

Lukualueet

Harjoitus 6, 7.–8.12.2009

1. Todista $\mathbb{C}$:n käänteinen kolmioepäyhtälö: Kaikille $z, w \in \mathbb{C}$ pätee

$$||z| - |w|| \leq |z + w|.$$

2. Olkoot $z = 1 + 2i$ ja $w = -1 - i\sqrt{3}$.

(a) Määritä lukujen z ja w napakoordinaattiesitykset.

(b) Määritä luvut $z + w$, zw , $1/z$ ja $1/w$ muodossa $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Lause 6.14: Osoita, että jokaisella $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on m kappaletta m :nsiä juuria.

4. Ratkaise yhtälöt

(a) $z^4 = i$ ja

(b) $z^5 = -1/16$.

Havainnollista ratkaisuja kuvilla.

5. Olkoot $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Osoita, että tällöin $zw \neq 0$ käyttämällä

(a) kertolaskun määritelmää;

(b) napakoordinaattiesitystä.

6. Ratkaise toisen asteen yhtälö

$$z^2 + 2\sqrt{2}iz - 2\sqrt{3}i = 0.$$

7. Etsi yhtälön $z^3 - 6z - 6 = 0$ reaalijuuri. Voit ratkaista myös kompleksiset juuret.

8. Ratkaise kolmannen asteen yhtälö

$$z^3 - 3iz^2 + 3(\sqrt[3]{2}i - 1)z + 2 + 3\sqrt[3]{2} + 3i = 0$$

Cardanon kaavojen avulla.

Ohje: Poista aluksi toisen asteen termi sopivalla sijoituksella.

TENTISTÄ: Tenttialueeseen kuuluu kaikki luennoilla ja monisteessa käsitelty *-kohtia lukuunottamatta. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavaa tai Algebran peruslauseen todistuksen yksityiskohtia ei tarvitse osata ulkoa. Trigonometrisistä funktioista pitää muistaa muistikolmioista saatavat sinin ja kosinin arvot (merkit mukaan lukien).