

Joukot ja alkeisfunktiot

Harjoitus 10, 26.11.2008

Kurssin suorittamiseksi on tehtävä vähintään puolet kaikista tehtävistä ja joka kerralla vähintään 3 tehtävää; tee kuitenkin aina kaikki mitkä osaat! Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä.

- (a) Jos A ja B ovat numeroituvia, niin osoita että myös $A \cup B$ on numeroituva.
(Huom: Jos haluat, voit olettaa että $A \cap B = \emptyset$.)
(b) Jos A on ylinumeroituva ja B on numeroituva, niin osoita että $A \setminus B$ on ylinumeroituva.
(Vihje: Tee antiteesi ja käytä hyväksi (a)-kohtaa.)
- (a) Etsi bijektio $g: \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \rightarrow \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.
(b) Etsi bijektio $G:]0, 1[\rightarrow]0, 1[$
(Vihje: (a)-kohdan funktiosta g saattaa olla apua.)
- Määritä alkukuva $f^{-1}(V)$ kun
(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, ja $V =]1, e\sqrt{e}[$,
(b) $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, ja $V = [\frac{1}{2}, 1]$.
- Olkoon $f: [0, 4] \rightarrow [0, 2]$, $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x + 1 & \text{jos } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{jos } 3 < x \leq 4 \end{cases}$
Osoita, että f on bijektio ja määritä f^{-1} . Piirrä myös f :n ja f^{-1} :n kuvaajat.
- Etsi esimerkit funktioista $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$ siten, että
(a) $g \circ f: A \rightarrow C$ on injektio, mutta f tai g ei ole injektio;
(b) $g \circ f: A \rightarrow C$ on surjektio, mutta f tai g ei ole surjektio.
- Osoita (esim. induktiolla), että joukolla $A = \{1, 2, \dots, n\}$ on täsmälleen 2^n osajoukkoa, ts. $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.
- Määritä $\text{sy}(847, 273)$ Eukleideen algoritmin avulla.
- Etsi 3. asteen yhtälön
$$x^3 + (3 \cdot 16^{1/3})x + 6 = 0$$
ainoa reaalijuuri ratkaisukaavan avulla.

KÄÄNNÄ!

Bonustehtävä

(tästä saa myös yhden ruksin, mutta kurssin yhteistehtävämääräksi lasketaan 80 tehtävää)

9. (a) Hotelli Hilbertissä on numeroituvasti ääretön määrä huoneita. Eräänä iltana hotelli on jo täynnä, kun paikalle saapuu matkailija joka haluaisi oman huoneen hotellista. Miten matkailijalle saadaan oma huone niin ettei kenenkään tarvitse lähteä hotellista?
- (b) Hotelli Hilbertissä on numeroituvasti ääretön määrä huoneita. Eräänä iltana hotelli on jo täynnä, kun paikalle saapuu turistibussi, jossa on numeroituvasti ääretön määrä turisteja, jotka kaikki haluaisivat oman huoneen hotellista. Miten kaikille matkailijoille saadaan huoneet niin ettei kenenkään tarvitse lähteä hotellista?