Konformisesta dimensiosta

Juha Lehrbäck

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma
Jyväskylän yliopisto,
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesäkuu 2003

Sisältö

Johdanto

Konformisen dimension määritelmää varten tarvitaan kaksi peruskäsitettä: Hausdorffin dimensio ja kvasisymmetriset kuvaukset. Metristen avaruuksien X ja Y välinen homeomorfismi $f : X \to Y$ on kvasisymmetrinen, jos se toteuttaa ehdon

$$|x-a| \leq t|x-b| \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \leq \eta(t)|f(x)-f(b)|$$

kaikilla $t > 0$ ja kaikilla $a, b, x \in X$, missä $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ on homeomorfismi (Määritelmä 3.1). Tällöin sanotaan, että X ja Y ovat kvasisymmetriset. Avaruuden X konforminen dimensio $\dim_{\mathcal{C}} X$ määritellään infimumiksi kaikkien X:n kanssa kvasisymmetristen avaruuksien Y Hausdorffin dimensioista $\dim Y$ (Määritelmä 4.1).

Konformisen dimension määritelmän perusteella tämän tutkielman keskeisin kysymys kuuluu: ”Millä tavalla kvasisymmetriset kuvaukset voivat muuttaa joukon Hausdorffin dimensiota?” Luvussa 4 osoitetaan, että dimension kasvattaminen – jopa mielivaltaisesti – on aina helppoa. Mielenkiintoisempaa onkin tutkia, miten paljon joukon Hausdorffin dimensiota voi pienentää, jolloin siis päädytään juuri konformisen dimension käsitteeseen. Oleellista on myös se, että on olemassa joukkoja, joiden konforminen dimensio on sama kuin niiden Hausdorffin dimensio; tämä pätee esimerkiksi jokaiselle $\mathbb{R}^n$:n janalle I, jolle $\dim_{\mathcal{C}} I = \dim I = 1$ (esimerkki 2 luvussa 4). Lisää esimerkkejä on luvussa 6.

Yleisessä tapauksessa joukon konformisen dimension määrittäminen tai edes arviointi ei ole helppoa. Jo Hausdorffin dimension laskeminen on usein hyvin hankalaa. Onneksi on olemassa mielenkiintoisia esimerkkejä, joissa pystytään sanomaan ainakin jotain joukon konformisesta dimensiosta. Tässä työssä tutkittavat esimerkkijoukot ovat niin sanottuja itsesimilaareja joukkoja.

Tutkielman aluksi luvussa 1 esitellään lyhyesti käytettäviä merkintöjä ja terminologiaa liittyen metrisiin avaruuksiin, tarvittaviin kuvaustyyppeihin sekä mittoihin ja mitallisuuteen. Luvussa 2 määritellään Hausdorffin mitta ja dimensio, sekä tutkitaan näiden ominaisuuksia. Lisäksi kappaleessa 2.3 tutustutaan itsesimilaareihin joukkoihin ja annetaan yksinkertainen kaava näiden Hausdorffin dimension laskemiseksi. Esimerkkeinä itsesimilaareista joukoista esitellään Sierpinskin kolmio (SK, kuva 2 sivulla 23) ja von Kochin käyrä (KK, kuva 3 sivulla 25). Pääasiallisina lähteinä tähän lukuun ovat olleet Mattila [8] (Hausdorffin mitta ja dimensio) sekä Falconer [4] ja Hutchinson [6] (itsesimilaarit joukot).

Luku 3 käsittelee kvasisymmetrisiä kuvauksia. Määritelmien jälkeen todistetaan muutamia perustuloksia, jotka auttavat myös ymmärtämään kvasisymmetristen kuvausten käyttäytymistä. Lisäksi jatkoa varten todistetaan kvasisymmetristen kuvausten jatkamista koskeva tulos. Lähteinä on käytetty Tukian ja Väisälän paperia [11], joka loi pohjan kvasisymmetristen kuvausten tutkimiselle, sekä oppikirjaa Heinonen [5].

Luvussa 4 määritellään viimein konforminen dimensio ja näytetään esimerkin avulla, miten joukon Hausdorffin dimensiota voi aina kasvattaa kvasisymmetrisesti. Kappaleessa 4.2 osoitetaan, että von Kochin käyrä on kvasisymmetrinen välin $[0,1] \subset \mathbb{R}$ kanssa, josta seuraa, että $\dim_{\mathcal{C}} KK = 1$. Pääasiallisena lähteenä on ollut [5], mutta myös paperia Tyson [12] on käytetty. Kappaleen 4.2 konstruktio on mukailtu artikkeleista [7] ja [9].

On oikeastaan aika helppo uskoa, että $\dim_{\mathcal{C}} KK = 1$, onhan von Kochin käyrä "melkein suoristuva" käyrä. Hieman kummallisempaa on, että myös Sierpinskin kolmion Hausdorffin dimensiota voidaan pienentää, eli

$$\dim_{\mathcal{C}} SK < \dim SK,$$

kuten luvussa 5 pitkällisten valmistelujen jälkeen osoitetaan. Ideana on konstruoida Sierpinskin kolmiolle luokka "hyviä" painofunktioita. Näiden avulla saadaan SK:n tavallisen euklidisen metriikan kanssa kvasisymmetrisiä metriikoita, joille SK:n dimensio on pienempi. Lähteenä on ollut paperi Tyson [12]. Lopuksi luvussa 6 esitellään lyhyesti joukkoja, joiden konforminen dimensio on sama kuin niiden Hausdorffin dimensio, sekä annetaan sovelluksena ala-arvio Sierpinskin maton konformiselle dimensiolle.

Muutamiin tekstissä vilahteleviin termeihin, jotka kantavat kuuluisien matemaatikoiden nimiä, on liitetty alaviitteiksi lyhyet tiedot näistä henkilöistä. Tämän taustalla on henkilökohtainen viehtymys matematiikan historiaan liittyviin kysymyksiin. Tiedot on saatu erinomaiselta internet-sivustolta [15].

Kiitokset

Tahdon kiittää professori Pekka Koskelaa mielenkiintoisesta tutkimusaiheesta ja ohjauksesta, sekä kärsivällisyydestä tämän tutkielman valmistumisen kanssa. Yliassistentti Esa Järvenpäälle kiitos tutkielman huolellisesta tarkastuksesta ja monista korjausehdotuksista. Kiitokset myös kaikille muille opettajilleni ja läheisilleni, joilta olen saanut paljon apua ja tukea opiskelujeni aikana.

Erityiskiitokset vaimolleni Piialle, sekä Juusolle, isin pikku kaverille: *Ilman teitä olisin kuin tyhjä joukko $\emptyset$, jolle paljon on mahdollista, mutta joka kuitenkaan ei ole mitään.*

1 Merkintöjä ja käsitteitä

1.1 Joukoista

Lukujoukoille käytetään tavanomaisia merkintöjä $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Luonnollisten lukujen joukko on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ja $\mathbb{N}_0$:lla merkitään joukkoa $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Laajennettu reaalilukujoukko on $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ luonnollisin tulkinnoin. Joukon $\overline{\mathbb{R}}$ välejä merkitään

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} \qquad \textit{avoin väli}, \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\} \qquad \textit{suljettu väli},
\end{aligned}$$

ja puoliavoimia välejä vastaavasti $(a,b]$ ja $[a,b)$, kun $-\infty \le a < b \le \infty$.

Joukko A on *numeroituva*, jos on olemassa injektio $\varphi : A \to \mathbb{N}$. Joukon A alkioiden lukumäärää, kardinaalilukua, merkitään $\operatorname{card} A$:lla. Jos $\operatorname{card} A < \infty$, on A *äärellinen.*

Joukon X *potenssijoukko* $\mathcal{P}(X)$ on kaikkien X:n osajoukkojen muodostama joukko, toisin sanoen $\mathcal{P}(X) = \{A : \ A \subset X\}$. Tyhjälle joukolle käytetään symbolia $\emptyset$.

Kun X on joukko, merkitään tavalliseen tapaan $X^2 = X \times X$, ja niin edelleen, eli kun $n \in \mathbb{N}$, X^n on X:n n-kertainen karteesinen tulo itsensä kanssa.

1.2 Metriset avaruudet

1.2.1 Metriikka

Olkoon X joukko, jossa on annettu kuvaus $d : X \times X \to [0, \infty)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in X$:

(i) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (*kolmioepäyhtälö*),

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (*symmetrisyys*),

(iii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*definiittisyys*).

Tällöin sanotaan, että kuvaus d on *metriikka* ja pari (X,d) – tai usein lyhyesti vain X – on *metrinen avaruus.* Luku $d(x,y)$ on avaruuden X pisteiden x ja y välinen etäisyys. Kun $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, määritellään joukon A *halkaisija*

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : \ x, y \in A\}.$$

Joukko $A \subset X$ on *rajoitettu*, mikäli $d(A) < \infty$, ja *rajoittamaton*, jos $d(A) = \infty$. Kun $A, B \subset X$ ja $x \in X$, määritellään

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : \ a \in A, \ b \in B\}, \quad d(x,A) = d\big(\{x\}, A\big).$$

Metrisen avaruuden osajoukko A on myös aina metrinen avaruus; luonnollinen metriikka saadaan X:n metriikan d rajoittumasta joukkoon $A \times A$.

1.2.2 Avaruus $\mathbb{R}^n$

Merkitään *euklidisen avaruuden* $\mathbb{R}^n$:n pisteitä $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *euklidinen sisätulo* $(x|y)$ määritellään

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \, .$$

Tämä määrää *euklidisen normin* $|\cdot|$,

$$|x| = \sqrt{(x|x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Normin avulla saadaan tunnetusti aina määriteltyä metriikka, tässä tapauksessa *euklidinen metriikka*

$$d(x, y) = |x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \qquad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Huomautus. Otetaan käyttöön vaihtoehtoinen merkintä $|x-y|$ tarkoittamaan myös muiden metristen avaruuksien pisteiden x ja y välistä etäisyyttä, siis $|x - y| = d(x, y)$, kun $x, y \in X$.

1.2.3 Euklidinen taso $\mathbb{R}^2$ ja kompleksiluvut $\mathbb{C}$

Muutamissa $\mathbb{R}^2$:n esimerkeissä käytetään kompleksilukumerkintöjä samaistamalla piste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja kompleksiluku $z = x + iy \in \mathbb{C}$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja i on *imaginaariyksikkö*. Kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskut toimivat kuten $\mathbb{R}$:n vastaavat, kun vain muistetaan peruskaava $i^2 = -1$. Kompleksinen eksponenttifunktio $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ voidaan määritellä kaavalla

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C} \, .$$

Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, kertominen vastaa tason kiertoa kulman α verran origon ympäri.

1.2.4 Avoimet, suljetut ja kompaktit joukot

Kun X on metrinen avaruus, $a \in X$ ja $0 < r < \infty$, määritellään X:n *a-keskiset, r-säteiset pallot*

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in X : \ d(a,x) < r\} \qquad \textit{avoin pallo,} \\ \overline{B}(a,r) &= \{x \in X : \ d(a,x) \le r\} \qquad \textit{suljettu pallo.} \end{aligned}$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ voidaan käyttää selvyyden vuoksi myös merkintöjä $B^n(a,r)$ ja $\overline{B^n}(a,r)$. Kun $B = B(a,r)$ ja $C > 0$, merkitään lyhyesti $CB = B(a,Cr)$ ja samoin $\overline{CB} = \overline{B}(a,Cr)$.

Joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos jokaiselle $x \in U$ löytyy $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset U$. Joukko $E \subset X$ on *suljettu*, mikäli sen *komplementti* $X \setminus E$ on avoin. Joukon $A \subset X$ *sulkeuma* $\overline{A}$ on pienin suljettu joukko, joka sisältää A:n.

Joukkoperhe $\mathcal{U} = \big(U_i\big)_{i\in I}$ on joukon $A \subset X$ *avoin peite*, jos $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ ja $U_i \subset X$ on avoin kaikilla $i \in I$. Peitteellä $\mathcal{U}$ on *äärellinen alipeite*, jos löytyy $N \in \mathbb{N}$ ja joukot $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{U}$, joille $A \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$. Joukko $K \subset X$ on *kompakti*, mikäli jokaisella K:n avoimella peitteellä on äärellinen alipeite. Kompakti joukko on aina suljettu ja rajoitettu, mutta *Heine-Borelin lause* sanoo, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ joukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.

1.2.5 Avaruuksien luokittelua

Metrinen avaruus X (vastaavasti joukko $A \subset X$) on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa avoimet epätyhjät joukot $U, V \subset X$ siten, että

$$X \subset U \cup V\,, \quad X \cap U \neq \emptyset \neq X \cap V \quad \text{ja} \quad U \cap V \cap X = \emptyset. \tag{1}$$

Muutoin X on *yhtenäinen*.

Metrinen avaruus X on *separoituva*, mikäli on olemassa numeroituva osajoukko $N \subset X$ jolle $\overline{N} = X$. Esimerkiksi $\mathbb{R}^n$ on separoituva, joukoksi N voidaan valita $\mathbb{Q}^n$.

Avaruuden X jono (x_i) on *Cauchy*[1]*-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ löydetään $n \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_i - x_j| < \varepsilon$, kun $i, j \geq n$. Avaruus X on *täydellinen*, mikäli sen jokainen Cauchy-jono suppenee. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen, mutta esimerkiksi $\mathbb{Q}^n$ ei ole.

[1] Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857, Ranska

1.3 Funktioista

Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Kun $f : X \to Y$ on kuvaus (eli funktio), merkitään joukon $A \subset X$ kuvajoukkoa $f(A)$. Jos f on bijektio, f:n käänteiskuvausta merkitään f^{-1}:llä. Bijektio f on *homeomorfismi*, jos sekä f että f^{-1} ovat jatkuvia. Kun f on kuvaus $X \to Y$ ja $A \subset X$, on kuvaus $f|_A : A \to Y$, $f|_A(x) = f(x)$ kun $x \in A$, *f:n rajoittuma joukkoon A.*

1.3.1 Lipschitz-kuvaukset ja similitudit

Kuvaus $f : X \to Y$ on *(L-)Lipschitz*[2], mikäli on olemassa vakio $L > 0$, jolle

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Mikäli kuvaus g toteuttaa Lipschitz-ehdon vakiolle $0 < L < 1$, sanotaan, että g on *kontraktio.* Tunnettu *Banachin kiintopistelause* (ks. esim. Väisälä [14, (12.8)]) sanoo, että täydellisen metrisen avaruuden kontraktiolla g on yksikäsitteinen kiintopiste x, jolle siis $g(x) = x$.

Kuvaus $f : X \to Y$ on *(L)-bilipschitz*, jos on olemassa vakio $L \geq 1$ siten, että kaikilla $x, y \in X$

$$\frac{|x-y|}{L} \leq |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \tag{2}$$

Bilipschitz-kuvaus on selvästi aina injektio.

Kuvausta $S : X \to Y$ sanotaan *(λ-)similitudiksi*, jos on olemassa vakio $\lambda > 0$ jolle

$$|S(x) - S(y)| = \lambda|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Similitudit ovat selvästi injektioita, ja λ-similitudin S käänteiskuvaus $S^{-1} : S(X) \to X$ on $(1/\lambda)$-similitudi. Kuvaus S on *isometria*, jos se on 1-similitudi. Isometria siis säilyttää etäisyydet. Jatkossa tarvittavat similitudit ovat pääasiassa kontraktioita, joten näille $0 < \lambda < 1$. Tällöin sanotaan, että λ on S:n *kutistussuhde*. Joukot A ja B ovat *similaarit* (vastavasti *isometriset*), jos on olemassa bijektiivinen similitudi (isometria) $S : A \to B$.

Lineaarinen kuvaus $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on *ortogonaali*, jos se säilyttää sisätulon eli

$$(Ox|Oy) = (x|y) \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Koska $\mathbb{R}^n$:n metriikka on määritelty sisätulon avulla, seuraa sisätulojen säilymisestä etäisyyksien säilyminen. Siten ortogonaalikuvaus O on aina erityisesti isometria. Kun $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on λ-similitudi, $0 < \lambda < 1$, voidaan S

[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 1832–1903, Saksa

esittää muodossa

$$S(x) = a + \lambda\, O(x-a), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

missä $a \in \mathbb{R}^n$ on S:n kiintopiste ja O on $\mathbb{R}^n$:n ortogonaalikuvaus. (Katso Hutchinson [6, (2.3)].)

1.3.2 Polut ja käyrät

Olkoon X metrinen avaruus ja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli. Jatkuvaa kuvausta $\gamma : [a,b] \to X$ kutsutaan *poluksi*. Polun kuvajoukkoa $\gamma([a,b])$ merkitään myös γ:lla ja sanotaan *käyräksi*. *Käyrän γ pituus* $\operatorname{len}(\gamma)$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{len}(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{N} \left|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\right|, \tag{3}$$

missä supremum otetaan yli kaikkien välin $[a,b]$ äärellisten jakojen $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{N-1} \leq a_N = b$, missä $N \in \mathbb{N}$. Jos halutaan korostaa metriikkaa d, jossa γ:n pituus lasketaan, voidaan merkitä $\operatorname{len}(\gamma) = \operatorname{len}_d(\gamma)$. Käyrä γ on *suoristuva* (metriikassa d), jos $\operatorname{len}_d(\gamma) < \infty$.

Kun $\gamma : [a,b] \to X$ on polku ja $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$, sanotaan, että *käyrä γ yhdistää x:n ja y:n (X:ssä)*. Tällöin voidaan merkitä $\gamma = \gamma^{x,y}$.

Yksinkertaisin esimerkki käyrästä on avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioiden y ja z välinen *jana*

$$[y,z] = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = y + t(z-y) \text{ jollekin } t \in [0,1]\right\},$$

jolle $\operatorname{len}([y,z]) = |y-z|$. Hieman monimutkaisempi käyrä on $\mathbb{R}^n$:n *murtoviiva* I, joka koostuu äärellisen monesta janasta,

$$I = [a_1,a_2] \cup [a_2,a_3] \cup \cdots \cup [a_{n-2},a_{n-1}] \cup [a_{n-1},a_n]\,,$$

missä siis $n \in \mathbb{N}$ ja $a_i \in \mathbb{R}^n$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$.

1.4 Mitta-avaruudet

1.4.1 σ-algebra

Määritelmä 1.1. Joukon X potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ osajoukko Γ on *X:n σ-algebra*, mikäli

(i) $\emptyset \in \Gamma$ ja $X \in \Gamma$,

(ii) $A \in \Gamma \ \Rightarrow\ X \setminus A \in \Gamma$,

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \Gamma \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Gamma.$

Määritelmä 1.2. Joukon X *Borel*[3]*-joukkojen* kokoelma $\mathcal{B}$ on X:n suppein avoimet joukot sisältävä σ-algebra. Toisin sanoen, jos Γ on X:n σ-algebra, joka sisältää kaikki X:n avoimet joukot, niin $\mathcal{B} \subset \Gamma$.

