

Joukot ja alkeisfunktiot

Harjoitus 6, 29.10.2008

Kurssin suorittamiseksi on tehtävä vähintään puolet kaikista tehtävistä ja joka kerralla vähintään 3 tehtävää; tee kuitenkin aina kaikki mitkä osaat! Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

1. Olkoot A, B ja C joukkoja. Osoita, että

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Olkoot $A, B \subset X$ joukkoja. Osoita, että $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Piirrä myös kuva!

3. Olkoot $A, B \subset X$ joukkoja. Osoita että

(a) $(A^c)^c = A$

(b) $A \setminus B = A \cap B^c$.

4. (a) Anna esimerkki joukoista A, B ja C , siten, että $A \in B, B \subset C$ ja $A \cap C = \emptyset$.
(b) Määritä potenssijoukko $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$ kun $A = \{1, 2, c, d\}$.

5. Merkitään $A_k = [0, 1 - \frac{1}{k+1}]$ ja $B_k =]-1 - \frac{1}{k}, k^2]$. Määritä joukot

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{ja} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

6. Olkoon B joukko ja $\{A_i\}_{i \in I}$ indeksöity joukkoperhe. Osoita, että

$$B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

7. Olkoon $A_k = [k, k+1]$ kun $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Piirrä joukot

$$\bigcup_{k=1}^4 A_k, \quad \bigcup_{k=1}^3 (A_k \cap A_{(k+1)}) \quad \text{ja} \quad \bigcup_{k=1}^4 (A_k \times A_k)$$

(Huomaa: kaksi ensimmäistä joukkoa ovat $\mathbb{R}$:n osajoukkoja, kolmas on $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.)

8. Olkoon $A = [0, 1]^2$ ($= [0, 1] \times [0, 1]$), $B = [0, 1]^2 \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^2$ ja $C = ([0, 1] \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])^2$. Piirrä joukot A, B ja C . Mitkä joukoista ovat toistensa osajoukkoja?