi} \frac{\frac{3}{8} e^2}{1 + \frac{3}{4} e^2} \sin 2\phi. \tag{5}$$

Viimeinen vaihe on esittää tämä kaava elliptisyyden eli litistyneisyyden ρ avulla. Walbeck kirjoittaa seuraavansa Laplacea ja jättävänsä ρ:n toisen ja korkeamman asteen termit pois. Koska $(b - a)/b = \rho$ ja $(b + a)/b = 2 - \rho$, niin

$$e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{b - a}{b} \frac{b + a}{b} = \rho(2 - \rho) \approx 2\rho,$$

ja edelleen

$$\frac{\frac{3}{8} e^2}{1 + \frac{3}{4} e^2} \approx \frac{\frac{3}{4}\rho}{1 + \frac{3}{2}\rho} \approx \frac{3}{4}\rho \left(1 - \frac{3}{2}\rho\right) \approx \frac{3}{4}\rho.$$

Kaavassa (5) $180\phi/\pi$ ilmoittaa leveysasteen asteissa. Yksinkertaisuuden vuoksi vaihdamme ϕ:n yksikön radiaaneista asteisiin ja määrittelemme sin-funktion olevan asteen funktion. Tämä johtaa Walbeckin kaavaan

$$\frac{\Delta}{S} = \phi - \frac{3}{4}\rho \frac{180}{\pi} \sin 2\phi. \tag{6}$$

Walbeck on saanut meridiaaninkaaren pituutta koskevan kaavansa Laplacen teoksesta (Lap02, s. 172).

Kun lasketaan estimaatit uudelleen Walbeckin käyttämistä alkuperäisistä havainnoista, saadaan $\hat{\rho} = 3{,}302479$. Vertailemalla kaavoja (5) ja (6) päädytään siihen että oikeastaan on estimoitu eksentrisyyttä, joka voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\hat{\rho} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8}e^2}{1 + \frac{3}{4}e^2}.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$\hat{e}^2 = \frac{\hat{\rho}}{\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\hat{\rho}} = 0{,}00663784,$$

jonka nykyarvo on 0,00669438. Tästä saadaan uusi arvo litistyneisyydelle, sillä $e^2 = \rho(2-\rho)$, joten $\rho = 1 - \sqrt{1-e^2}$. Estimaatti on 0,003324446 ja litistyneisyys $1/300{,}80$. Yhden asteen keskimääräiseksi pituudeksi saadaan uudelleen laskemalla $S = 57009{,}77$. Kaavan (4) avulla saa Päiväntasaajan säteen arvon

$$\hat{b} = \frac{1{,}949S}{(1-\hat{e}^2)(1+(3/4)\hat{e}^2)\frac{\pi}{180}} = 6377044 \text{ metriä.}$$

Nykyarvo on 6378137 metriä (Ver14, GRS80-järjestelmän mukaan s. 125).

Maan muodon arvioinnissa on myös käytetty yksinkertaisempaa approksimaatiota. Anders Hald antaa (Hal98, s. 97) Roger Joseph Boscovichin (serbokratiaksi Ruđer Josip Bošković) approksimaation. Oletetaan kaksi leveysastetta $\phi < \phi'$, ja niiden (pieni) erotus $\phi' - \phi = \alpha$ ja keskiarvo $(\phi' + \phi)/2 = \lambda$. Silloin niiden välisen meridiaanikaaren pituus Δ saadaan soveltamalla kaavaa (2). Lähtemällä integraalin aikaisemmasta likiarvosta saamme

$$\begin{aligned}
\Delta &\approx b(1-e^2)\int_{\phi}^{\phi'} \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 t\right) \mathrm{d}t \\
&\approx b(1-e^2)(\phi' - \phi)\left(1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 \frac{\phi' + \phi}{2}\right) = b(1-e^2)\left(\alpha + \frac{3}{2}e^2 \alpha \sin^2 \lambda\right).
\end{aligned}$$

Siis kaiken kaikkiaan kaavan (2) nojalla

$$\frac{\Delta}{\alpha} \approx b(1-e^2)(1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 \lambda) = \beta_0 + \beta_1 \sin^2 \lambda,$$

missä $\alpha = \phi' - \phi$ kuten edellä ja $\lambda = (\phi' + \phi)/2$. Silloin litistyneisyyden l. elliptisyyden likiarvo saadaan kertoimien β_0 ja β_1 avulla, sillä $\beta_1/(3\beta_0) = \frac{1}{2}e^2 \approx \rho$.