1.4.2 Mitta ja mitallisuus

Yleisesti ottaen mitta on olio, joka kertoo jotain joukkojen "koosta". Tämä koko jota mitataan voi olla hyvinkin konkreettinen: joukon alkioiden lukumäärä, joukon pinta-ala tai tilavuus, käyrän pituus, ja niin edelleen. Mitta voi olla myös erikoisempi, voidaan esimerkiksi "mitata" kuuluuko joku tietty alkio joukkoon (*Diracin mitta*), tai sitten mitta voi olla täysin abstrakti vailla konkreettista vertailukohtaa. Mitan määritelmä onkin hyvin väljä; riittää, että tyhjä joukko on aina *nollanmittainen*, osajoukon mitta ei ylitä koko joukon mittaa ja numeroituvan yhdisteen mitta ei ylitä summaa yksittäisten joukkojen mitoista:

Määritelmä 1.3. Joukkofunktio $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on *mitta*, mikäli se totetuttaa seuraavat ehdot:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$, kun $A \subset B \subset X$ *(monotonisuus)*,

(iii) $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$, kun $A_i \subset X \ \forall i \in \mathbb{N}$
(numeroituva sub-additiivisuus).

Pari (X, μ) on tällöin *mitta-avaruus*.

Määritelmä 1.4. (i) Joukko $A \subset X$ on *μ-mitallinen*, mikäli

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset X.$$

(ii) Avaruuden X μ-mitallisten joukkojen kokoelmaa merkitään

$$\mathcal{M}_\mu = \{A \subset X : \ A \text{ mitallinen}\}.$$

Huomautus. Jos mitta on asiayhteydestä selvä, merkitään yleensä lyhyesti vain $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mu$.

[3] Félix Édouard Justin Émile Borel, 1871–1956, Ranska

Lause 1.5. *Kun μ on mitta joukossa X, on μ-mitallisten joukkojen kokoelma $\mathcal{M}$ σ-algebra (joukossa X). Lisäksi rajoittuma $\mu|_{\mathcal{M}}$ on numeroituvasti additiivinen, s.o. pistevieraille $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$*

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i). \tag{4}$$

Todistus. Mittateorian alkeiden perustulos, katso esimerkiksi Purmonen [10, (4.3)]. □

Huomautus. Monissa yhteyksissä mitaksi sanotaan joukon X σ-algebran Γ kuvausta $\nu : \Gamma \to [0, \infty]$, jolle $\nu(\emptyset) = 0$ ja joka on numeroituvasti additiivinen. Tällöin määritelmän 1.3 mukaista kuvausta μ sanotaan *ulkomitaksi.* Koska kuitenkin lauseen 1.5 mukaan μ-mitallisten joukkojen kokoelma $\mathcal{M}$ on X:n σ-algebra ja μ:n rajoittuma joukkoon $\mathcal{M}$ toteuttaa ehdon (4), voidaan määritelmän 1.3 mukainen (ulko)mitta aina tarvittaessa käsittää myös tämän vaihtoehtoisen määritelmän mukaisena (subadditiivisena) mittana, kunhan tarkastelut rajoitetaan vain mitallisiin joukkoihin.

Määritelmä 1.6. Joukon X mittaa μ sanotaan *Borel-mitaksi*, mikäli Borel-joukot ovat mitallisia eli $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_\mu$.

1.4.3 Lebesguen mitta

Lebesguen[4] *mitta m_n* on $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen (tilavuus-)mitta. Arvolla $n = 2$ ($n = 3$) $m_n(A)$ on yksinkertaisesti (mitallisen) joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ pinta-ala (tilavuus). Esitetään lyhyesti tämän mitan täsmällinen konstruktio:

Joukko $I \subset \mathbb{R}^n$ on *rajoitettu avoin väli*, jos löytyy luvut $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, siten, että

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_i < x_i < b_i\,,\ i = 1, \dots, n\}\,.$$

Välin $I \subset \mathbb{R}^n$ *geometrinen mitta* $\lambda(I)$ on

$$\lambda(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n).$$

Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen mitta $m_n(A)$ määritellään tämän geometrisen *esimitan* avulla. Merkitään

$$\mathcal{K} = \{I \in \mathbb{R}^n : \ I \ \text{ on rajoitettu avoin väli}\}\,,$$

ja asetetaan määritelmä:

[4] Henri Léon Lebesgue, 1875–1941, Ranska

Määritelmä 1.7. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen mitta on

$$m_n(A) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(I_j) : \; A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \, , \; I_j \in \mathcal{K} \right\} .$$

On helppo todeta, että m_n toteuttaa mitan vaatimukset 1.3 (i)–(iii); todistus on itse asiassa aivan samanlainen kuin lemmalle 2.2 myöhemmin. Lebesguen mitta on Borel-mitta, sillä kaikki $\mathbb{R}^n$:n avoimet joukot ovat m_n-mitallisia (katso esimerkiksi [10, (7.4) ja (7.6)]).

Mitan m_n hyvistä ominaisuuksista huolimatta silläkin on omat puutteensa. Esimerkiksi kaikki $\mathbb{R}^n$:n joukot eivät ole m_n-mitallisia, katso [10, (7.10)].

2 Hausdorffin mitta ja dimensio

2.1 Hausdorffin mitat

Oletetaan jatkossa koko ajan, että X on separoituva metrinen avaruus.

Määritelmä 2.1. Olkoon $0 \leq s < \infty$ ja $0 < \delta \leq \infty$. Avaruuden X *s-ulotteinen Hausdorffin*[5] *δ-mitta* $\mathcal{H}^s_\delta$ määritellään asettamalla

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^s \ : \ A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \, , \ d(E_i) \leq \delta \right\}, \tag{5}$$

kun $A \subset X$. Tässä käytetään tulkintoja $0^0 = 1$ ja $d(\emptyset)^s = 0$ kaikilla $0 \leq s < \infty$.

Huomautus. Avaruuden X separoituvuudesta seuraa, että

$$\forall\, \delta > 0 \ \exists\, E_1, E_2 \ldots \subset X : \ X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \, , \ d(E_i) < \delta, \tag{6}$$

ja siten (5):ssä infimumia ei koskaan oteta tyhjästä joukosta. Separoituvuus ei kuitenkaan ole välttämätön ehto, sillä $\mathcal{H}^s_\delta$ on hyvin määritelty avaruudessa X, jos X toteuttaa ehdon(6).

Lemma 2.2. *Hausdorffin δ-mitta $\mathcal{H}^s_\delta$ on mitta kaikilla* $0 \leq s < \infty, \ 0 < \delta \leq \infty$.

Todistus. Olkoon $0 \leq s < \infty$ ja $0 < \delta \leq \infty$. Täytyy siis varmistaa, että määritelmän 1.3 vaatimukset (i)–(iii) ovat voimassa. (i) on triviaali tulkinnan $d(\emptyset)^s = 0$ nojalla.

Jos $A \subset B \subset X$, ovat kaikki B:n peitteet myös A:n peitteitä, ja siten (5):ssa A:lle otetaan infimumia vähintään yhtä suuresta joukosta kuin B:lle. Tästä seuraa että $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$, joten (ii) pätee.

Olkoot sitten $A_1, A_2, \ldots \subset X$. Kun $\varepsilon > 0$, kullekin $A_i, \ i \in \mathbb{N}$, löytyy joukot $E_{i,j}$, joille $d(E_{i,j}) \leq \delta$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, $A_i \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_{i,j}$ ja

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} d(E_{i,j})^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + 2^{-i}\varepsilon.$$

[5]Felix Hausdorff, 1868–1942, Saksa

Tällöin $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_{i,j}$, ja siten

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} d(E_{i,j})^s \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + 2^{-i}\varepsilon\right) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan 1.3:n vaatimus (iii). $\square$

Yleensä $\mathcal{H}^s_\delta$ ei kuitenkaan ole kovin hyvä mitta, esimerkiksi Borel-joukot eivät välttämättä ole $\mathcal{H}^s_\delta$-mitallisia. Paljon käyttökelpoisempi ja tärkeämpi mitta saadaan raja-arvona mitoista $\mathcal{H}^s_\delta$:

Määritelmä 2.3. Avaruuden X *s-ulotteinen Hausdorffin mitta* $\mathcal{H}^s$ määritellään asettamalla

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A),$$

kun $A \subset X$.

Kun $0 < \varepsilon < \delta \le \infty$ ja $A \subset X$, on selvästi $\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$, koska jälkimmäistä määrättäessä otetaan infimum pienemmästä joukosta. Siten saadaan

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A). \tag{7}$$

Lause 2.4. *Hausdorffin s-ulotteinen mitta* $\mathcal{H}^s$ *on mitta kaikilla* $0 \le s < \infty$.

Todistus. On siis taas tarkastettava 1.3:n kohdat (i)–(iii). Olkoon $0 \le s < \infty$. Koska $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ kaikilla $\delta > 0$, on myös $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ ja (i) on voimassa.

Kun $A \subset B \subset X$, on lemman 2.2 mukaan $\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(B)$ kaikilla $\delta > 0$. Siten sama arvio pätee rajallakin, eli $\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(B)$ ja saadaan (ii).

Olkoot sitten $A_1, A_2, \ldots \subset X$. Kun $\varepsilon > 0$, löydetään $\delta > 0$, jolle

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \le \mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) + \varepsilon.$$

Koska 2.2:n mukaan $\mathcal{H}^s_\delta$ on sub-additiivinen, saadaan ylläolevan perusteella ja ottamalla lopuksi supremum yli kaikkien $\delta > 0$ (vrt. (7))

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \varepsilon \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i) + \varepsilon.$$

Kun annetaan $\varepsilon \to 0$, saadaan (iii). $\square$

Lause 2.5. *Mitta $\mathcal{H}^s$ on Borel-mitta kaikilla* $0 \le s < \infty$.

Todistus. Katso Mattila [8, (4.2)]. $\square$

Hausdorffin mittaa määriteltäessä voidaan (5):ssä rajoittaa käytettävien peitejoukkojen E_i määrää vaatimalla, että joukot ovat avoimia tai suljettuja. Merkitään

$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{S},\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \ : \ A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\,,\ d(E_i) \le \delta,\ E_i \text{ suljettu} \right\},$$
$$\mathcal{H}^s_{\mathcal{A},\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \ : \ A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\,,\ d(E_i) \le \delta,\ E_i \text{ avoin} \right\}.$$

Lemma 2.6. *Kun $A \subset X$, $0 \le s < \infty$ ja $0 < \delta \le \infty$,*

$$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_{\mathcal{S},\delta}(A) = \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_{\mathcal{A},\delta}(A). \tag{8}$$

Todistus. Peitejoukot E_i voidaan olettaa suljetuiksi, sillä tunnetusti $d(E_i) = d(\overline{E_i})$ ja $\overline{E_i}$ on suljettu. Siten $\mathcal{H}^s_\delta = \mathcal{H}^s_{\mathcal{S},\delta}$ kaikilla $\delta > 0$ ja (8):n ensimmäinen yhtäsuuruus on voimassa.

Toisen yhtäsuuruuden todistamiseksi huomataan ensin, että kun $A \subset X$ ja $\eta > 0$, joukolle $A_\eta = \{x \in X : \ d(x, A) < \eta\}$ pätee: A_η on avoin, $A \subset A_\eta$ ja $d(A_\eta) \le d(A) + 2\eta$. Olkoon nyt $A \subset X$ ja $\varepsilon, \delta > 0$. Valitaan joukot $E_1, E_2, \ldots \subset X$ siten, että $d(E_i) \le \delta$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$,

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \qquad \text{ja} \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + \varepsilon\,.$$

Määritellään joukot $E_{\eta,i}$, $i \in \mathbb{N}$, asettamalla $E_{\eta,i} = (E_i)_{\eta_i}$, missä

$$\eta_i = \min\Big\{\delta/2,\ \big((d(E_i)^s + \varepsilon\, 2^{-i})^{1/s} - d(E_i)\big)/2\Big\} \qquad \text{jos } s > 0$$

ja $\eta_i = \delta/2$ jos $s = 0$. Tällöin siis $E_{\eta,i}$ on avoin, $E_i \subset E_{\eta,i}$ ja $d(E_{\eta,i}) \le 2\delta$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siten

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{2\delta}(A) \le \mathcal{H}^s_{\mathcal{A},2\delta}(A) &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_{\eta,i})^s \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \big(d(E_i)^s + \varepsilon\, 2^{-i}\big)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s + \varepsilon \le \mathcal{H}^s_\delta(A) + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

josta antamalla $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ saadaan $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_{\mathcal{A},\delta}(A)$. $\square$

Millaisia Hausdorffin mitat sitten ovat s:n eri arvoilla? Kun $s = 0$ ja joukko $A \subset X$ äärellinen, on $A = \bigcup_{i=1}^{N}\{a_i\}$, missä $N = \operatorname{card} A$. Koska $d(\{a_i\}) = 0$ ja tulkinnan mukaan $0^0 = 1$, saadaan $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^{N} d(\{a_i\})^0 = N$. Kun joukko A on ääretön, saadaan vastaavasti $\mathcal{H}^0(A) = \infty = \operatorname{card} A$, joten 0-ulotteinen Hausdorffin mitta antaa aina joukon alkioiden lukumäärän.

Hausdorffin 1-ulotteista mittaa määritettäessä lasketaan yhteen pienten joukkojen halkaisijoita. Tällöin on luontevaa ajatella, että mitta $\mathcal{H}^1$ kertoo jotain esimerkiksi X:n käyrien pituudesta. Voidaankin osoittaa, että jos vaikkapa $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ on suoristuva käyrä, antaa $\mathcal{H}^1(\gamma)$ käyrän γ pituuden. Reaalilukujen joukossa $\mathcal{H}^1$ yhtyy Lebesguen mittaan m_1, kuten seuraava lemma osoittaa:

Lemma 2.7. *Kun $A \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{H}^1(A) = m_1(A)$.*

Todistus. Olkoon siis $A \subset R$. Kun $I = (a, b)$ on $\mathbb{R}$:n avoin väli, pätee triviaalisti $d(I) = b - a = \lambda(I)$. Olkoon $\varepsilon, \delta > 0$ ja $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, missä E_i:t ovat avoimia, $d(E_i) \leq \delta$ ja $\sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i) \leq \mathcal{H}^1_\delta(A) + \varepsilon$. Lisäksi voidaan olettaa, että jokainen E_i on avoin väli, sillä $\mathbb{R}$:n avoin joukko E voidaan aina peittää avoimella välillä I jolle $d(I) = d(E)$. Siten

$$m_1(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(E_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i) \leq \mathcal{H}^1_\delta(A) + \varepsilon\,,$$

ja antamalla $\varepsilon, \delta \to 0$ saadaan $m_1(A) \leq \mathcal{H}^1(A)$.

Kääntäen, joukko A voidaan peittää avoimilla väleillä I_i, joille $d(I_i) \leq \delta$ ja $\sum_{i\in\mathbb{N}} d(I_i) \leq m_1(A) + \varepsilon$. Siten

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} d(I_i) \leq m_1(A) + \varepsilon,$$

josta seuraa $\mathcal{H}^1(A) \leq m_1(A)$. □

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ n-ulotteinen Hausdorffin mitta on vain n:stä riippuvaa vakiokerrointa vaille sama kuin $\mathbb{R}^n$:n Lebesguen mitta m_n:

$$\mathcal{H}^n = 2^n \alpha(n)^{-1}\, m_n,$$

missä $\alpha(n) = m_n(B^n(0,1))$. Tämä yhtälö ei tosin ole aivan triviaali, sillä $\mathcal{H}^n$:n konstruktiossahan on mahdollista peittää joukko mielivaltaisilla pienillä joukoilla, kun taas m_n:n tapauksessa joukko peitetään avoimilla väleillä. Todistus perustuu ns. *isodiametriseen yhtälöön*, ks. Evans ja Gariepy [3, (2.2)]. Joissakin yhteyksissä Hausdorffin mitat normeerataan siten, että $\mathcal{H}^n = m_n$, mutta tässä työssä se ei ole tarpeen.

Jos A on $\mathbb{R}^n$:n "riittävän siisti" m-ulotteinen pinta, antaa $\mathcal{H}^m(A)$ vastaavasti vakiokerrointa vaille tämän pinnan "luonnollisen" mitan (ks. [3]).

Seuraava lause kertoo, miten Hausdorffin mitta käyttäytyy Lipschitz-kuvausten ja similitudien kanssa:

Lause 2.8. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, $A \subset X$ ja $0 \le s < \infty$.*
(i) Jos $f : X \to Y$ on L-Lipschitz, niin

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le L^s\, \mathcal{H}^s(A).$$

(ii) Jos $S : X \to Y$ on λ-similitudi, niin

$$\mathcal{H}^s(S(A)) = \lambda^s\, \mathcal{H}^s(A).$$

Todistus. Todistetaan ensin väite (i). Koska $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ kaikille $x, y \in X$, on $d\big(f(E)\big) \le L\, d(E)$ kaikille joukoille $E \subset X$. Kun $A \subset X$ ja $\delta, \varepsilon > 0$, valitaan joukot $E_1, E_2, \ldots \subset X$ siten, että $d(E_i) \le \delta/L$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$,

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \le \mathcal{H}^s_{\delta/L}(A) + \varepsilon\,.$$

Koska nyt

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(E_i)$$

ja $d\big(f(E_i)\big) \le \delta$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(f(A)) &\le \sum_{i\in\mathbb{N}} d\big(f(E_i)\big)^s \le L^s \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \\ &\le L^s\big(\mathcal{H}^s_{\delta/L}(A) + \varepsilon\big) \le L^s\big(\mathcal{H}^s(A) + \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $\delta > 0$, saadaan väite (i).

Väite (ii) seuraakin suoraan edellisestä, sillä nyt S on λ-Lipschitz ja $S^{-1} : S(X) \to X$ on $(1/\lambda)$-Lipschitz, joten (i):n perusteella

$$\mathcal{H}^s(S(A)) \le \lambda^s\, \mathcal{H}^s(A), \quad \mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s\big(S^{-1}(S(A))\big) \le \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^s \mathcal{H}^s(S(A)).$$

Nämä yhdistämällä saadaan haluttu tulos $\mathcal{H}^s(S(A)) = \lambda^s\, \mathcal{H}^s(A)$. $\square$

Huomautus. Lausesta 2.8 seuraa erityisesti, että isometriat eivät muuta joukkojen Hausdorffin mittoja.

Yhtenäisten joukkojen 1-ulotteiselle Hausdorffin mitalle saadaan lähes triviaali alaraja joukon halkaisijasta; tämä yksinkertainen tulos antaa tutkielman ensimmäisen viittauksen konformiseen dimensioon ja myös keinon sen yksinkertaiseen arviointiin (vertaa lauseisiin 2.14 ja 4.7).

