

Lukualueet

Harjoitus 2, 9.–10.11.2009

1. Osoita, että $\mathbb{Z}_+ = \{[m, n] \in \mathbb{Z} : m > n\}$ ja $-\mathbb{Z}_+ = \{[m, n] \in \mathbb{Z} : m < n\}$.

2. (a) Näytä, että $\mathbb{Z}_+ \cap -\mathbb{Z}_+ = \emptyset$.

(b) Osoita, että $a^2 \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$.

3. Osoita, että kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$ pätee

$$a < b \iff b - a \in \mathbb{Z}_+.$$

4. Todista seuraava väite: Jos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, ja $ac = bc$, niin $a = b$.

5. Osoita, että $\mathbb{Q}$:n kertolasku on hyvin määritelty laskutoimitus.

6. Osoita, että $\mathbb{Q}$:n kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen.

7. Olkoon $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $j(k) = [k, 1]$. Osoita, että kuvaus j on injektio, jolle pätee

$$j(m+n) = j(m) + j(n) \quad \text{ja} \quad j(mn) = j(m)j(n)$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$.

8. Määritellään rationaaliluvuille ”laskutoimitus” $\oplus$ asettamalla

$$[a, b] \oplus [c, d] = [a + c, b + d].$$

Onko $\oplus$ hyvin määritelty laskutoimitus?