Viitteet

[Bar14] Barlow, P.: *New Mathematical Tables.* The Royal Military Academy, London, 1814.
https://books.google.fi/books?id=rwDvAAAAMAAJ&printsec=frontcover&hl=fi&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

[Con13] *Connaissance des Tems, ou des Mouvemens célestes, a l'usage des Astronomes et des Navigateurs pour l'an 1816.* Publiée par le bureau des longitudes, 1813.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6506840j/f5.image.

[Con18] *Connaissance des Tems, ou des Mouvemens célestes, a l'usage des Astronomes et des Navigateurs pour l'an 1820.* Publiée par le bureau des longitudes, 1818.
https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6506840j/f5.image.

[Del14] Delambre, J. B.: *Astronomie théorique et pratique*, Tome III. Courcier, Paris, 1814.
https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-46128.

[Don93] Donner, A.: *Walbeck's Abhandlung "De Forma et magnitudine telluris".* Zeitschrift für Vermessungswesen, XII Band: 426–434, 1893.
https://archive.org/details/zeitschriftfrve23vermgoog/page/n442.

[Gau09] Gauss, C. F.: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* Frid. Berthes et I.H. Besser, Hamburg, 1809.
http://books.google.com/books?id=ORUOAAAAQAAJ&hl=&source=gbs_api.

[Hal98] Hald, A.: *A History of Mathematical Statistics From 1750 to 1930.* Wiley, New York, 1998.

[Lac99] La comission des poids et mesures: *Rapport sur la mesure de la méridienne de France, et les résultats qui en ont été déduits pour déterminer les bases du nouveau systéme métrique.* Memoires de l'Institut National des Sciences & arts. Sciences Mathematiques et Physiques., Tome II, Histoire: 23–80, 1799.
https://biodiversitylibrary.org/page/16302865.

[Lam08] Lambton, W.: *An Account of the Measurement of an Arc on the Meridian on the Coast of Coromandel and the Length of a Degree deduced therefrom in the Latitude* $12^\circ\,32'$. Asiatick Researches, VIII: 137–194, 1808.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/93471#page/159/mode/1up.

[Lam16a] Lambton, W.: *An account of the Measurement of an Arc on the Meridian extending from Latitude* $10^\circ\,59'\,49''$ *to* $15^\circ\,6'\,0''.65$ *North.* Asiatick Researches, XII: 286–356, 1816. https://www.biodiversitylibrary.org/item/133283#page/312/mode/1up.

[Lam16b] Lambton, W.: *Trigonometrische Vermessungen in Ostindien.* Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften, 2. Band: 79–88, 1816. https://opacplus.bsb-muenchen.de/title/6880916.

[Lap02] Laplace, P. S. de: *Mechanik des Himmels,* Teil 2. La Garde, Berlin, 1802. Übersetzt von J. C. Burckhardt. https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/449281.

[Lap13] Laplace, P. S. de: *Exposition du Systéme du Monde,* 4:me édition. Courcier, Paris, 1813. https://archive.org/details/expositiondusys01laplgoog/page/n81.

[Leg05] Legendre, A.M.: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* Firmin Didot, Paris, 1805. http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/legendre-texte.pdf.

[Lin06] Lindenau, B. A. von: *Über den Gebrauch der Gradmessungen zur Bestimmung der Gestalt der Erde.* Zachs Monatliche Correspondenz, XIV: 113–158, Julius 1806. https://ia903008.us.archive.org/14/items/bub_gb_RqAAAAAAMAAJ/bub_gb_RqAAAAAAMAAJ.pdf.