Lause 2.9. *Olkoon $A \subset X$ yhtenäinen. Tällöin*

$$\mathcal{H}^1(A) \geq d(A).$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$. Jos $d(A) < \infty$, valitaan pisteet $a, b \in A$ siten, että $d(A) \leq d(a,b) + \varepsilon$, ja jos $d(A) = \infty$, valitaan $a, b \in A$, joille $d(a,b) \geq N$. Määritellään kuvaus $f : A \to [0,\infty)$ asettamalla $f(x) = d(a,x)$. Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$|f(x) - f(y)| = \big|\, d(a,x) - d(a,y) \,\big| \leq d(x,y)\,,$$

joten f on 1-Lipschitz ja siis $d\big(f(A)\big) \leq d(A)$. Koska f on jatkuva, on $f(A)$ yhtenäinen ja siten $\mathbb{R}$:n väli. Valitsemalla $x = a$ ja $x = b$ nähdään, että $0 \in f(A)$ ja $d(a,b) \in f(A)$, joten $d\big(f(A)\big) \geq d(a,b)$. Koska $f(A)$ on väli, on

$$\mathcal{H}^1\big(f(A)\big) \overset{2.7}{=} m_1\big(f(A)\big) = d\big(f(A)\big),$$

ja lauseen 2.8 perusteella saadaan

$$\mathcal{H}^1(A) \geq \mathcal{H}^1\big(f(A)\big) = d\big(f(A)\big) \geq d(a,b) \geq d(A) - \varepsilon \quad (\text{ tai } \geq N\,).$$

Antamalla $\varepsilon \to 0$ (tai $N \to \infty$) väite seuraa. $\square$

Seuraava tärkeä tulos kertoo, miten Hausdorffin mitat suhtautuvat toisiinsa parametrin s eri arvoilla:

Lause 2.10. *Olkoot $0 \leq s < t < \infty$ ja $A \subset X$. Tällöin*

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^t(A) = 0$,

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Todistus. Valitaan taas joukot $E_1, E_2, \ldots \subset X$ siten, että $d(E_i) \leq \delta$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$,

$$A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \quad \text{ja} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1.$$

Tällöin

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i\in\mathbb{N}} d(E_i)^s \leq \delta^{t-s}\big(\mathcal{H}^s_\delta(A) + 1\big). \tag{9}$$

Kun oletetaan että $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, saadaan (9):sta

$$\mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) = 0,$$

sillä $t - s > 0$ ja $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \mathcal{H}^s(A) < \infty$. Siten (i) pätee. Jos taas oletetaan että $\mathcal{H}^t(A) > 0$, täytyy olla $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, sillä muuten joudutaan edellä olevan päättelyn nojalla ristiriitaan. Siis myös (ii) pätee ja lause on todistettu. $\square$

2.2 Hausdorffin dimensio

Kuten huomattiin, lause 2.10 kertoo miten joukon $A \subset X$ Hausdorffin mitta muuttuu parametrin s kasvaessa: Jos jollakin $0 \leq s_0 < \infty$ on $0 < \mathcal{H}^{s_0}(A) < \infty$, on kaikille $0 \leq s < s_0$ $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ ja kaikille $s_0 < t < \infty$ $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Joukon $A \subset X$ Hausdorffin mitta voi siis olla positiivinen ja äärellinen täsmälleen yhdellä $s_0 \in [0, \infty)$. Tämä antaa motivaation seuraavaan, tämän tutkielman kannalta erittäin keskeiseen määritelmään:

Määritelmä 2.11. Joukon $A \subset X$ *Hausdorffin dimensio* $\dim A$ määritellään asettamalla

$$\begin{aligned} \dim A &= \sup\big\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\big\} = \sup\big\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\big\} \\ &= \inf\big\{t : \mathcal{H}^t(A) < \infty\big\} = \inf\big\{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\big\}. \end{aligned}$$

Huomautus. Jotkut määritelmän joukoista voivat olla tyhjiä, mutta tällöin ne voidaan jättää huomioimatta; dimensio saadaan jäljelle jäävistä epätyhjistä joukoista. Lauseen 2.10 mukaan määritelmä on järkevä, sillä yllä olevat supremumit ja infimumit ovat todella aina samoja.

Tapaus $s = \dim A$ on siis ainoa, jolla voi olla $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, mutta on tietysti myös tapauksia, joissa $\mathcal{H}^{\dim A}(A) = 0$ tai $\mathcal{H}^{\dim A}(A) = \infty$. Yleensä – ainakin tässä tutkielmassa – ollaan kuitenkin paljon kiinnostuneempia joukon Hausdorffin dimensiosta kuin $\dim A$-ulotteisesta Hausdorffin mitasta.

Aikaisemmin todettiin, että joukon mitta kertoo (yleensä) jotain joukon koosta. Mitä dimensio sitten kertoo? Tarkastellaan esimerkiksi $\mathbb{R}^3$:n osajoukkoja $I_0 = \{0\}$, $I_1 = [0,1] \times \{0\} \times \{0\}$, $I_2 = [0,1] \times [0,1] \times \{0\}$ ja $I_3 = [0,1]^3$. Tällöin $m_3(I_i) = 0$, kun $i = 0, 1, 2$ ja $m_3(I_3) = 1$. Joukoilla I_0, I_1 ja I_2 on siis sama Lebesguen mitta, vaikka ne ovat toisaalta hyvin "eri kokoisia". Näille joukoille on $\dim(I_i) = i$ ja $0 < \mathcal{H}^i(I_i) < \infty$ kaikilla $i = 0, 1, 2, 3$. Siis myös dimensio kertoo jotain joukon koosta; dimensio antaa tavallaan kokoluokan, jossa joukkoa tulee mitata. Sama näkyy siinä, että joukon $A \subset X$ Hausdorffin mitta voi olla positiivinen ja äärellinen vain silloin, kun joukkoa mitataan "oikeassa kokoluokassa", $\dim A$-ulotteisella Hausdorffin mitalla.

Todistetaan seuraavaksi muutama Hausdorffin dimension ominaisuuksia koskeva tulos.

Lemma 2.12. *Olkoot $A, B, A_1, A_2, \ldots \subset X$. Tällöin*

(i) $A \subset B \subset X \;\Rightarrow\; \dim A \leq \dim B$

(ii) $\dim \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim A_i$.

Todistus. (i) Jos $\dim A = 0$, on väite selvä. Muuten, jos $\mathcal{H}^s(A) > 0$, on myös $\mathcal{H}^s(B) > 0$ monotonisuuden perusteella. Siten

$$\dim A = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} \leq \sup\{s : \mathcal{H}^s(B) > 0\} = \dim B.$$

(ii) Merkitään $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Edellisen perusteella $\dim U \geq \dim A_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Sub-additiivisuudesta seuraa, että jos $\mathcal{H}^s(U) > 0$, on $\mathcal{H}^s(A_i) > 0$ jollakin $i \in \mathbb{N}$, ja siten $\dim U \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim A_i$. Nämä yhdessä todistavat väitteen (ii). □

Monista Hausdorffin mitoille todistetuista lauseista saadaan seurauksina vastaavanlaisia tuloksia Hausdorffin dimensiolle. Todetaan esimerkiksi dimension käyttäytymisestä Lipschitz-kuvausten ja similitudien kanssa kertova, lauseesta 2.8 seuraava tulos:

Lause 2.13. *Olkoon $A \subset X$.*
(i) Kun $f : X \to Y$ on Lipschitz, $\dim f(A) \leq \dim A$.
(ii) Kun $S : X \to Y$ on similitudi, $\dim S(A) = \dim A$.

Todistus. Jos f on Lipschitz, $s \geq 0$ ja $\mathcal{H}^s(A) = 0$, on lauseen 2.8(i) perusteella myös $\mathcal{H}^s(f(A)) = 0$. Siten suoraan määritelmästä 2.11 saadaan $\dim f(A) \leq \dim A$. Kohta (ii) seuraa vieläkin suoremmin 2.8(ii):sta. □

Lauseesta 2.9 saadaan edelleen alaraja (epätriviaalien) yhtenäisten joukkojen dimensiolle:

Lause 2.14. *Jos $A \subset X$ on yhtenäinen ja* $\operatorname{card} A \geq 2$, *on*

$$\dim A \geq 1.$$

Todistus. Valitaan $a \neq b \in A$. Tällöin lause 2.9 antaa $\mathcal{H}^1(A) \geq d(A) \geq d(a,b) > 0$, josta väite seuraa. □

Huomautus. Samankaltaisella päättelyllä kuin lauseen 2.9 todistuksessa voidaan helposti osoittaa lauseelle 2.14 käänteinen tulos: Jos $\dim A < 1$, on A *täysin epäyhtenäinen* eli jokaiselle pisteparille $x, y \in A$ löydetään avoimet joukot $U, V \subset X$ siten, että $x \in U$ ja $y \in V$ ja ehdot (1) ovat voimassa.

Koska $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(0,i)$ ja $0 < \mathcal{H}^n(B(0,i)) < \infty$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, on luonnollisesti $\dim \mathbb{R}^n = n$ (vaikka onkin $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = \infty$). Siten $0 \leq \dim A \leq n$ kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$. Voidaan myös osoittaa, että jokaista lukua $s \in [0,n]$ kohti on olemassa joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $\dim A = s$. (Katso esimerkiksi [8, (4.10) ja (4.12)]; vertaa myös kappaleen 2.3 esimerkkiin 3.)

Kuten aikaisemmin todettiin, kokonaislukudimensioille Hausdorffin mitoilla on olemassa hyvinkin luonnollisia tulkintoja. Merkittävää koko teoriassa on kuitenkin se, että on olemassa suuri määrä erittäin kiinnostavia joukkoja, joiden Hausdorffin dimensio ei suinkaan ole kokonaisluku. Tällaiset joukot ovat yleensä jollakin tavalla "kummallisia", esimerkkinä monet *fraktaalit*. Mielivaltaisen joukon Hausdorffin dimension laskeminen ei ole yleensä helppoa. On kuitenkin olemassa tärkeitä erikoistapauksia, joissa dimension tarkka määrittäminen onnistuu kohtuullisella vaivalla. Esimerkkinä näistä tarkastellaan seuraavassa *itsesimilaareja joukkoja*.

2.3 Itsesimilaarit joukot

Intuitiivisesti ajateltuna itsesimilaarisuus tarkoittaa sitä, että joukko koostuu osista, jotka ovat geometrisesti samanlaisia, mutta kooltaan pienempiä, kuin itse joukko. Täsmällinen määritelmä perustuu similitudikuvausten käyttöön.

Kun $N \geq 2$ ja $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ on joukko $\mathbb{R}^n$:n similitudeja,

$$S_i(x) = a_i + \lambda_i O_i(x - a_i)\,,$$

joille $0 < \lambda_i < 1$ kaikilla $i = 1, \ldots, N$, on olemassa yksikäsitteinen kompakti joukko $K \subset \mathbb{R}^n$, joka on *invariantti* $\mathcal{S}$:n suhteen, s.o.

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} S_i(K).$$

(Katso Falconer [4, (9.1)]; myös Hutchinson [6, (3.1)].)

Määritelmä 2.15. Olkoon kompakti $K \subset \mathbb{R}^n$ invariantti kuvausjoukolle $\mathcal{S} = \{S_i, \ldots, S_N\}$, $N \geq 2$, ja olkoon $s = \dim K$. K on *itsesimilaari*, jos kaikilla $1 \leq i, j \leq N,\ i \neq j$

$$\mathcal{H}^s(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0.$$

Määritelmä 2.15 sanoo siis, että itsesimilaarin joukon K osajoukot $S_i(K)$, $i = 1, \ldots, N$, eivät mene "pahasti päällekkäin" mitan $\mathcal{H}^s$ mielessä. Tämä määritelmä ei ole kuitenkaan kovin käyttökelpoinen, sillä ehdon testaamista varten olisi ensin tiedettävä joukon K Hausdorffin dimensio. Nyt ollaan kuitenkin kiinnostuneita juuri siitä, miten tämä dimensio saataisiin laskettua. Kuten pian huomataan, on määritelmän 2.15 sijasta parempi ottaa käyttöön *avoimen joukon ehto*, jota tosin kaikki itsesimilaarit joukot eivät täytä.

Määritelmä 2.16. Similitudijoukko $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ toteuttaa *avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa epätyhjä avoin joukko $O \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

(i) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} S_i(O) \subset O$

(ii) $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$ kun $i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq n.$

Avoimen joukon ehdon (AJE) toteuttavaa joukkoa $\mathcal{S}$ vastaava invariantti joukko K on itsesimilaari, ja sen Hausdorffin dimensiolle saadaan yksinkertainen laskukaava:

Lause 2.17. *Jos $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_N\}$ toteuttaa avoimen joukon ehdon, on sitä vastaava invariantti joukko K itsesimilaari ja* $\dim K = s$*, missä s on yhtälön*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^s = 1 \tag{10}$$

yksikäsitteinen ratkaisu. Lisäksi $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.

Todistus. Katso [4, (9.3)] tai [6, (5.3)]. □

Heuristinen perustelu kaavalle (10). Kun similitudijoukko $\mathcal{S}$ toteuttaa avoimen joukon ehdon, ovat joukot $S_i(K)$, $i = 1, \ldots, N$, "melkein pistevieraita". Lisäksi ne ovat kompakteja ja siten mitallisia. Käyttämällä mitan subadditiivisuutta (4) saadaan

$$\text{"}\,\mathcal{H}^s(K) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}^s(K_i) \overset{2.8(ii)}{=} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^s \mathcal{H}^s(K).\,\text{"}$$

Olkoon nyt $s = \dim K$. Jos tehdään oletus, että $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, voidaan yllä olevassa yhtälössä jakaa $\mathcal{H}^s(K)$:lla, jolloin saadaan juuri kaava (10).

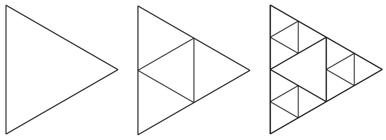
On helppoa nähdä, että (10):lla on todella olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $0 \leq s < \infty$: Kun merkitään $g(s) = \sum_{1=i}^{N} \lambda_i^s$, on g jatkuva ja aidosti vähenevä, $g(0) = N$ ja $\lim_{s \to \infty} g(s) = 0$.

Tärkeä (ja helppo) erikoistapaus on se, jossa jokaisen similitudin S_i kutistussuhde on sama, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = \lambda$, jolloin (10) yksinkertaistuu muotoon $N\,\lambda^s = 1$ eli $\lambda^{-s} = N$, ja saadaan

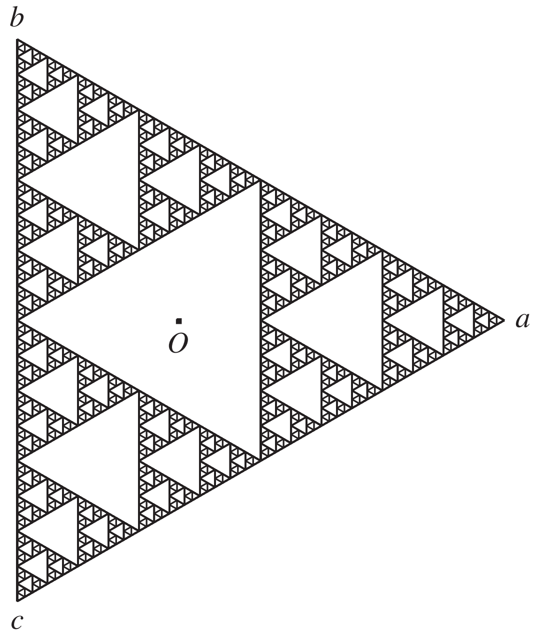
$$\dim K = s = \frac{\log N}{\log \lambda^{-1}}\,. \tag{11}$$

2.3.1 Esimerkkejä

Esimerkki 1: Sierpinskin kolmio. Sierpinskin[6] kolmio (merkitään SK) konstruoidaan yleensä iteratiivisesti tasasivuisesta kolmiosta. Konstruktion ensimmäisessä vaiheessa kolmio jaetaan neljään yhtenevään ja alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoiseen kolmioon ja poistetaan keskimmäinen näistä kolmiosta. Tämän jälkeen jaetaan jäljelle jääneet kolme kolmiota edelleen neljään osaan, poistetaan taas keskimmäiset kolmiot ja jatketaan samaan tapaan jäljelle jääneissä kolmioissa (katso kuva 1). Sierpinskin kolmio on se, mitä jää jäljelle, kun tätä prosessia jatketaan äärettömän pitkään (kuva 2).



Kuva 1: Konstruktion ensiaskeleet



Kuva 2: Sierpinskin kolmio SK

Vaihtoehtoisesti Sierpinskin kolmio saadaan tässä kappaleessa olleiden tulosten mukaisesti joukkona, joka on invariantti tason similitudijoukon $\mathcal{S} =$

[6] Waclaw Sierpinski, 1882–1969, Puola

$\{S_1, S_2, S_3\}$ suhteen, missä

$$S_1(z) = \tfrac{1}{2}\, z + \tfrac{1}{2}\,, \quad S_2(z) = \tfrac{1}{2}\, z + \tfrac{1}{2}\, e^{2\pi i/3}, \quad S_3(z) = \tfrac{1}{2}\, z + \tfrac{1}{2}\, e^{-2\pi i/3}.$$

Se, että tätä $\mathcal{S}$:ää vastaava invariantti joukko on todella SK, on selvää konstruktion perusteella. Jokaisen kuvauksen S_i, $i = 1, 2, 3$, kutistussuhde $\lambda_i = \frac{1}{2}$, ja koska kuvauksia on 3 kappaletta, on $N = 3$. Jos siis löytyy avoin joukko O, joka toteuttaa (AJE):n vaatimukset, saadaan lauseen 2.17 ja (11):n perusteella

$$\dim SK = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849\ldots \tag{12}$$

Tälläinen avoin joukko onkin helppo löytää, O:ksi voidaan nimittäin valita alkuperäisen kolmion sisus, eli avoin tasasivuinen kolmio, jonka kärkipisteet ovat $a = 1$, $b = e^{2\pi i/3}$ ja $c = e^{-2\pi i/3}$ (katso kuva 2). Tällöin $S_i(O)$:t ovat ensimmäisen poiston jälkeen jäljelle jääneiden kolmioiden sisukset, joten määritelmän 2.16 vaatimukset (i) ja (ii) ovat selvästi voimassa, ja siten myös (12) pätee.

