

Harjoitukset 3
27.9.2011

1. Oletetaan, että \mathbf{Q} on kuten monisteessa s. 15. Osoita, että a) $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$ ja b) $\text{tr}(\mathbf{Q}) = n - p - 1$.
2. Osoita määritelmiin perustuen, että jos $T \sim t(n)$, niin $T^2 \sim F(1, n)$.
3. Osoita, määritelmään perustuen, että jos $F \sim F(m, n)$, niin $1/F \sim F(n, m)$.
4. Osoita määritelmään nojautuen, että $\chi^2(n)$ -jakauman odotusarvo on n . Päättele tämän perustella, että $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.
5. Regressiokertoimen muuttuminen kun mallin tuodaan uusi selittäjä. Oletetaan

$$\begin{aligned}E(Y|X_1) &= \beta_0 + \beta_1 X_1, \\E(Y|X_1, X_2) &= \beta_0^* + \beta_1^* X_1 + \beta_2^* X_2, \\E(X_2|X_1) &= \gamma_0 + \gamma_1 X_1.\end{aligned}$$

Ratkaise β_1^* parametrien $\beta_1, \beta_2^*, \gamma_1$ avulla. Milloin $\beta_1 = \beta_1^*$? Opastus: Käytä iteroidun ehdollisen odotusarvon kaavaa $E(Y|X_1) = E[E(Y|X_1, X_2)|X_1]$.

6. a) Oletetaan malli $\log Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$. Laske $E(Y | X = x + 1)/E(Y | X = x)$. Miten Y :n odotusarvo muuttuu, kun X kasvaa yhdellä yksiköllä? b) Oletetaan malli $\log Y = \beta_0 + \beta_1 \log X + \varepsilon$. Laske $E(Y | X = ax)/E(Y | X = x)$. Miten Y :n odotusarvo muuttuu, kun X kasvaa yhdellä prosentilla? ($a = 1.1$)? c) Oletetaan malli $Y = \beta_0 + \beta_1 \log X + \varepsilon$. Laske $E(Y | X = ax) - E(Y | X = x)$. Miten Y :n odotusarvo muuttuu, kun X kasvaa yhdellä prosentilla?