Joukot ja alkeisfunktiot
Harjoitus 3, 8.10.2008

Kurssin suorittamiseksi on tehtävä vähintään puolet kaikista tehtävistä ja joka kerralla vähintään 3 tehtävää; tee kuitenkin aina kaikki mitkä osaat! Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.
Harjoitustehtävien aiheita ja aikoja sovitaan luennolla viikolla 41.

1. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita induktiolla että

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

   kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
   Vihje: Huomaa, että

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}$$

2. Ratkaise polynomin $P(x)$ nollakohdat (neliöksi täydentämällä) ja hahmottele P:n kuvaaja, kun $P(x) = x^2 + 8x + 14$.

3. Osoita, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan antamat ratkaisut

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   todella ovat yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisuja.

4. Olkoot $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ polynomin $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nollakohdat. Miten a, b ja c voidaan ilmaista nollakohtien avulla?
   (vrt. luentojen Lauseeseen 2.4(b))

5. Ratkaise polynomin $P(x)$ nollakohdat ja hahmottele P:n kuvaaja, kun
   $P(x) = 4x^4 - 5x^3 - 11x^2 - x + 1$.
   Muista mitä luennolla sanottiin polynomien rationaalijuurista!

6. Hahmottele rationaalifunktion $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ kuvaaja.

7. Sievennä lauseke

$$\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}}$$

   rationaalifunktion muotoon. Määritä näin saadun funktion suurin mahdollinen määrittelyjoukko ja hahmottele sen kuvaaja (karkeasti).

8. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että funktio $f\colon]0, \infty[\to]0, \infty[$, $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$, on *aidosti vähenevä*, ts. jos $0 < x_1 < x_2$, niin $f(x_1) > f(x_2)$.