Esimerkki 2: von Kochin käyrä ja lumihiutale. von Kochin[7] (tai usein vain Kochin) käyrä (KK, kuva 3) on se tason $\mathbb{R}^2$ kompakti joukko, joka on invariantti similitudien $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_4\}$ suhteen, missä

$$\begin{aligned} &S_1(z) = \tfrac{1}{3}\, z\,, \qquad S_2(z) = \tfrac{1}{3}\, e^{\pi i/3}\, z + \tfrac{1}{3}\,, \\ &S_3(z) = \tfrac{1}{3}\, e^{-\pi i/3}(z-1) + \tfrac{2}{3}\,, \qquad S_4(z) = \tfrac{1}{3}\, z + \tfrac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

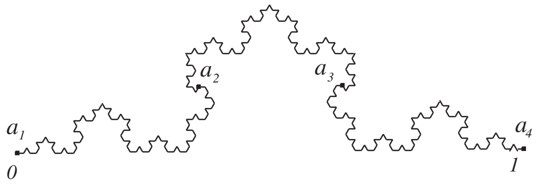
Kuvaukset S_i ovat selvästi similitudeja, ja niillä kaikilla on sama kutistussuhde $\lambda = \frac{1}{3}$. Kiintopisteet saaadaan ratkaisemalla yhtälöt $S_i(z) = z$. Helposti todetaan, että S_1:n kiintopiste on $a_1 = (0, 0)$ ja S_4:n kiintopiste on $a_4 = (1, 0)$. Laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} a_2 &= \tfrac{1}{14}\left(5 + \sqrt{3}\, i\right) = (0.3571\ldots, 0.1237\ldots) \\ a_3 &= \tfrac{1}{14}\left(9 + \sqrt{3}\, i\right) = (0.6428\ldots, 0.1237\ldots)\,. \end{aligned}$$

Joukko $\mathcal{S}$ toteuttaa (AJE):n, sillä 2.16:n O:ksi voidaan valita avoin kolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. Siten lausetta 2.17 voidaan taas soveltaa, ja (11):n avulla saadaan

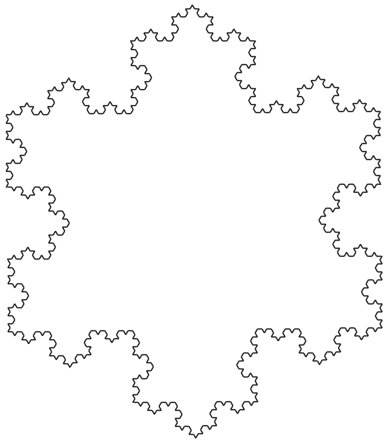
$$\dim KK = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\ldots$$

[7]Niels Fabian Helge von Koch, 1870–1924, Ruotsi



Kuva 3: von Kochin käyrä KK

Kun kolme Kochin käyrän kopiota, jotka saadaan kiertämällä ja siirtämällä KK:ta, liitetään yhteen siten, että näiden kolmen käyrän päätepisteet ovat pisteissä $(0,0)$, $(1,0)$ ja $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, saadaan kaunis Kochin lumihiutale KH (kuva 4).



Kuva 4: Kochin lumihiutale

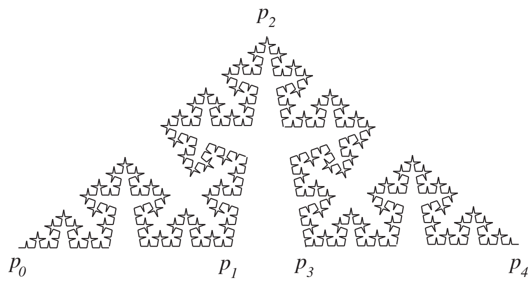
Koska $KH = \bigcup_{i=1}^{3} K_i$, missä jokainen K_i on siis isometrinen KK:n kanssa ja siten lauseen 2.13 mukaan $\dim K_i = \dim KK$, on lemman 2.12 perusteella myös

$$\dim KH = \dim KK = \frac{\log 4}{\log 3}\,.$$

Esimerkki 3: Yleistys von Kochin käyrälle. Olkoon $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$. Merkitään

$$p_0 = 0,\ p_1 = \alpha,\ p_2 = \tfrac{1}{2} + i\,(\alpha - \tfrac{1}{4})^{1/2},\ p_3 = 1 - \alpha \ \text{ ja } \ p_4 = 1\,.$$

Kun $i \in \{1,2,3,4\}$, merkitään S_i:llä similitudia, joka kuvaa välin $[0,1]$ janaksi $[p_{i-1}, p_i] \subset \mathbb{R}^2$ ja jolle $S_i(0) = p_{i-1}$, $S_i(1) = p_i$. Merkitään KK_α:lla sitä kompaktia joukkoa, yleistettyä Kochin käyrää, joka on invariantti similitudijoukon $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_4\}$ suhteen. Huomataan, että esimerkin 2 tavallinen von Kochin käyrä saadaan tällä konstruktiolla arvolla $\alpha = \frac{1}{3}$ ja että kaikki käyrät KK_α ovat ainakin jossain mielessä saman näköisiä kuin KK (vertaa kuvia 3 ja 5).



Kuva 5: Yleistetty Kochin käyrä KK_α, $\alpha = \frac{17}{40}$

Jokaisen similitudin S_i kutistussuhde $\lambda_i = \alpha$. Koska avoin kolmio, jonka kärkipisteet ovat p_0, p_2 ja p_4 toteuttaa (AJE):n similitudijoukolle $\mathcal{S}$, saadaan lauseen 2.17 ja kaavan (11) perusteella

$$\dim KK_\alpha = \frac{\log 4}{\log(1/\alpha)} \, .$$

Kun $\alpha \to \frac{1}{4}$, $\dim KK_\alpha \to 1$ ja kun $\alpha \to \frac{1}{2}$, $\dim KK_\alpha \to \log 4 / \log 2 = 2$. Siis kun α liikkuu välillä $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, saa $\dim KK_\alpha$ kaikki arvot väliltä $(1, 2)$.

3 Kvasisymmetriset kuvaukset

3.1 Määritelmät

Määritelmä 3.1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Homeomorfismi $f : X \to Y$ on *(η-)kvasisymmetrinen*, jos on olemassa homeomorfismi $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ siten, että

$$|x-a| \leq t|x-b| \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \leq \eta(t)|f(x)-f(b)| \tag{13}$$

kaikilla $t > 0$ ja kaikilla $a, b, x \in X$.

Huomautus. Kvasisymmetrisyydelle käytetään jatkossa yleisesti lyhennystä QS.

Huomioita. Kuvaukselle η on tietysti $\lim_{t\to 0} \eta(t) = 0$ ja $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$, joten erityisesti η on (aidosti) kasvava. Asettamalla $a = b$ nähdään, että $\eta(1) \geq 1$ (jos $\operatorname{card} X \geq 2$). Tapaus $\operatorname{card} X = 1$ ei ole mielenkiintoinen, joten jatkossa oletetaan aina, että $\operatorname{card} X \geq 2$. Kun $A \subset X$, on ilmeistä, että η-QS kuvauksen f rajoittuma $f|_A : A \to f(A)$ on myös η-QS.

Seuraavassa lemmassa muotoillaan kvasisymmetrisyyden määritelmä hieman eri tavalla:

Lemma 3.2. *Homeomorfismi $f : X \to Y$ on η-kvasisymmetrinen jos ja vain jos kaikille $a, b, x \in X$ ($x \neq b$) pätee*

$$\frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)-f(b)|} \leq \eta\left(\frac{|x-a|}{|x-b|}\right), \tag{14}$$

missä $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ on homeomorfismi.

Todistus. Ehto (14) seuraa määritelmän 3.1 ehdosta (13) kun valitaan $t = |x-a|/|x-b|$. Jos taas (14) pätee kaikilla $a, b, x \in X$ ($x \neq b$), seuraa ehdosta $|x-a| \leq t|x-b|$ η:n kasvavuuden perusteella

$$\frac{|f(x)-f(a)|}{|f(x)-f(b)|} \leq \eta\left(\frac{|x-a|}{|x-b|}\right) \leq \eta(t),$$

joten f on η-QS. $\square$

Määritelmä 3.3. Avaruudet X ja Y ovat *kvasisymmetriset*, merkitään $X \overset{QS}{\sim} Y$, jos on olemassa η-QS kuvaus $f : X \to Y$ jollekin homeomorfismille $\eta : [0.\infty) \to [0, \infty)$.

Heikkoa kvasisymmetrisyyttä ei jatkossa tulla tarvitsemaan, mutta esitetään sen määritelmä kuitenkin täydellisyyden vuoksi:

Määritelmä 3.4. Homeomorfismi $f : X \to Y$ on *heikosti (H-)kvasisymmetrinen*, jos on olemassa vakio $H > 0$ siten, että

$$|x-a| \le |x-b| \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \le H|f(x)-f(b)| \tag{15}$$

kaikilla $a, b, x \in X$.

Huomautus. Jos $f : X \to Y$ on η-QS, huomataan heti, että f on heikosti $\eta(1)$-QS. Kääntäen tämä ei pidä yleisesti ottaen paikkaansa, sillä on olemassa heikosti kvasisymmetrisiä kuvauksia, jotka eivät ole kvasisymmetrisiä (katso esimerkki [11, s. 99]). Monissa tärkeissä erikoistapauksissa heikosta kvasisymmetrisyydestä tosin seuraa kvasisymmetrisyys. (Katso esimerkiksi [5, (10.19)].)

3.2 Perustuloksia

Todistetaan muutamia kvasisymmetristen kuvausten perusominaisuuksia. Oletetaan koko ajan, että $X, Y, \ldots$ ovat metrisiä avaruuksia.

Lause 3.5. *Olkoon $f : X \to Y$ η-QS. Tällöin f^{-1} on $\tilde{\eta}$-QS, missä $\tilde{\eta}(t) = (\eta^{-1}(t^{-1}))^{-1}$.*

Todistus. Ehdon (13) kanssa on yhtäpitävää, että

$$|f(x)-f(a)| \ge \eta(t)|f(x)-f(b)| \quad \Rightarrow \quad |x-a| \ge t|x-b| \tag{16}$$

kaikilla $t > 0$ ja kaikilla $a, b, x \in X$. Merkitsemällä $s = \eta(t)$ saadaan (16):sta

$$\frac{1}{s}\,|f(x)-f(a)| \ge |f(x)-f(b)| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\eta^{-1}(s)}\,|x-a| \ge |x-b|$$

ja edelleen vaihtamalla $t = 1/s$

$$|f(x)-f(b)| \le t|f(x)-f(a)| \quad \Rightarrow \quad |x-b| \le \frac{1}{\eta^{-1}(1/t)}\,|x-a|\,, \tag{17}$$

ja tämä siis kaikilla $t > 0$, $a, b, x \in X$. Koska f on homeomorfismi, on myös f^{-1} homeomorfismi ja (17):n perusteella kvasisymmetrinen. □

Lause 3.6. *Olkoon $f : X \to Y$ η_1-QS ja $g : Y \to Z$ η_2-QS. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on η-QS, missä $\eta = \eta_2 \circ \eta_1$.*

Todistus. Selvästi $(g \circ f)$ on homeomorfismi. Kun $a, b, x \in X$ toteuttavat ehdon $|x-a| \le t|x-b|$ jollekin $t > 0$, pätee

$$|f(x)-f(a)| \le \eta_1(t)|f(x)-f(b)|\,,$$

josta yhdessä g:n η_2-kvasisymmetrisyyden kanssa saadaan

$$\begin{aligned}\big|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)\big| &= \big|g(f(x))-g(f(a))\big| \\ &\le \eta_2(\eta_1(t))\,\big|g(f(x))-g(f(b))\big| \\ &= (\eta_2\circ\eta_1)(t)\,\big|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(b)\big|,\end{aligned}$$

ja lause on todistettu. □

Koska X:n identtinen kuvaus $\mathrm{id}: X\to X$, $\mathrm{id}(x)=x$, on selvästi t-QS, saadaan lauseista 3.5 ja 3.6 seurauksena:

Seuraus 3.7. *Relaatio "*$\overset{QS}{\sim}$*" on* ekvivalenssirelaatio*:*

(i) $X \overset{QS}{\sim} X$,

(ii) $X \overset{QS}{\sim} Y \quad\Rightarrow\quad Y \overset{QS}{\sim} X$,

(iii) $X \overset{QS}{\sim} Y,\ Y \overset{QS}{\sim} Z \quad\Rightarrow\quad X \overset{QS}{\sim} Z$.

Kvasisymmetrisyyden määrittelevä ehto (13) koskee yksittäisiä pisteitä. Seuraavaksi tarkastellaan, millaisia seurauksia tällä ehdolla on joukkojen kuvautumiselle.

Lause 3.8. *Kvasisymmetrinen kuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi.*

Todistus. Oletetaan siis, että $A\subset X$, $d(A)<\infty$ ja $f: X\to Y$ on η-QS. Valitaan kiinteät $a_0, a_0'\in A$ siten, että $|a_0'-a_0|\ge d(A)/2$. Kun $a\in A$, pätee tällöin $|a-a_0|\le 2|a_0'-a_0|$. Koska f on η-QS, saadaan $|f(a)-f(a_0)|\le \eta(2)|f(a_0')-f(a_0)|$. Siten

$$|f(a)-f(a')|\le |f(a)-f(a_0)|+|f(a_0)-f(a')|\le 2\,\eta(2)|f(a_0')-f(a_0)|$$

kaikilla $a,a'\in A$, ja saadaan

$$d\big(f(A)\big)\le 2\,\eta(2)|f(a_0')-f(a_0)|<\infty,$$

eli myös $f(A)$ on rajoitettu. □

Lause 3.9. *Olkoon $f: X\to Y$ η-QS ja $A\subset B\subset X$ siten, että $d(A)>0$ ja $d(B)<\infty$. Tällöin*

$$\frac{1}{2\eta\left(\dfrac{d(B)}{d(A)}\right)}\le\frac{d\big(f(A)\big)}{d\big(f(B)\big)}\le\eta\left(2\,\frac{d(A)}{d(B)}\right). \tag{18}$$

Todistus. Valitaan jonot (b_n) ja (b'_n) siten, että $b_n, b'_n \in B$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$|b'_n - b_n| \to d(B), \qquad \text{kun } n \to \infty .$$

Olkoon $a \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska

$$|b'_n - b_n| \le |b'_n - a| + |a - b_n| \le \max\bigl\{2|a - b_n|,\, 2|a - b'_n|\bigr\},$$

voidaan tarvittaessa merkintöjä vaihtamalla olettaa, että

$$2|a - b_n| \ge |b'_n - b_n|. \tag{19}$$

Kun $x \in A$, on lemman 3.2 perusteella

$$|f(a) - f(x)| \le \eta\left(\frac{|a - x|}{|a - b_n|}\right)|f(a) - f(b_n)| \overset{(19)}{\le} \eta\left(\frac{2\,d(A)}{|b'_n - b_n|}\right) d\bigl(f(B)\bigr).$$

Tästä saadaan $d\bigl(f(A)\bigr)$:lle arvio

$$d\bigl(f(A)\bigr) \le \eta\left(\frac{2\,d(A)}{|b'_n - b_n|}\right) d\bigl(f(B)\bigr) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta\left(2\,\frac{d(A)}{d(B)}\right) d\bigl(f(B)\bigr),$$

josta seuraa (18):n oikeanpuoleinen epäyhtälö.

Koska lauseen 3.5 mukaan kuvaus $f^{-1} : Y \to X$ on $\tilde{\eta}$-QS, missä $\tilde{\eta}(t) = \bigl(\eta^{-1}(t^{-1})\bigr)^{-1}$, voidaan lauseen alkuosaa soveltaa kuvaukseen f^{-1}, jolloin saadaan (huomaa, että erityisesti $d\bigl(f(A)\bigr)$, $d\bigl(f(B)\bigr) < \infty$ lauseen 3.8 perusteella)

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{d\bigl(f^{-1}\bigl(f(A)\bigr)\bigr)}{d\bigl(f^{-1}\bigl(f(A)\bigr)\bigr)} \le \tilde{\eta}\left(2\,\frac{d\bigl(f(A)\bigr)}{d\bigl(f(B)\bigr)}\right) = \left(\eta^{-1}\left(\frac{d\bigl(f(B)\bigr)}{2\,d\bigl(f(A)\bigr)}\right)\right)^{-1}.$$

Siten

$$2\,\eta\left(\frac{d(B)}{d(A)}\right) \ge \frac{d\bigl(f(B)\bigr)}{d\bigl(f(A)\bigr)},$$

josta seuraa (18):n vasemmanpuoleinen epäyhtälö. □

Seuraavaa lemmaa ei jatkossa tarvita, mutta koska se antaa hyvän kuvan kvasisymmetristen kuvausten geometrisista ominaisuuksista, esitetään se todistuksineen:

Lemma 3.10. *Olkoon $f : X \to Y$ η-QS ja $A \subset X$. Jos on olemassa pallo $B = B(x, r) \subset X$ siten, että*

$$B \subset A \subset \overline{lB} \tag{20}$$

jollekin $l \ge 1$, on olemassa pallo $B' = B\bigl(f(x), R\bigr) \subset Y$, jolle

$$B' \subset f(A) \subset \overline{\eta(l)B'}\,. \tag{21}$$

Todistus. Oletetaan, että (20) on voimassa jollekin $l \geq 1$. Jos $B = X$, on X rajoitettu, ja siten edellä olevan lauseen 3.8 nojalla myös Y on rajoitettu. Tällöin $Y = B'$ jollekin pallolle B', ja lemma pätee.

Voidaan siis olettaa, että B on avaruuden X aito osajoukko. Kun $y \in \overline{lB}$ ja $z \in X \setminus B$, pätee

$$|x - y| \leq lr \leq l|x - z|. \tag{22}$$

Määritellään

$$M = \sup_{y \in \overline{lB}} |f(x) - f(y)| \quad \text{ja} \quad m = \inf_{z \in X \setminus B} |f(x) - f(z)|.$$

Nyt f:n kvasisymmetrisyys ja (22) antavat $M \leq \eta(l)\, m$, joten saadaan

$$\begin{aligned} B\big(f(x), m\big) \subset f(B) \subset f(A) \subset f\big(\overline{lB}\big) \\ \subset \overline{B}\big(f(x), M\big) \subset \overline{B}\big(f(x), \eta(l)\, m\big). \end{aligned}$$

(21):ssa voidaan siis valita $B' = B\big(f(x), m\big)$. □

Lause 3.11. *Olkoon $f : X \to Y$ η-QS. Tällöin f kuvaa X:n Cauchy-jonot Y:n Cauchy-jonoiksi. Lisäksi, jos X on täydellinen, myös Y on täydellinen.*

Todistus. Olkoon (x_i) X:n Cauchy-jono. Tällöin $B = \{x_i : \ i \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu joukko, joten lausetta 3.9 käyttämällä ($A = \{x_i, x_j\} \subset B$) saadaan

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq \eta\left(2\,\frac{|x_i - x_j|}{d(B)}\right) d\big(f(B)\big)\,.$$

Koska $|x_i - x_j| \to 0$ kun $i, j \to \infty$, myös $|f(x_i) - f(x_j)| \to 0$ kun $i, j \to \infty$, sillä $d\big(f(B)\big) < \infty$ ja $\lim_{t \to 0} \eta(t) = 0$. Siis $(f(x_i))$ on Y:n Cauchy-jono.