[Mud03] Mudge, W: *An Account of the measurements of an Arc of the Meridian, extending from Dunnose in the Isle of Wight, Latitude* $50^\circ\,37'\,8''$ *to Clifton in Yorkshire, Latitude* $53^\circ\,27', 31''$*, in course of the Operations carried on for the Trigonometrical Survey of England in the Years 1800, 1801, and 1802.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 93: 383–508, 1803. http://opacplus.bsb-muenchen.de/title/7520000/ft/bsb10538614?page=481.

[Nic16] Nicolai, F.B.G: *Ueber die Bahn des Olbers'schen Cometen vom Jahre 1815.* Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften, Band I, Januar und Februar: 283–324, 1816. https://opacplus.bsb-muenchen.de/metaopac/search.do?methodToCall=quickSearch&Kateg=0&Content=6880914&bibtip_did=1900282DF39D7D45EFF1B6E33FFF0602.

[Pui10] Puissant, L.: *Traité de Topographie et Nivellement. Supplément au second livre du Traité de Topographie.* Chez Courcier, Paris, 1810. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62758621/f9.image.texteImage.

[Rod12] Rodriguez, J.: *Observations on the Measurement of three Degrees of the Meridian conducted in England.* Philosophical Transactions of the Royal

Society of London, 102: 321–351, 1812.
https://www.biodiversitylibrary.org/item/213355#page/379/mode/1up.

[Rod17] Rodriguez, J.: *Über die Gössenverhältnisse des Erd-Sphäroids*. Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften, Band III: 71–81, 1817.
https://opacplus.bsb-muenchen.de/Vta2/bsb10061005/bsb:6880918?lang=de&view=default&c=default&allDigIds=false&queries=%7C.

[Str57] Strasser, G.: *Ellipsoidische Parameter der Erdfigur (1800–1950)*. Numero 19 sarjassa *A: Höhere Geodäsie*. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1957.
https://doi.org/10.1179/sre.1958.14.110.380.

[Sva05] Svanberg, J.: *Exposition des opérations faites en Lapponie pour la détermination d'un arc du méridien, en 1801–1803*. L'académie des sciences, Stockholm, 1805.
https://archive.org/details/TO0E037814_TO0324_PNI-2547_000000/page/10.

[Ver14] Vermeer, M. & Rasila, A.: *Maailman kartta — johdatus matemaattiseen geodesiaan*. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry., Helsinki, 2014.

[Zac09] Zach, F. von: *Tables abrégées et portatives du soleil*. Le Baron de Zach, Florence, 1809.
https://books.google.fi/books?id=CJ0AAAAAMAAJ&pg=PA11&lpg=PA11&dq=von+Zach+tables+du+soleil&source=bl&ots=Ou-OE9V_hs&sig=ACfU3U20HapS9Hwuwv6XW2xZi1y9_QhSCQ&hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwiFpZ3-wbnkAhXtl4sKHdVmCJwQ6AEwEnoECAgQAQ#v=onepage&q=von%20Zach%20tables%20du%20soleil&f=false.

[Zac12] Zach, F. von: *Über Repetitionskreise mit feststehender Säule und einem Fernrohr*. Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Band 25, April: 322–353, 1812.
https://opacplus.bsb-muenchen.de/Vta2/bsb10538614/bsb:7520000?page=343.

[Zac14] Zach, F. von: *L'Attraction des Montagnes*, vol. I, sivut 307–338. Le Baron de Zach, Avignon, 1814.
https://books.google.fi/books?id=nJc5AAAAcAAJ&pg=PA107&lpg=PA107&dq=von+Zach+attraction+des+mont+mars&source=bl&ots=kfc0xt83Ps&sig=ACfU3U2gwp_7jYIn-r0AWMDi1skwG6V6QQ&hl=en&sa=X&ved=2ahUKEwjq7-WuurnkAhXBpYsKHTfiD4YQ6AEwDXoECAgQAQ#v=onepage&q=von%20Zach%20attraction%20des%20mont%20mars&f=false.

[Zac18] Zach, F. von: *Über eine in mehreren Rücksichten merkwürdige Triangulation im Grossherzogthum Toscana*. Zeitschrift für Astronomie und

Vervandte Wissenschaften, Erster Band: 211–234, 1818.
https://books.google.fi/books?id=gXlbAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=fi&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.