

Lukualueet

Harjoitus 3, 16.–17.11.2009

1. Todista Lemman 3.6 kohdat:

(b) $\mathbb{Q} = -\mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.

(d) Kaikilla $a \in \mathbb{Q}$ pätee $a^2 \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$.

(e) Kaikilla $a \in \mathbb{Q}_+$ pätee $a^{-1} \in \mathbb{Q}_+$.

2. Millä lisäehdolla $\mathbb{Q}$:n järjestykselle pätee: $[a, b] \leq [c, d] \iff ad \leq bc$??
(eli mitä pitää olettaa luvuista $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$?) Todista.

3. Oletetaan, että $b \in \mathbb{Q}$ ja $b < 1$. Osoita, että löytyy $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$(1 + 1/n)^2 b < 1.$$

Miten tämä liittyy Esimerkkiin 3.11?

4. Osoita, että mikään joukon

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$$

alkio ei ole joukon $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ pienin yläraja.

5. (a) Todista rationaalilukujen kolmioepäyhtälö: $|a + b| \leq |a| + |b|$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Q}$.

(b) Näytä että $|ab| = |a||b|$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Q}$.

6. Tarkista joku jonojen laskutoimitusten ominaisuus Lauseesta 4.1 (assosiatiivisuus, kommutatiivisuus tai distributiivisuus).

7. Osoita, että jos rationaalilukujen jono $\alpha = (a_n)_{n=1}^\infty$ suppenee, niin α on Cauchyn jono.

8. Osoita, että Cauchyn jonojen $\alpha = (a_n)_{n=1}^\infty$ ja $\beta = (b_n)_{n=1}^\infty$ summa $\alpha + \beta = (a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ on myös Cauchyn jono.