Olkoon sitten (y_i) Y:n Cauchy-jono. Koska myös f^{-1} on QS, on jono (x_i), missä $x_i = f^{-1}(y_i)$, X:n Cauchy-jono lauseen alkuosan perusteella. Jos X on täydellinen, on tällä jonolla raja-arvo $x \in X$. Mutta tällöin f:n jatkuvuuden perusteella $y_i \to f(x)$ eli (y_i) suppenee, ja siten myös Y on täydellinen. □

Huomautus. Lause 3.11 ei päde, jos oletetaan pelkästään, että $f : X \to Y$ on homeomorfismi. Jos esimerkiksi $X = [1, \infty)$ ja $Y = (0, 1]$, on $f : X \to Y$, $f(x) = 1/x$, homeomorfismi. X on täydellisen avaruuden $\mathbb{R}$ suljettuna osajoukkona myös täydellinen, mutta Y ei ole täydellinen; esimerkiksi Y:n Cauhcy-jonolla (x_n), $x_n = 1/n$, ei ole raja-arvoa (avaruudessa Y). Siten erityisesti funktio f ei voi olla kvasisymmetrinen.

3.3 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Jos surjektio $f : X \to Y$ toteuttaa *bilipschitz-ehdon*, eli on olemassa vakio $L \geq 1$, jolle

$$|x-y|/L \overset{(*)}{\leq} |f(x)-f(y)| \overset{(**)}{\leq} L|x-y|$$

kaikilla $x, y \in X$, on f kvasisymmetrinen:
f on selvästi homeomorfismi, ja kun $a, b, x \in X$ toteuttavat ehdon $|x-a| \leq t|x-b|$ jollekin $t > 0$, saadaan

$$|f(x)-f(a)| \overset{(**)}{\leq} L|x-a| \leq Lt|x-b| \overset{(*)}{\leq} L^2 t|f(x)-f(b)|.$$

Kuvaukseksi η voidaan siis tässä tapauksessa valita $\eta(t) = L^2\, t$.

Kvasisymmetrisen kuvauksen ei kuitenkaan tarvitse olla edes tasaisesti jatkuva, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

Esimerkki 2. Kuvaus $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ on η-QS, missä $\eta(t) = t^2 + 2t$:
Oletetaan, että $|x-a| \leq t|x-b|$, $a, b, x \geq 0$, $t > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(a)| &= |x^2-a^2| = |x-a||x+a| \\
&\leq t|x-b| \left(|x+b| + \underbrace{|-b+x|}_{\leq |x+b|} + \underbrace{|-x+a|}_{\leq t\,|x-b| \leq t\,|x+b|}\right) \\
&\leq 2t|x^2-b^2| + t^2|x^2-b^2| \\
&= (t^2+2t)|f(x)-f(b)|\,.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3. Lauseen 3.11 jälkeen todettiin jo, ettei $f : [1,\infty) \to (0,1]$, $f(x) = 1/x$, ole QS. Tämän näkee heti myös siitä, ettei lause 3.8 ole voimassa f:n käänteiskuvaukselle f^{-1}. Tämä nimittäin kuvaa rajoitetun joukon rajoittamattomaksi, joten ei f^{-1}, eikä siten myöskään f ole QS.

Esimerkki 4. Jos $S : X \to Y$ on similitudi eli $|S(x)-S(y)| = \lambda|x-y|$ jollekin $\lambda > 0$ ja $Y = S(X)$, ja jos pisteille $a, b, x \in X$ ja jollekin $t > 0$ pätee $|x-a| \leq t|x-b|$, saadaan

$$|S(x)-S(a)| = \lambda|x-a| \leq t\lambda|x-b| = t|S(x)-S(b)|.$$

Similitudit ovat siis t-kvasisymmetrisiä.

Oletetaan kääntäen, että funktio $f : X \to Y$ on t-QS. Kun $x, a, b \in X$ ja $a \neq x \neq b$, saadaan ehdosta (13) valitsemalla $t = |x-a|/|x-b|$

$$\frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|} \leq \frac{|f(x)-f(b)|}{|x-b|}\,. \tag{23}$$

Vaihtamalla a:n ja b:n roolit saadaan sama epäyhtälö toiseen suuntaan, ja siten (23):ssa on voimassa yhtäsuuruus. Toisin sanoen, jos $x \in X$ on kiinteä, pätee kaikilla $y, z \in X$, $y \neq x \neq z$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{|f(x) - f(z)|}{|x - z|} . \tag{24}$$

Olkoot nyt $\alpha \neq \beta \in X$. Merkitään

$$L = \frac{|f(\alpha) - f(\beta)|}{|\alpha - \beta|} > 0.$$

Kun $x \neq y \in X$ ovat mielivaltaisia, saadaan (24):n perusteella

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{|f(x) - f(\alpha)|}{|x - \alpha|} = \frac{|f(\alpha) - f(\beta)|}{|\alpha - \beta|} = L ,$$

joten

$$|f(x) - f(y)| = L|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Siten η-kvasisymmetristen kuvausten $X \to Y$ joukko, kun $\eta(t) = t$, on täsmälleen similitudien $X \to Y$ joukko.

3.4 Huomioita kvasisymmetrisyydestä

Kvasisymmetrisyyden määrittelevä ehto (3.1) ei ainakaan ensi katsomalta ole kovinkaan havainnollinen. Minkälaisia ominaisuuksia se asettaa kvasisymmetrisille kuvauksille ja miten se tulisi käsittää intuitiivisella tasolla? Edellisten kappaleiden tulokset ja esimerkit antavat joitakin vastauksia ja apuvälineitä tällaisten kysymysten käsittelyyn.

Similitudit ovat hyvin vahvassa mielessä kvasisymmetrisiä. Ne säilyttävät täysin joukkojen muodon ja muuttavat niiden kokoa vakiokertoimella. Surjektiiviset bilipschitz-kuvaukset säilyttävät joukkojen muodot ainakin jossain mielessä ja muuttavat joukkojen kokoa kiinteiden rajojen sisällä. Tämä on vahvempi ehto kuin kvasisymmetrisyys, sillä esimerkiksi kuvaus $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, jonka todettiin olevan QS, kuvaa ykkösen pituiset välit $I_k = [k, k + 1]$ väleiksi $f(I_k) = [k^2, k^2 + 2k + 1]$, joille $d(f(I_k)) = 2k + 1 \to \infty$, kun $k \to \infty$. Siis kvasisymmetrinen kuvaus voi kyllä muuttaa joukkojen kokoa suurestikin, kunhan vain rajoitetut joukot kuvautuvat rajoitetuiksi.

Kvasisymmetristen kuvausten oleellisin ominaisuus onkin se, että joukkojen muodot eivät voi muuttua täysin mielivaltaisesti. Tutkitaan esimerkiksi avaruuden X pallojen kuvautumista: Kun $f : X \to Y$ on η-QS ja

$A = B(x,r) \subset X$, seuraa lemmasta 3.10, että on olemassa pallo $B = B(f(x),R) \subset Y$, jolle

$$B \subset f(A) \subset \overline{\eta(1)B}.$$

Siten pallo A kuvautuu "kvasipalloksi", jonka reuna kuuluu onttoon palloon $\overline{\eta(1)B} \setminus B$. Mitä pienempi vakio $\eta(1)$, sitä enemmän $f(A)$ välttämättä muistuttaa palloa. Joukkojen A ja $f(A)$ välisestä suhteellisesta koosta ei tässä tarvitse kuitenkaan tietää mitään.

3.5 Kvasisymmetrisen kuvauksen jatkaminen

Tämän kappaleen päätulos on lause 3.13, jonka mukaan joukon $A \subset X$ η-QS kuvauksen f voi jatkaa η-kvasisymmetriseksi A:n sulkeumaan $\overline{A}$, kunhan vain $\overline{f(A)}$ on täydellinen. Tämän lauseen todistuksessa tarvitaan lemmaa 3.12, joka on myös mielenkiintoinen tulos ja joka kertoo, miten vahva kvasisymmetrisyyden määritelmän ehto (13) itse asiassa on. Ehdosta (13) nimittäin seuraa f:n homeomorfisuus (kun $f : X \to f(X)$), jos f ei ole vakiofunktio. Siten määritelmässä 3.1 oletus "f on homeomorfismi" on itse asiassa turhan vahva, riittäisi olettaa pelkästään, ettei f ole identtisesti vakio.

Lemma 3.12. *Olkoon $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ homeomorfismi. Jos $f : X \to Y$ on kuvaus, jolle*

$$|x-a| \le t|x-b| \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \le \eta(t)|f(x)-f(b)|$$

kaikilla $a,b,x \in X$ ja $t > 0$, on f joko vakiokuvaus tai η-QS (kuvauksena $f : X \to f(X)$).

Todistus. Pitää siis osoittaa, että (i) f on jatkuva, ja jos f ei ole vakio, (ii) f on injektio ja (iii) $f^{-1} : f(X) \to X$ on jatkuva.

(i) Olkoon $x_0 \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan kiinteä $b \in X$, $b \neq x_0$. Koska $\lim_{t\to 0} \eta(t) = 0$, voidaan valita $t_0 > 0$ siten, että $\eta(t_0)|f(x_0) - f(b)| \le \varepsilon$. Kun nyt valitaan $0 < \delta < t_0|x_0 - b|$, pätee

$$|f(x) - f(x_0)| \le \eta(t_0)|f(x_0) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Siten f on jatkuva.

Oletetaan sitten, että f ei ole vakiofunktio.

(ii) Jos on olemassa $x \neq y \in X$ siten, että $f(x) = f(y)$, niin kaikilla $z \in X$ saadaan valitsemalla $t = |x-z|/|x-y|$

$$|f(x) - f(z)| \le \eta(t)|f(x) - f(y)| = 0 \quad \text{eli} \quad f(z) = f(x).$$

Siten f olisi vakiokuvaus, mikä on ristiriita, joten f:n täytyy olla injektio.

(iii) On vielä todistettava f^{-1}:n jatkuvuus. Olkoon $y_0 = f(x_0) \in f(X)$. Jos x_0 on X:n *eristetty piste*, eli on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x_0, r) \cap X = \{x_0\}$, riittää osoittaa, että y_0 on $f(X)$:n eristetty piste. Oletetaan ettei näin kuitenkaan ole. Tällöin löytyy jono pisteitä $x_j \in X$ siten, että $x_j \neq x_0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $f(x_j) \to f(x_0) = y_0$. Valitaan $t > 0$ siten, että $|x_1 - x_0| \leq t|x_j - x_0|$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tämä valinta voidaan tehdä, koska $|x_j - x_0| \geq r$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq \eta(t)|f(x_j) - f(x_0)| \to 0 \quad \text{kun} \quad j \to \infty,$$

eli $f(x_1) = f(x_0)$, josta f:n injektiivisyyden nojalla seuraa ristiriita $x_1 = x_0$.

Voidaan siis olettaa, ettei x_0 ole X:n eristetty piste. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin löydetään piste $x_1 \in B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Jos nyt $|x - x_0| \geq \varepsilon$ (eli $|x_1 - x_0| \leq |x - x_0|$), saadaan

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq \eta(1)|f(x) - f(x_0)|.$$

Valitaan $\delta = |f(x_1) - f(x_0)|/\eta(1)$. Kun nyt $z = f(x) \in f(X)$ siten, että $|z - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \delta$, on välttämättä $|f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$. Siis f^{-1} on jatkuva pisteessä y_0, ja siten kaikilla $y \in f(X)$. □

Lause 3.13. *Olkoon $A \subset X$ ja $f : A \to f(A) \subset Y$ η-QS. Oletetaan lisäksi, että $\overline{f(A)} \subset Y$ on täydellinen. Tällöin f voidaan jatkaa η-QS kuvaukseksi $g : \overline{A} \to f(\overline{A})$.*

Todistus. Kun $x \in \overline{A} \setminus A$, voidaan valita A:n Cauchy-jono $(y_j) = (y_j^x)$ siten, että $y_j^x \to x$. Koska lauseen 3.11 mukaan jono $\big(f(y_j^x)\big)$ on nyt $f(A)$:n ja siten erityisesti täydellisen avaruuden $\overline{f(A)}$ Cauchy-jono, on sillä olemassa raja-arvo $y \in \overline{f(A)}$. Määritellään nyt kuvaus $g : \overline{A} \to Y$ asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in A \\ \lim\limits_{y_j^x \to x} f(x), & \text{kun } x \in \overline{A} \setminus A. \end{cases}$$

g:n määritelmä ei riipu jonon (y_j^x) valinnasta, sillä jos $y_j = y_j^x \to x$ ja $z_j = z_j^x \to x$, pätee f:n jatkuvuuden perusteella $|f(y_j) - f(z_j)| \to 0$, kun $j \to \infty$.

Olkoot sitten $a, b, x \in \overline{A}$ ja $t > 0$ siten, että $|x - a| \leq t|x - b|$. Jos $a \in A$, valitaan jono $(a_j) = (a_j^a)$, $a_j = a$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja vastaavasti tehdään, jos $b \in A$ ja/tai $x \in A$. Valitaan kaikilla $j \in \mathbb{N}$ luku $t_j > 0$ siten, että $|x_j - a_j| \leq t_j|x_j - b_j|$ ja $t_j \to t$. Tällöin g:n määritelmän, f:n η-kvasisymmetrisyyden ja η:n jatkuvuuden perusteella saadaan

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &= \lim_{j\to\infty} |f(x_j) - f(a_j)| \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \Big(\eta(t_j)\,|f(x_j) - f(b_j)|\Big) \\ &= \eta(t)\,|g(x) - g(b)|\,. \end{aligned}$$

Nyt g toteuttaa lemman 3.12 oletukset, ja koska g ei ole vakiofunktio (jos f ei ole), on se η-QS kuvaus $g : \overline{A} \to f(\overline{A})$. $\square$

4 Konforminen dimensio

4.1 Määritelmä ja perustuloksia

Määritelmä 4.1. Avaruuden X *konforminen dimensio* $\dim_{\mathcal{C}} X$ määritellään asettamalla

$$\dim_{\mathcal{C}} X = \inf\{\, \dim Y : \; Y \overset{QS}{\sim} X \} \,.$$

Määritelmä 4.2. Avaruuden X *metriikat d ja d' ovat kvasisymmetriset*, jos on olemassa homeomorfismi $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ siten, että

$$d(x,y) \leq t\, d(x,z) \quad \Rightarrow \quad d'(x,y) \leq \eta(t)\, d'(x,z) \tag{25}$$

kaikilla $x, y, z \in X$. Tällöin merkitään $d' \in QS(d)$.

Konforminen dimensio voidaan nyt määritellä yhtäpitävästi myös QS-metriikoiden avulla:

Lemma 4.3. *Kun (X,d) on metrinen avaruus, pätee*

$$\dim_{\mathcal{C}}(X,d) = \inf\{\, \dim(X,d') : \; d' \in QS(d)\} \,.$$

Todistus. Jos $d' \in QS(d)$, on identtinen kuvaus $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,d')$ (25):n perusteella kvasisymmetrinen, joten $(X,d) \overset{QS}{\sim} (X,d')$. Siten $\dim_{\mathcal{C}}(X,d) \leq \dim(X,d')$ kaikilla $d' \in QS(d)$.

Jos taas $f : X \to Y$ on QS, saadaan avaruuteen X uusi metriikka d', kun asetetaan $d'(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Selvästi $d' \in QS(d)$. Koska kuvaus $f : (X,d') \to Y$ on isometria, saadaan lauseen 2.13 perusteella $\dim(X,d') = \dim Y$. Siten $\inf\{\, \dim(X,d') : \; d' \in QS(d))\} \leq \dim_{\mathcal{C}}(X,d)$. Väite seuraa, kun saadut epäyhtälöt yhdistetään. $\square$

Lemma 4.4. *Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B, A_1, A_2, \ldots \subset X$. Tällöin*

(i) $A \subset B \subset X \;\; \Rightarrow \;\; \dim_{\mathcal{C}} A \leq \dim_{\mathcal{C}} B$

(ii) $\dim_{\mathcal{C}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} \big(\dim_{\mathcal{C}} A_i \big)$.

Todistus. Kohta (i) seuraa lemman 2.12 (i)-kohdasta ja siitä, että kvasisymmetrisen kuvauksen $f : B \to B'$ rajoittuma joukkoon A on myös QS. Väite (ii) seuraa suoraan (i)-kohdasta. $\square$

Lauseen 2.13 perusteella ainakaan similitudit ja bilipschitz-kuvaukset eivät muuta joukon Hausdorffin dimensiota. Määritelmän 4.1 mielekkyyden kannalta olisi tietysti toivottavaa, ettei näin käy kaikkien QS-kuvausten kanssa. Esimerkissä 1 näytetäänkin, että dimensiota voi todella muuttaa suurestikin kvasisymmetrisellä kuvauksella, mutta ennen tätä esimerkkiä todistetaan siinä tarvittava pieni lemma:

Lemma 4.5. *Olkoot $a, b \geq 0$ ja $0 < \varepsilon < 1$. Tällöin $(a+b)^\varepsilon \leq a^\varepsilon + b^\varepsilon$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että $a + b = 1$. Tällöin $a, b \leq 1$, joten $a \leq a^\varepsilon$, $b \leq b^\varepsilon$. Siten

$$(a+b)^\varepsilon = a + b \leq a^\varepsilon + b^\varepsilon.$$

Yleisessä tapauksessa valitaan $t > 0$ siten, että $1 = t(a+b) = ta + tb$, jolloin edellä todistetun perusteella

$$t^\varepsilon (a+b)^\varepsilon = (ta+tb)^\varepsilon \leq (ta)^\varepsilon + (tb)^\varepsilon = t^\varepsilon \big(a^\varepsilon + b^\varepsilon\big)\,,$$

josta väite seuraa. □

Esimerkki 1: "Lumihiutalointi". Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $0 < \varepsilon < 1$. Määritellään X:n *lumihiutaloitu metriikka* d_ε asettamalla

$$d_\varepsilon(x, y) = d(x, y)^\varepsilon \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Tällöin d_ε on todella metriikka; symmetrisyys ja definiittisyys ovat selviä, koska d on metriika. Kolmioepäyhtälö puolestaan seuraa lemmasta 4.5, sillä nyt

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(x, z) = d(x, z)^\varepsilon &\leq \big(d(x, y) + d(y, z)\big)^\varepsilon \overset{4.5}{\leq} d(x, y)^\varepsilon + d(y, z)^\varepsilon \\ &= d_\varepsilon(x, y) + d_\varepsilon(y, z). \end{aligned}$$

Kun $a, b, x \in X$, ehdosta $d(x, a) \leq t\, d(x, b)$ seuraa

$$d_\varepsilon(x, a) \leq \ t^\varepsilon d_\varepsilon(x, b)\,,$$

joten valitsemalla $\eta(t) = t^\varepsilon$ nähdään, että $d_\varepsilon \in QS(d)$.

Suoraan metriikan d_ε määritelmästä seuraa, että joukon $E \subset X$ d_ε-halkaisijalle $d_\varepsilon(E)$ pätee $d_\varepsilon(E) = d(E)^\varepsilon$. Olkoon nyt $\alpha > \dim(X, d)$ ja $\delta, \eta > 0$. Tällöin on olemassa joukot $E_1, E_2, \ldots \subset X$ siten, että $d(E_i) \leq \delta$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, $X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ ja

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} d_\varepsilon(E_i)^{\alpha/\varepsilon} = \sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^\alpha \leq \eta,$$

sillä $\mathcal{H}^\alpha(X) = 0$. Nyt $d_\varepsilon(E_i) \leq \delta^\varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten antamalla $\eta \to 0$ saadaan $\mathcal{H}^{\alpha/\varepsilon}_{\delta^\varepsilon}(X, d_\varepsilon) = 0$ kaikilla $\delta > 0$. Tästä seuraa, että $\mathcal{H}^{\alpha/\varepsilon}(X, d_\varepsilon) = 0$, joten $\dim(X, d_\varepsilon) \leq \alpha/\varepsilon$. Kun $\alpha \to \dim(X, d)$, saadaan tulos $\dim(X, d_\varepsilon) \leq \dim(X, d)/\varepsilon$. Toistamalla täsmälleen sama päättely toiseen suuntaan saadaan $\dim(X, d) \leq \varepsilon \dim(X, d_\varepsilon)$, joten

$$\dim(X, d_\varepsilon) = \frac{\dim(X, d)}{\varepsilon}\,.$$

Tästä nähdään, että kun annetaan $\varepsilon \to 0$, saadaan avaruuden (X, d_ε) dimensio mielivaltaisen suureksi, kunhan vain $\dim(X, d) > 0$.

Esimerkin 1 mukaisesti *jokaisen* metrisen avaruuden X, jolle $\dim X > 0$, Hausdorffin dimensiota voidaan kasvattaa QS-kuvauksella $f : X \to Y$, missä Y on jokin toinen metrinen avaruus. Lauseen 3.5 perusteella myös $f^{-1} : Y \to X$ on tällöin QS, ja nyt f^{-1} siis pienentää Y:n dimensiota. On siis olemassa ainakin *joitakin* avaruuksia, joiden dimensiota saadaan pienennettyä kvasisymmetrisesti. Oleellista on kuitenkin se, ettei tätä pienentämistä voi ainakaan kaikille joukoille tehdä täysin mielivaltaisesti; katso lause 4.7 ja esimerkki 2 alla sekä luvun 6 esimerkit. Siten määritelmä 4.1 on todellakin järkevä.

Dimension nostaminen $\mathbb{R}^n$:n joukoille onnistuu itse asiassa jo $\mathbb{R}^n$:ssä, kuten [1]:n (Bishop) Teoreema 1.1 osoittaa:

Lause 4.6. *Kun $E \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja $\dim E > 0$, sekä $0 < t < n$, on olemassa kvasisymmetrinen kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, jolle $\dim f(E) > t$.*

Todistus. Katso [1]. □

Koska yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on yhtenäinen, saadaan lauseesta 2.14 alaraja yhtenäisten avaruuksien konformiselle dimensiolle:

Lause 4.7. *Jos metrinen avaruus X on yhtenäinen (ja $\operatorname{card} X \geq 2$), on $\dim_{\mathcal{C}} X \geq 1$.*

Esimerkki 2. Kun $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ on jana, on $\dim_{\mathcal{C}} I = 1$. Lauseen 4.7 perusteella on nimittäin $\dim_{\mathcal{C}} I \geq 1$ ja toisaalta I on isometrinen janan $\big[0, |b - a|\big] \subset \mathbb{R}$ kanssa, jolloin $I \overset{QS}{\sim} \big[0, |b-a|\big]$, ja $\dim \big[0, |b-a|\big] = 1$. Erityisesti siis $\dim_{\mathcal{C}} I = \dim I$.

4.2 von Kochin käyrän konforminen dimensio

Koska Kochin käyrä on yhtenäinen, antaa lause 4.7 alarajan sen konformiselle dimensiolle: $\dim_{\mathcal{C}} KK \geq 1$. Tässä kappaleessa osoitetaan, että $KK \overset{QS}{\sim} [0, 1] \subset \mathbb{R}$, joten saadaan tulos

Lause 4.8. *von Kochin käyrälle KK on* $\dim_{\mathcal{C}} KK = 1$.

Lauseen 4.8 todistamiseksi riittää siis konstruoida QS kuvaus $f : [0, 1] \to KK$. Tämä tehdään seuraavasti:

Merkitään $I = I_0 = [0,1]$, ja kun $j \in \mathbb{N}$ ja $l \in \{1, 2, \ldots, 4^j\}$, merkitään

$$I_l^j = \left[\frac{(l-1)}{4^j}, \frac{l}{4^j}\right].$$

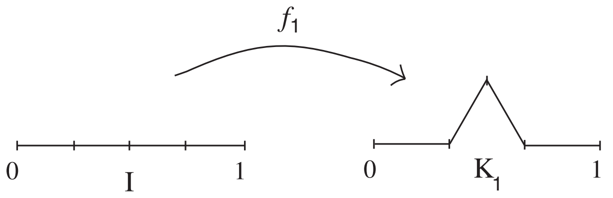
Määritellään jono kuvauksia $f_j : I \to \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Asetetaan $f_0 = \mathrm{id}$. Olkoot $S_1, \ldots, S_4$ similitudit kuten kappaleen 2.3.1 esimerkissä 2:

$$S_1(z) = \tfrac{1}{3}\, z\,, \qquad S_2(z) = \tfrac{1}{3}\, e^{\pi i/3}\, z + \tfrac{1}{3}\,,$$
$$S_3(z) = \tfrac{1}{3}\, e^{-\pi i/3}(z-1) + \tfrac{2}{3}\,, \qquad S_4(z) = \tfrac{1}{3}\, z + \tfrac{2}{3}\,.$$

Merkitään $K_1 = \bigcup_{i=1}^4 S_i(I)$, ja valitaan f_1:ksi kuvaus, joka on affiini (yhdistetty kuvaus skaalauksesta, kierrosta ja siirrosta) kullakin välillä I_l^1, $l = 1, 2, 3, 4$, ja jolle

$$f_1(0) = 0\,,\ f_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\,,\ \ f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\, i\right)\,,\ \ f_1\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{2}{3}\ \text{ ja }\ f_1(1) = 1\,.$$

Tällöin f_1 on homeomorfismi $I \to K_1$ (kuva 6).



Kuva 6: Kuvaus $f_1 : I \to K_1$

Kun K_{j-1} on määritelty, määritellään $K_j = \bigcup_{i=1}^4 S_i(K_{j-1})$. Tällöin K_j on murtoviiva, joka koostuu 4^j:stä jananpätkästä $J_l^j = [a_{l-1}, a_l]$, $l = 1, \ldots, 4^j$, joiden pituus on $\left(\frac{1}{3}\right)^j$. Oletetaan, että ne ovat järjestyksessä siten, että $a_0 = 0$ ja $a_{4^j} = 1$. Valitaan f_j:ksi homeomorfismi $I \to K_j$, joka kuvaa ($\mathbb{R}$:n) välin I_l^j affiinisti ($\mathbb{C}$:n) väliksi J_l^j kaikilla $l = 1, \ldots, 4^j$. (Katso kuva 7.)

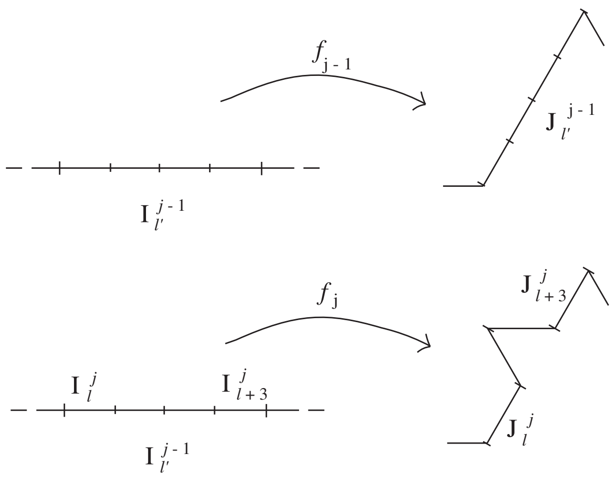
Olkoon $x \in I$ ja $j \in \mathbb{N}$. Funktioiden f_j valinnasta seuraa, että

$$|f_{j+1}(x) - f_j(x)| \le \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \left(\tfrac{1}{3}\right)^j\,,$$

(vertaa kuvaan 7), joten erityisesti

$$\max_{x \in I} \left| f_{j+1}(x) - f_j(x) \right| \le C \left(\tfrac{1}{3}\right)^j\,, \tag{26}$$

missä $0 < C < \infty$ on vakio.



Kuva 7: Kuvaukset f_{j-1} ja f_j

Olkoot sitten $n, m \in \mathbb{N}$; voidaan olettaa, että $n < m$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |f_{j+1}(x) - f_j(x)| \overset{(26)}{\leq} \sum_{j=n}^{m-1} C \left(\tfrac{1}{3}\right)^j \\
&\leq C \sum_{j=n}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^j = C \, \frac{(1/3)^n}{1-(1/3)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

kun n (ja m) $\to \infty$. Tämän perusteella jokainen jono $\big(f_j(x)\big)_{j=1}^{\infty}$, $x \in I$, on Cauchy-jono, ja siten kuvausjono (f_j) suppenee kohti kuvausta $f : I \to \mathbb{C}$. Arviosta (26) seuraa lisäksi (aivan samoin kuin yllä olevassa laskussa), että suppeneminen on tasaista. Koska jokainen f_j on jatkuva, on tällöin myös f jatkuva kuvaus. Lisäksi on helppo todeta, että f on injektio: Jos $x \neq y \in I$, voidaan valita indeksi $k \in \mathbb{N}$ ja $l, m \in \{1, \ldots, 4^k\}$, joille $x \in I_l^k$, $y \in I_m^k$ ja $I_l^k \cap I_m^k = \emptyset$. Tällöin konstruktion ja avoimen joukon ehdon perusteella myös $f(I_l^k) \cap f(I_m^k) = \emptyset$, josta saadaan $f(x) \neq f(y)$.

Konstruktion perusteella on myös selvää, että $f(I) = KK$. Tämä seuraa myös yleisemmästä tuloksesta (katso [6, (3.1)]), jonka mukaan iteroimalla mitä tahansa rajoitettua joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ similitudijoukolla $\mathcal{S}$ päädytään rajalla $\mathcal{S}$:n suhteen invarianttiin joukkoon. Nyt on siis löydetty jatkuva bijektio $f : I \to KK$. Kuvauksen f kvasisymmetrisyyden todistamiseksi riittää osoittaa, että ehto (13) on voimassa, sillä lemman 3.12 perusteella f on tällöin QS. Todistetaan f:lle arvio, josta kvasisymmetrisyys seuraa helposti:

Lemma 4.9. *Edellä konstruoidulle kuvaukselle $f : I \to KK$ on olemassa* *vakio* $0 < C < \infty$*, jolle arvio*

$$\frac{|x-y|^\alpha}{C} \le |f(x) - f(y)| \le C\,|x-y|^\alpha, \tag{27}$$

missä $\alpha = \log 3/\log 4$*, pätee kaikille* $x, y \in I$*.*

Todistus. Olkoot $x, y \in [0,1]$. Voidaan olettaa, että $x < y$. Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $|x-y| \ge 4^{-2} = \frac{1}{16}$. Tällöin on olemassa ainakin yksi väli I_l^3, joka on kokonaan x:n ja y:n välissä. Nyt

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \frac{2\max_{z\in I}|f(z)|}{4^{-2\alpha}} = C_1 < \infty$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} &\ge \frac{\min\left\{d\big(f(I_i^3), f(I_j^3)\big) :\ i,j \in \{1,\ldots,4^3\},\ I_i^3 \cap I_j^3 = \emptyset\right\}}{1^\alpha} \\ &= C_2 > 0.\end{aligned}$$

Siten väite pätee, kun $|x-y| \ge 4^{-2}$.

Oletetaan sitten, että $|x-y| < 4^{-2}$. Koska $x \neq y$, voidaan valita suurin indeksi k, jolle löytyy $h \in \{1,\ldots,4^k\}$ siten, että $x, y \in I_h^k$ tai $x \in I_h^k$ ja $y \in I_{h+1}^k$. Tällöin $|x-y| \ge 4^{-(k+1)}$, sillä x:n ja y:n välissä on ainakin yksi $4^{-(k+1)}$:n pituinen väli. Koska joukko $f\big(I_h^k \cup I_{h+1}^k\big)$ saadaan jollakin $l = 1,2,3$ joukosta $f\big(I_l^k \cup I_{l+1}^k\big)$ kiertämällä ja siirtämällä, voidaan oletaa, että $x, y \in I_1^{k-1} = \bigcup_{l=1}^4 I_l^k$. Kochin käyrän itsesimilaarisuuden perusteella $f(I_1^{k-1}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} f(I)$. Tällöin on olemassa $x^*, y^* \in I$ siten, että

$$|x^* - y^*| = 4^{k-1}|x-y| \ge 4^{k-1}\cdot 4^{-(k+1)} = 4^{-2}$$

ja

$$|f(x)-f(y)| = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1}|f(x^*) - f(y^*)|\,.$$

Yllä olevien yhtälöiden perusteella saadaan

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}|f(x^*)-f(y^*)|}{\left(4^{-(k-1)}|x^*-y^*|\right)^\alpha} = \frac{|f(x^*)-f(y^*)|}{|x^*-y^*|^\alpha}\,, \tag{28}$$

sillä

$$4^{-(k-1)\alpha} = e^{-(k-1)\log 4\,\frac{\log 3}{\log 4}} = 3^{-(k-1)}\,.$$

Koska $|x^*-y^*| \ge 4^{-2}$, pätee väite todistuksen alkuosan nojalla x^*:lle ja y^*:lle, ja siten yhtälön (28) nojalla myös x:lle ja y:lle. $\square$

Lause 4.10. *Kuvaus $f : I \to KK$ on kvasisymmetrinen.*

Todistus. Olkoot $x, a, b \in I$ ja $t > 0$ siten, että $|x-a| \leq t|x-b|$. Tällöin

$$|f(x) - f(a)| \overset{4.9}{\leq} C\,|x-a|^\alpha \leq C\,t^\alpha |x-b|^\alpha \overset{4.9}{\leq} C^2\,t^\alpha |f(x) - f(b)|\,,$$

joten lemman 3.12 perusteella f on $C^2\,t^\alpha$-QS. □

On siis löydetty kvasisymmetrinen kuvaus $f : I \to KK$. Siten $KK \overset{QS}{\sim} I$ ja $\dim_{\mathcal{C}} KK \leq \dim I = 1$. Kuten jo todetiinkin, on yhtenäisyyden perusteella $\dim_{\mathcal{C}} KK \geq 1$, joten lauseen 4.8 tulos $\dim_{\mathcal{C}} KK = 1$ on nyt todistettu. Erityisesti siis $\dim_{\mathcal{C}} KK < \dim KK$. Samalla saatiin myös konkreettisempi esimerkki dimension kasvattamisesta kvasisymmetrisesti, sillä nythän $f : I \to KK$ on QS kuvaus, joka kasvattaa välin I dimensiota (ja siis kuvaus $f^{-1} : KK \to I$ pienentää KK:n dimensiota).

Huomautus. Tässä kappaleessa saadut tulokset voidaan todistaa täysin analogisesti myös yleistetyille Kochin käyrille KK_α, $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$. Tämän perusteella saadaan myös tulokset $KK_\alpha \overset{QS}{\sim} [0,1]$, $KK_\alpha \overset{QS}{\sim} KK_\beta$ ja $\dim_{\mathcal{C}} KK_\alpha = 1$ kaikilla $\frac{1}{4} < \alpha, \beta < \frac{1}{2}$. Tässä on myös pieni esimerkki siitä, miten lause 4.6 toimii käytännössä, sillä joukon $I = [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ Hausdorffin dimensio saadaan näiden tulosten avulla kasvatettua kvasisymmetrisesti mielivaltaisen lähelle arvoa kaksi.

5 Arvioita Sierpinskin kolmion konformiselle dimensiolle

5.1 Alustavia määritelmiä ja aputuloksia

Tässä luvussa tarkastellaan, miten Sierpinskin kolmion konformista dimensiota voidaan arvioida konstruoimalla uusia metriikoita, jotka ovat kvasisymmetrisiä SK:n euklidisen metriikan kanssa. Uudet metriikat tehdään määrittelemällä sopiva painofunktio, joka antaa SK:n eri osille erilaiset painotukset etäisyyttä laskettaessa. SK:n uutta metriikka merkitään d:llä, $|x-y|$:llä merkitään aina euklidista etäisyyttä ja $|\cdot|$:lla tarkoitetaan euklidista metriikkaa. Joukon A euklidinen halkaisija on $d_{\text{euk}}(A)$, ja $d_d(A)$:lla tarkoitetaan A:n d-halkaisijaa. Ennen uusien metriikoiden konstruktiota määritellään vielä muutamia apujoukkoja ja todistetaan kaksi tarpeellista lemmaa.

Kuten luvun 2.3 esimerkissä 1 määriteltiin, on Sierpinskin kolmio SK joukko, joka on invariantti tason similitudijoukon $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$ suhteen, missä

$$S_1(z) = \tfrac{1}{2}\,z + \tfrac{1}{2}\,, \quad S_2(z) = \tfrac{1}{2}\,z + \tfrac{1}{2}\,e^{2\pi i/3}, \quad S_3(z) = \tfrac{1}{2}\,z + \tfrac{1}{2}\,e^{-2\pi i/3}.$$

Merkitään Sierpinskin kolmiota jatkossa vaihtoehtoisesti myös lyhyesti K:lla ja asetetaan $K_i = S_i(K)$. Merkitään lisäksi $F = \{1, 2, 3\}$, ja kun $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) \in F^m$, asetetaan $S_\sigma = S_{\sigma_0} \circ \cdots \circ S_{\sigma_{m-1}}$ ja $K_\sigma = S_\sigma(K)$. Tällöin

$$K = \bigcup_{\sigma \in F^m} K_\sigma$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$, ja koska jokaisen similitudin S_i kutistussuhde $\lambda = \frac{1}{2}$, on kaikilla $\sigma \in F^m$

$$d(K_\sigma) = \lambda^m d(K) \to 0 \quad \text{kun} \quad m \to \infty. \tag{29}$$

Merkitään P:llä suljettua kolmiota, jolla on samat kärkipisteet kuin SK:lla (a,b ja c kuvassa 2). Kolmion P kärkipisteiden joukko on $V = \{a, b, c\}$, ja E on P:n reuna eli kärkien välisten janojen muodostama joukko. Kun $\sigma \in F^m$, merkitään edelleen

$$P_\sigma = S_\sigma(P), \quad V_\sigma = S_\sigma(V) \quad \text{ja} \quad E_\sigma = S_\sigma(E).$$

Selvästi $P_\sigma \subset P$ kaikilla $\sigma \in F^m$ ja toisaalta Sierpinskin kolmion konstruktion nojalla

$$K = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{\sigma \in F^m} P_\sigma.$$

Kun $m \in \mathbb{N}$, merkitään vielä

$$\mathcal{V}_m = \bigcup_{\sigma \in F^m} V_\sigma \,, \quad \mathcal{E}_m = \bigcup_{\sigma \in F^m} E_\sigma \,,$$

ja asetetaan lisäksi $\mathcal{V}_0 = V$, $\mathcal{E}_0 = E$. Joukot $\mathcal{V}$ ja $\mathcal{E}$ määritellään asettamalla

$$\mathcal{V} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_m \,, \quad \mathcal{E} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_m \,.$$

Kaavasta (29):sta seuraa, että $\mathcal{V}$ on tiheä $\mathcal{E}$:ssä, joka on edelleen tiheä K:ssa.

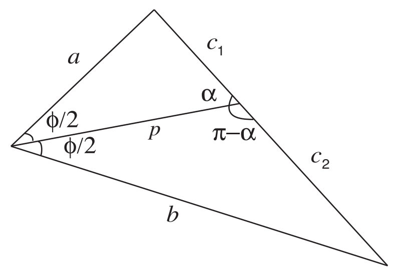
Määritelmä 5.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *C-kvasikonveksi*, jos on olemassa vakio $C \geq 1$ siten, että jokainen pistepari $x, y \in A$ voidaan yhdistää käyrällä $\gamma \subset A$, jolle $\operatorname{len}(\gamma) \leq C|x - y|$.

Huomautus. Kvasikonveksisuudelle käytetään lyhennystä qcvx.

Lemmassa 5.3 osoitetaan, että joukko $\mathcal{E}$ on kvasikonveksi, mutta ennen tätä todistetaan yksinkertainen trigonometrinen havainto:

Lemma 5.2. *Kun ABC on kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c, ja c:n vastainen kulma on ϕ, pätee*

$$a + b \leq \frac{c}{\sin(\phi/2)} \,.$$



Kuva 8: Lemman 5.2 tilanne

Todistus. Olkoot α ja $\pi - \alpha$ sivun c ja kulman ϕ puolittajan p väliset kulmat. p jakaa c:n osiin c_1 ja c_2. Tällöin sinilause antaa (katso kuva 8)

$$\frac{c_1}{\sin(\phi/2)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \,, \qquad \frac{c_2}{\sin(\phi/2)} = \frac{b}{\sin(\pi - \alpha)} \,.$$

Koska $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$, saadaan yllä olevista yhtälöistä

$$(a + b)\sin(\phi/2) = (c_1 + c_2)\sin(\alpha) \leq c \,,$$

josta väite seuraa. $\square$

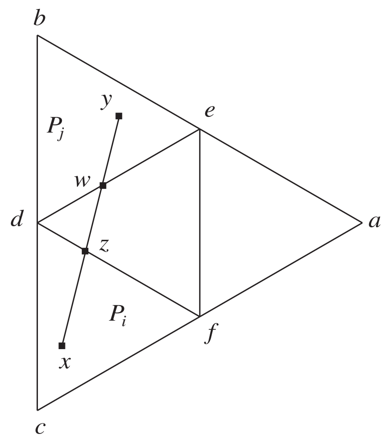
Lemma 5.3. *Joukko $\mathcal{E}$ on 2-kvasikonveksi.*

Todistus. Osoitetaan induktiolla, että jokainen $\mathcal{E}_m$ on 2-kvasikonveksi, jolloin väite seuraa.

Jos $x, y \in \mathcal{E}_0$ ovat kolmion P samalla sivulla, voidaan käyräksi γ valita niitä yhdistävä jana $[x, y]$, jolloin $\mathrm{len}(\gamma) = |x - y|$. Jos pisteet taas ovat kahdella eri sivulla, merkitään z:lla näiden sivujen yhteistä kärkipistettä ja γ:lla murtoviivaa $[x, z] \cup [z, y]$. Koska kolmion P sisäkulma $\phi = \pi/3$, on $\sin\phi/2 = 1/2$, ja lemman 5.2 avulla saadaan

$$\mathrm{len}(\gamma) = |x - z| + |z - y| \leq \frac{|x - y|}{\sin(\phi/2)} = 2|x - y|.$$

Siten $\mathcal{E}_0$ on 2-qcvx.



Kuva 9: Lemman 5.3 todistus

Oletetaan sitten, että $\mathcal{E}_{m-1}$ on 2-qcvx, $m \in \mathbb{N}$. Olkoot $x, y \in \mathcal{E}_m$. Itsesimilaarisuuden ja induktio-oletuksen perusteella $P_i \cap \mathcal{E}_m$ on myös 2-qcvx kaikilla $i \in F$, joten voidaan olettaa, että $x \in P_i$ ja $y \in P_j$ joillekin $i \neq j \in F$. Merkitään Q:lla joukkoa $[d, e] \cup [e, f] \cup [f, d]$ (katso kuva 9), joka on tietysti myös 2-qcvx. Olkoot $z \in P_i$ ja $w \in P_j$ ne pisteet, jotka kuuluvat joukkoon $[x, y] \cap Q$ (kuva 9). Huomaa, että voi olla $x = z$ tai $y = w$. Tällöin myös $z, w \in \mathcal{E}_m$. Nyt voidaan valita käyrä $\gamma \subset \mathcal{E}_m$, joka yhdistää ensin x:n z:aan $P_i \cap \mathcal{E}_m$:ssä, sitten z:n w:hen Q:ssa ja lopulta w:n y:hyn $P_j \cap \mathcal{E}_m$:ssä, ja jolle

$$\mathrm{len}(\gamma) \leq 2|x - z| + 2|z - w| + 2|w - y| = 2|x - y|.$$

Siten $\mathcal{E}_m$ on 2-qcvx ja väite seuraa. $\square$

5.2 Kvasisymmetristen metriikoiden konstruktio

Määritelmä 5.4. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Funktio $\boldsymbol{\rho} : F^k \to (0,1]$ on *SK:n painofunktio.* Kun $\sigma \in F^k$, merkitään $\boldsymbol{\rho}(\sigma) = \rho_\sigma$, ja kun $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-1}) \in F^{mk}$, missä $\sigma_j \in F^k$ kaikilla $j = 0, \ldots, m-1$, määritellään $\rho_\sigma = \rho_{\sigma_{m-1}} \cdot \cdots \cdot \rho_{\sigma_0}$. Luku ρ_σ on kolmiota P_σ vastaava *painokerroin.*

Tavoitteena on siis konstruoida SK:lle metriikka, joka saadaan painottamalla euklidista metriikkaa $|\cdot|$ kolmion P_σ, $\sigma \in F^{mk}$, reunalla painokertoimella ρ_σ. Osoittautuu, että kun painofunktio $\boldsymbol{\rho}$ valitaan hyvin, on saatu metriikka d_ρ kvasisymmetrinen euklidisen metriikan kanssa (lause 5.12). Hyviä painofunktioita kutsutaan *sallituiksi*, ja niille asetetaan seuraavat ehdot:

Määritelmä 5.5. Painofunktio $\boldsymbol{\rho} : F^k \to (0,1]$ on sallittu, jos se toteuttaa ehdot:

(i) $\rho_\sigma = 1$, jos $P_\sigma \cap \mathcal{E}_0 \neq \emptyset$

(ii) Kun x ja y ovat kolmion P kärkipisteitä (eli $x, y \in V$) ja

$$\gamma = \gamma^{x,y} = [x, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, y] \subset \mathcal{E}_k$$

on murtoviiva siten, että $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y \in \mathcal{V}_k$ ja x_{i-1}, x_i ovat kolmion P_{σ_i} , $\sigma_i \in F^k$, kärkipisteitä kaikilla $i = 1, \ldots, N$, pätee epäyhtälö

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_{\sigma_i} |x_i - x_{i-1}| \geq |x - y|.$$

Kun on annettu SK:n painofunktio $\boldsymbol{\rho}$, voidaan ehtojen (i) ja (ii) voimassaolo tarkastaa äärellisellä määrällä laskuja, sillä kolmion P kärkien a, b ja c välillä on $\mathcal{E}_k$:ssa vain äärellinen (joskin mahdollisesti hyvin suuri) määrä murtoviivoja.

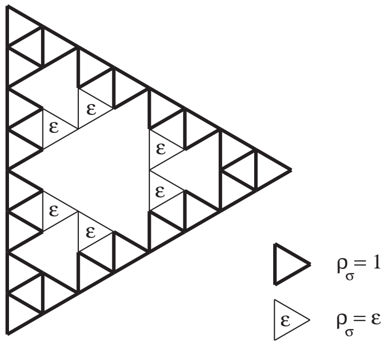
Esimerkki 1. Kun $k = 1, 2$, ei SK:lla ole olemassa muita sallittuja painofunktioita kuin $\boldsymbol{\rho} \equiv 1$. Tämä johtuu siitä, että kaikille P_i, $i \in F$, ja $P_{(i,j)}$, $(i, j) \in F^2$, on $P_i \cap \mathcal{E}_0 \neq \emptyset \neq P_{(i,j)} \cap \mathcal{E}_0$.

Esimerkki 2. Kun $k = 3$, merkitään

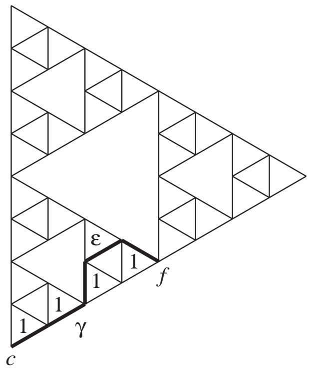
$$\Sigma = \Big\{(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)\Big\}.$$

Olkoon $0 < \varepsilon \leq 1$. Koska $P_\sigma \cap \mathcal{E}_0 = \emptyset$ kun $\sigma \in \Sigma$, on kuvan 10 painofunktio

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{3,\varepsilon} : F^3 = \{1,2,3\}^3 \to (0,1]\,;\ \rho_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad \sigma \in F^3 \setminus \Sigma \\ \varepsilon, & \qquad\quad \sigma \in \Sigma \end{cases}$$



Kuva 10: Esimerkin 2 painofunktio $\boldsymbol{\rho}_{3,\varepsilon}$



Kuva 11: Pisteitä c ja f yhdistävä esimerkkipolku γ painofunktiolle $\boldsymbol{\rho}_{3,\varepsilon}$

sallittu, sillä myös ehdon 5.5(ii) voimassaolo on helppo tarkastaa (vertaa kuvaan 11).

Kiinnitetään nyt $k \in \mathbb{N}$ ja sallittu painofunktio $\boldsymbol{\rho} : F^k \to (0,1]$. Kun $x, y \in \mathcal{V}$ ja $\gamma = \gamma^{x,y} \subset \mathcal{E}$ on murtoviiva, on joukkojen $\mathcal{V}$ ja $\mathcal{E}$ määritelmien perusteella olemassa $m, N \in \mathbb{N}$ ja pisteet $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y \in \mathcal{V}_{mk}$ siten, että

$$\gamma = [x, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, y] \subset \mathcal{E}_{mk}\,,$$

ja kaikilla $i = 1, \ldots, N$ jana $[x_{i-1}, x_i]$ on kolmion P_{σ_i}, $\sigma_i \in F^{mk}$, jokin sivujana. Tällöin asetetaan

$$\operatorname{len}_d(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \rho_{\sigma_i} |x_i - x_{i-1}|\,. \tag{30}$$

Vaikka m ja N – ja siten myös pisteet x_i – voidaan valita murtoviivalle γ monella eri tavalla, ei tämä valinta määritelmän 5.5 ehdon (i) perusteella vaikuta $\mathrm{len}_d(\gamma)$:n arvoon. Siten $\mathrm{len}_d(\gamma)$ on hyvin määritelty kaikille murtoviivoille $\gamma \subset \mathcal{E}$.

Määritellään nyt joukkoon $\mathcal{V}$ etäisyysfunktio $d = d_{k,\rho} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [0, \infty)$ asettamalla

$$d(x, y) = \inf \left\{ \mathrm{len}_d(\gamma) : \ \gamma = \gamma^{x,y} \subset \mathcal{E} \ \text{ on murtoviiva} \right\}. \tag{31}$$

Määritelmän 5.5 ehdot takaavat sen, että kolmion P kärkipisteiden etäisyydet ovat samat kuin euklidisessa metriikassa, eli kärkipisteiden a, b ja c välillä ei päästä "oikaisemaan sisäkautta". (Vertaa esimerkkiin 2 ja kuvaan 11; katso myös lemma 5.6 alla.)

Pian todistetaan, että d voidaan laajentaa koko SK:n metriikaksi, mutta sitä ennen tarvitaan muutama aputulos.

Lemma 5.6. *Olkoon $m \in \mathbb{N}_0$. Kun $x, y \in \mathcal{V}_{mk}$, on olemassa murtoviiva $\gamma_0 = \gamma_0^{x,y} \subset \mathcal{E}_{mk}$ siten, että $d(x, y) = \mathrm{len}_d(\gamma_0)$. Erityisesti, jos x ja y ovat kolmion $P_\sigma \subset \mathcal{E}_{mk}$, $\sigma \in F^{mk}$, kärkipisteitä, on $d(x, y) = \rho_\sigma |x - y|$.*

Todistus. Olkoot $x, y \in \mathcal{V}_{mk}$. Koska $\mathcal{E}_{mk}$ koostuu äärellisestä määrästä janoja, on olemassa murtoviiva $\gamma_0 = \gamma_0^{x,y}$, jolle

$$\mathrm{len}_d(\gamma_0) = \min \left\{ \mathrm{len}_d(\gamma) : \ \gamma = \gamma^{x,y} \subset \mathcal{E}_{mk} \ \text{ on murtoviiva} \right\}. \tag{32}$$

Osoitetaan, että jos $\gamma = \gamma^{x,y} \subset \mathcal{E}$ on murtoviiva, niin pätee $\mathrm{len}_d(\gamma) \geq \mathrm{len}_d(\gamma_0)$:

Olkoon siis $\gamma_1 = \gamma_1^{x,y} \subset \mathcal{E}$ murtoviiva, jolloin on olemassa $m' \geq m$ siten, että $\gamma_1 \subset \mathcal{E}_{m'k}$. Jos $m' = m$, on (32) perusteella $\mathrm{len}_d(\gamma_1) \geq \mathrm{len}_d(\gamma_0)$, joten voidaan olettaa, että $m' > m$. Murtoviiva γ_1 voidaan nyt korvata alla esitettävällä tavalla murtoviivalla $\gamma_2 = \gamma_2^{x,y} \subset \mathcal{E}_{(m'-1)k}$, jolle $\mathrm{len}_d(\gamma_1) \geq \mathrm{len}_d(\gamma_2)$. Näin jatkaen saadaan murtoviivat $\gamma_i = \gamma_i^{x,y} \subset \mathcal{E}_{(m'-i+1))k}$, joille $\mathrm{len}_d(\gamma_1) \geq \mathrm{len}_d(\gamma_2) \geq \dots$ kaikilla $1 \leq i \leq (m' - m)$. Kussakin vaiheessa korvaaminen tehdään seuraavasti:

Kun $\gamma_i = \gamma_i^{x,y}$ on murtoviiva $\mathcal{E}_{(m'-i+1)k}$:ssa, on Sierpinskin kolmion konstruktion perusteella olemassa pisteet $x = x_0, x_1, \dots, x_N = y \in \gamma_i$ siten, että kaikilla $j = 1, \dots, N$ on olemassa kolmio P_σ, $\sigma \in F^{(m'-i)k}$, jolle x_{j-1} ja x_j ovat P_σ:n sivujanan E päätepisteet. Tällöin määritelmän 5.5 ehdon (ii) perusteella γ_i voidaan x_{j-1}:n ja x_j:n välillä korvata janalla E kasvattamatta pituutta $\mathrm{len}_d(\gamma_i)$. Kun tämä tehdään kaikille pareille x_{j-1}, x_j, saadaan murtoviiva $\gamma_{i+1} \subset \mathcal{E}_{(m'-i)k}$, jolle siis $\mathrm{len}_d(\gamma_i) \geq \mathrm{len}_d(\gamma_{i+1})$. Koska tämä pätee erityisesti kun $i = (m' - m)$, jolloin $\gamma_{(m'-m)} \subset \mathcal{E}_{mk}$, saadaan (32):n perusteella

$$\mathrm{len}_d(\gamma_1) \geq \dots \geq \mathrm{len}_d(\gamma_{m'-m}) \geq \mathrm{len}_d(\gamma_0).$$

Tämä todistaa lemman alkuosan.

Jos x ja y ovat kolmion $P_\sigma \subset \mathcal{E}_{mk}$, $\sigma \in F^{mk}$, sivujanan E päätepisteet, täytyy lauseen alkuosan ja ehdon 5.5(ii) perusteella olla $\gamma_0 = E$, jolloin $\mathrm{len}_d(\gamma_0) = d(x,y) = \rho_\sigma |x-y|$. $\square$

Seuraus 5.7. *(i) Kun $x \neq y \in \mathcal{V}$, on $d(x,y) > 0$.*
(ii) Etäisyysfunktio $d = d_{k,\rho}$ on metriikka $\mathcal{V}$:ssä.

Todistus. (i) Olkoot $x \neq y \in \mathcal{V}$. Valitaan $m \in \mathbb{N}_0$, jolle $x, y \in \mathcal{V}_{mk}$. Lemman 5.6 perusteella löydetään murtoviiva $\gamma = \gamma^{x,y} \subset \mathcal{E}_{mk}$, jolle $\mathrm{len}_d(\gamma) = d(x,y)$. Tällöin

$$d(x,y) = \mathrm{len}_d(\gamma) \geq \rho_{\min}^{m+1}\, \mathrm{len}_{\mathrm{euk}}(\gamma) \geq \rho_{\min}^{m+1} |x-y| > 0,$$

missä $\rho_{\min} = \min\{\rho_\sigma : \sigma \in F^k\} > 0$ ja $\mathrm{len}_{\mathrm{euk}}$ on käyrän normaali euklidinen pituus.
(ii) Kohdasta (i) seuraa, että $d(x,y) = 0 \iff x = y$. Symmetrisyys on selvää, ja kun $x, y, z \in \mathcal{E}$, valitaan murtoviivat $\gamma_1^{x,z}$ ja $\gamma_2^{z,y}$, joille $\mathrm{len}_d(\gamma_1) = d(x,z)$ ja $\mathrm{len}_d(\gamma_2) = d(z,y)$, jolloin saadaan murtoviiva $\gamma = \gamma^{x,y} = \gamma_1 \cup \gamma_2$ ja

$$d(x,y) \leq \mathrm{len}_d(\gamma) \leq \mathrm{len}_d(\gamma_1) + \mathrm{len}_d(\gamma_2) = d(x,z) + d(z,y).$$

Siten d on todistettu metriikaksi joukossa $\mathcal{V}$. $\square$

Lause 5.8. *(i) Identtinen kuvaus* $\mathrm{id} : (\mathcal{V}, |\cdot|) \to (\mathcal{V}, d)$ *on Lipschitz.*
(ii) Joukon $\mathcal{V}$ metriikka $d = d_{k,\rho}$ laajenee K:n metriikaksi $d = d_{k,\rho}$.
(iii) Identtinen kuvaus $\mathrm{id} : (K, |\cdot|) \to (K, d)$ *on Lipschitz-homeomorfismi.*

Todistus. (i) Tämä seuraa $\mathcal{E}$:n 2-kvasikonveksisuudesta: kun $x, y \in \mathcal{V}$, on olemassa murtoviiva $\gamma = \gamma^{x,y} \subset \mathcal{E}$, jolle $d(x,y) \leq \mathrm{len}_d(\gamma) \leq \mathrm{len}_{\mathrm{euk}}(\gamma) \leq 2|x-y|$. Siis id on 2-Lipschitz.
(ii) Koska $\overline{\mathcal{V}} = K$, voidaan kaikille $x, y \in K$ määritellä

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,, \tag{33}$$

missä (x_n) ja (y_n) ovat mitkä tahansa $\mathcal{V}$:n jonot, joille $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. Se, että d on metriikka K:ssa, seuraa nyt suoraan 5.7(ii):sta ja (33):sta.
(iii) Kun $x, y \in K$ ja $x_n \to x$, $y_n \to y$, saadaan (i):n perusteella

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq 2 \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 2|x-y|,$$

joten $\mathrm{id} : (K, |\cdot|) \to (K, d)$ on myös 2-Lipschitz. Edelleen id on homeomorfismi, sillä K on kompakti. $\square$

Sierpinskin kolmiolle on siis onnistuttu konstruoimaan uusi metriikka d sallitun painofunktion $\boldsymbol{\rho}$ avulla. Seuraavaksi tavoitteena on osoittaa, että d on kvasisymmetrinen SK:n euklidisen metriikan kanssa. Ennen tätä annetaan vielä hyödylliset arviot etäisyyksille $d(x,y)$ ja halkaisijoille $d_d(P_\sigma)$ verrattuna euklidisiin etäisyyksiin ja halkaisijoihin:

Lemma 5.9. *(i) Kun $x, y \in SK$ ja P_σ, missä $\sigma \in F^{mk}$, $m \in \mathbb{N}_0$, on pienin kolmio, joka sisältää x:n ja y:n, on olemassa vakiot $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ siten, että*

$$c_1\, \rho_\sigma |x-y| \leq d(x,y) \leq c_2\, \rho_\sigma |x-y|. \tag{34}$$

(ii) On olemassa vakiot $0 < c_3 \leq c_4 < \infty$ siten, että

$$c_3\, \rho_\sigma\, d_{\text{euk}}(P_\sigma) \leq d_d(P_\sigma) \leq c_4\, \rho_\sigma\, d_{\text{euk}}(P_\sigma) \tag{35}$$

kaikilla $\sigma \in F^{mk}$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Todistus. (i) Metriikan d määrittelyn (kaava (33)) perusteella riittää todistaa, että (34) pätee, kun $x, y \in \mathcal{V}$. Olkoot siis $x, y \in \mathcal{V}$ ja olkoon P_σ, $\sigma \in F^{mk}$, $m \in \mathbb{N}_0$, pienin kolmio, joka sisältää x:n ja y:n. Lemman 5.3 perusteella on olemassa murtoviiva $\gamma = \gamma^{x,y} \subset P_\sigma$, jolle $\text{len}_{\text{euk}}(\gamma) \leq 2|x-y|$. Koska $\rho_\sigma \leq 1$ kaikilla σ, saadaan

$$d(x,y) \leq \text{len}_d(\gamma) \leq \rho_\sigma\, \text{len}_{\text{euk}}(\gamma) \leq 2\rho_\sigma |x-y|,$$

joten voidaan valita $c_2 = 2$.

Olkoot sitten $\alpha, \beta \in F^{(m+1)k}$ siten, että $P_\alpha, P_\beta \subset P_\sigma$ ja $x \in P_\alpha \setminus P_\beta$, $y \in P_\beta \setminus P_\alpha$. Olkoon $\gamma_0 = \gamma_0^{x,y} \subset \mathcal{E}$ lemman 5.6 antama murtoviiva, jolle $d(x,y) = \text{len}_d(\gamma_0)$. Jaetaan tarkastelut kahteen tapaukseen sen perustella, onko (a) $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$ vai (b) $P_\alpha \cap P_\beta \neq \emptyset$.

Tapauksessa (a) on olemassa ainakin yksi $\omega \in F^{(m+1)k}$, jolle $P_\omega \subset P_\sigma$ ja γ_0 kulkee P_ω:n läpi. Koska $\rho_\omega \geq \rho_{\min}\, \rho_\sigma$ ja $d_{\text{euk}}(P_\omega) = \lambda^k\, d_{\text{euk}}(P_\sigma)$, missä siis $\lambda = \frac{1}{2}$, saadaan

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq \rho_\omega\, d_{\text{euk}}(P_\omega) \geq \rho_{\min}\, \rho_\sigma\, d_{\text{euk}}(P_\omega) \\ &\geq \rho_{\min}\, \rho_\sigma\, \lambda^k\, d_{\text{euk}}(P_\sigma) \\ &\geq \rho_{\min} \lambda^k\, \rho_\sigma |x-y|. \end{aligned}$$

Tapauksessa (b) on olemassa $w \in \mathcal{V}$, jolle $P_\alpha \cap P_\beta = \{w\}$. Valitaan edelleen suurimmat alikolmiot $P_{\alpha'} \subset P_\alpha$, $P_{\beta'} \subset P_\beta$, $\alpha' \in F^{(m+s_1)k}$, $\beta' \in F^{(m+s_2)k}$ joillakin $s_1, s_2 \geq 1$, joille $\{w\} = P_{\alpha'} \cap P_{\beta'}$ ja $x \notin P_{\alpha'}$, $y \notin P_{\beta'}$. Tällöin vaatimuksen 5.5(i) perusteella $\rho_{\alpha'} = \rho_\alpha$ ja $\rho_{\beta'} = \rho_\beta$. Alikolmioiden

$P_{\alpha'}$ ja $P_{\beta'}$ maksimaalisuuden perusteella $|x-w| \leq \lambda^{-k} d_{\mathrm{euk}}(P_{\alpha'})$ ja $|y-w| \leq \lambda^{-k} d_{\mathrm{euk}}(P_{\beta'})$, joten saadaan $d_{\mathrm{euk}}(P_{\alpha'}) + d_{\mathrm{euk}}(P_{\beta'}) \geq \lambda^k |x-y|$. Siten

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq \rho_{\alpha'} d_{\mathrm{euk}}(P_{\alpha'}) + \rho_{\beta'} d_{\mathrm{euk}}(P_{\beta'}) = \rho_{\alpha} d_{\mathrm{euk}}(P_{\alpha'}) + \rho_{\beta} d_{\mathrm{euk}}(P_{\beta'}) \\ &\geq \rho_{\min} \rho_\sigma \big(d_{\mathrm{euk}}(P_{\alpha'}) + d_{\mathrm{euk}}(P_{\beta'})\big) \\ &\geq \rho_{\min} \lambda^k \rho_\sigma |x-y|. \end{aligned}$$

Tapauksissa (a) ja (b) voidaan siis kummassakin valita $c_1 = \rho_{\min}\lambda^k$, joten väite (i) on todistettu.

(ii) Olkoon sitten $\sigma \in F^{mk}$. Epäyhtälön (35) oikea puoli seuraa (34):n vastaavasti, joten $c_4 = 2$. Vasenta puolta varten olkoot x ja y kolmion P_σ kärkipisteitä. Tällöin lemma 5.6 antaa

$$d_d(P_\sigma) \geq d(x,y) \overset{5.6}{=} \rho_\sigma |x-y| = \rho_\sigma d_{\mathrm{euk}}(P_\sigma),$$

joten c_3:ksi voidaan valita 1 ja lemma on todistettu. □

Merkintä 5.10. Olkoon X joukko ja $F, G : X \to \mathbb{R}$ kuvauksia. Käytetään merkintää $F \approx G$, jos on olemassa vakio $0 < C < \infty$ siten, että

$$F(x)/C \leq G(x) \leq CF(x)$$

kaikilla $x \in X$.

Lemma 5.11. *Olkoot A, B, E ja F kuvauksia $X \to \mathbb{R}$. Jos $A \approx B$ ja $E \approx F$, niin $(A/E) \approx (B/F)$.*

Todistus. Nyt siis $A(x)/C_1 \leq B(x) \leq C_1 A(x)$ ja $E(x)/C_2 \leq F(x) \leq C_2 E(x)$ kaikilla $x \in X$. Siten

$$\frac{A(x)/E(x)}{C_1 C_2} = \frac{A(x)/C_1}{C_2 E(x)} \leq \frac{B(x)}{F(x)} \leq \frac{C_1 A(x)}{E(x)/C_2} = C_1 C_2 \frac{A(x)}{E(x)}$$

kaikilla $x \in X$. □

Nyt voidaankin todistaa tämän kappaleen tärkein tulos:

Lause 5.12. *Kun $k \in \mathbb{N}$ ja $\boldsymbol{\rho} : F^k \to (0,1]$ on sallittu painofunktio, on metriikka $d = d_{k,\rho}$ kvasisymmetrinen SK:n euklidisen metriikan $|\cdot|$ kanssa.*

Todistus. Lemman 3.2 mukaan riittää löytää homeomorfismi $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ siten, että

$$\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \leq \eta\left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right) \tag{36}$$

kaikilla $x, y, z \in K$, $x \neq y$. Skaalaamalla SK sopivasti, voidaan tehdä yksinkertaistava oletus $d_{\text{euk}}(SK) = 1$. Lemman 3.13 ja (33):n perusteella riittää todistaa, että (36) pätee kaikilla $x, y, z \in \mathcal{V}$. Koska SK on itsesimilaari, riittää todistaa, että (36) pätee, kun pienin kolmio P_ω, missä $\omega \in F^{mk}$, $m \in \mathbb{N}_0$, joka sisältää pisteet x, y ja z on $P_0 = P$. Merkitään P_σ:lla pienintä kolmiota, joka sisältää x:n ja y:n ja P_τ:lla pienintä kolmiota, joka sisältää x:n ja z:n, missä $\sigma \in F^{m'k}$ ja $\tau \in F^{mk}$ joillakin $m, m' \in \mathbb{N}_0$. Lemman 5.9 perusteella

$$d(x,y) \approx \rho_\sigma |x-y|\,, \quad d(x,z) \approx \rho_\tau |x-z|, \tag{37}$$

missä $\approx$ on merkinnän 5.10 mukainen relaatio.

Jaetaan tarkastelut nyt kolmeen tapaukseen sen mukaan, miten joukot P_σ ja P_τ suhtautuvat toisiinsa:

(i) $P_\sigma \subset P_\tau = P$,

(ii) $P_\tau \subset P_\sigma = P$,

(iii) $P_\sigma \not\subseteq P_\tau \neq P$, $P_\tau \not\subseteq P_\sigma \neq P$.

Tapaus (i): Nyt siis $\rho_\tau = 1$, joten lemman 5.11 ja (37):n perusteella saadaan

$$\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \approx \frac{\rho_\sigma |x-y|}{|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{|x-z|}\,.$$

Tapaus (iii): Nyt pitää olla $P_\sigma \cap P_\tau = \{x\}$, eli P_σ ja P_τ ovat vierekkäiset kolmiot; kuitenkin voi olla $m \neq m'$. Valitaan suurimmat kolmiot $P_{\sigma'}$ ja $P_{\tau'}$ joille $x, y \in P_{\sigma'}$, $x, z \in P_{\tau'}$ ja $P_{\sigma'} \cap P_{\tau'} = \{x\}$, sekä $\sigma' \in F^{lk}, \tau' \in F^{l'k}$ joillekin $l, l' \in \mathbb{N}_0$. Tällöin pienin kolmio P_ω, joka sisältää $P_{\sigma'}$:n ja $P_{\tau'}$:n ja $\omega \in F^{nk}$, $n \in \mathbb{N}_0$, on $P_0 = P$ alussa tehdyn oletuksen perusteella. Siten $\rho_{\min} \leq \rho_{\tau'}$, $\rho_{\sigma'} \leq 1$. Ehdon 5.5(i) perusteella $\rho_\sigma = \rho_{\sigma'}$ ja $\rho_\tau = \rho_{\tau'}$, joten saadaan

$$\rho_\sigma \, \rho_{\min} \leq 1 \cdot \rho_\tau\,, \qquad \text{josta} \qquad \rho_\sigma \leq \frac{1}{\rho_{\min}} \rho_\tau\,.$$

Nyt lemman 5.11 ja (37):n mukaisesti

$$\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \approx \frac{\rho_\sigma |x-y|}{\rho_\tau |x-z|} \leq \frac{1}{\rho_{\min}} \cdot \frac{|x-y|}{|x-z|}\,.$$

Tapaus (ii): On siis jäljellä tapaus, jossa $P_\tau \subset P_\sigma = P$. Nyt siis $\rho_\sigma = 1$, joten

$$\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \approx \frac{1}{\rho_\tau} \frac{|x-y|}{|x-z|}\,.$$

Oletetaan, että $\tau \in F^{mk}$, $m \in \mathbb{N}$. Jaetaan tarkastelut vielä kahteen osaan x:n ja y:n etäisyyden mukaan:

a) Oletetaan ensin, että $|x-y| \geq \lambda^k$, missä siis $\lambda = \frac{1}{2}$. Oletuksesta $d(P) = 1$ seuraa, että $d_{\mathrm{euk}}(P_\omega) = \lambda^{\nu k}$ kun $\omega \in F^{\nu k}$. Koska $|x-z| \leq d_{\mathrm{euk}}(P_\tau) = \lambda^{mk}$, saadaan

$$\frac{|x-y|}{|x-z|} \geq \frac{\lambda^k}{\lambda^{mk}} = \lambda^k \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{mk}. \tag{38}$$

Kun määritellään

$$q = \frac{\log(1/\rho_{\min})}{k\log(1/\lambda)}, \tag{39}$$

saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d(x,y)}{d(x,z)} &\approx \frac{1}{\rho_\tau}\frac{|x-y|}{|x-z|} \leq \left(\frac{1}{\rho_{\min}}\right)^m \frac{|x-y|}{|x-z|} \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{kmq} \frac{|x-y|}{|x-z|} \\ &\overset{(38)}{\leq} \left(\frac{1}{\lambda^k}\right)^q \left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)^{1+q}.\end{aligned}$$

b) Oletetaan sitten, että $|x-y| \leq \lambda^k$. Tällöin x ja y kuuluvat vierekkäisiin alikolmioihin P_α, P_β, $\alpha, \beta \in F^k$, joille siis $P_\alpha \cap P_\beta = \{w\}$. Merkitään $\tau = (\alpha, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}) \in F^{mk}$, missä $\tau_i \in F^k$ kaikilla $i = 1, \ldots, m-1$. Merkitään $p = \max\{j : \ w \in P_{(\alpha,\tau_1,\ldots,\tau_j)}\}$. Tällöin painofunktion $\boldsymbol{\rho}$ vaatimuksen 5.5(i) perusteella $\rho_{\tau_j} = 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, p$, joten

$$\rho_\tau = \rho_{\tilde\tau}\,, \qquad \text{missä } \tilde\tau = (\alpha, \tau_{p+1}, \ldots, \tau_{m-1}) \in F^{(m-p)k}.$$

Jos $p = m-1$ niin $w \in P_\tau$, joten $\rho_\tau = \rho_\alpha \geq \rho_{\min}$, ja saadaan

$$\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \approx \frac{1}{\rho_\tau}\frac{|x-y|}{|x-z|} \leq \frac{1}{\rho_{\min}}\frac{|x-y|}{|x-z|}.$$

Jos taas $p < m-1$, on

$$|x-w| \geq \lambda^{(p+2)k} \tag{40}$$

sillä $w \notin P_{(\alpha,\tau_1,\ldots,\tau_p,\tau_{p+1})}$. Yhtälöstä (40) saadaan heti

$$\lambda^{pk} \leq \frac{|x-w|}{\lambda^{2k}},$$

josta yhdessä arvion $|x-z| \leq \lambda^{km}$ kanssa seuraa

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{(m-p)k} = \frac{\lambda^{kp}}{\lambda^{km}} \leq \frac{|x-w|}{\lambda^{2k}|x-z|}. \tag{41}$$

Koska $\rho_\tau \geq \rho_{\min}^{(m-p)}$, saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\frac{d(x,y)}{d(x,z)} &\approx \frac{1}{\rho_\tau}\,\frac{|x-y|}{|x-z|} \leq \left(\frac{1}{\rho_{\min}}\right)^{(m-p)} \frac{|x-y|}{|x-z|} \\
&= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{k(m-p)q} \frac{|x-y|}{|x-z|} \\
&\overset{(41)}{\leq} \left(\frac{|x-w|}{\lambda^{2k}|x-z|}\right)^{q} \frac{|x-y|}{|x-z|} \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{2^q}{\lambda^{2kq}} \left(\frac{|x-y|}{|x-z|}\right)^{1+q},
\end{aligned}$$

missä q on sama kuin edellä (kaava (39)). Epäyhtälö $(*)$ seuraa siitä, että lemman 5.2 mukaan

$$|x-w| \leq |x-w| + |w-y| \leq \frac{|x-y|}{\sin(\theta/2)} \leq \frac{|x-y|}{\sin(\pi/6)} = 2|x-y|,$$

kun $\theta \geq (\pi/3)$ on janojen $[x,w]$ ja $[w,y]$ välinen kulma.

Kun nyt valitaan homeomorfismi $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ siten, että

$$\eta(t) = C \max\{t, t^{1+q}\},$$

missä $0 < C < \infty$ on sopiva vakio, pätee epäyhtälö (36) kaikissa tarkastelluissa tapauksissa eli kaikilla $x, y, z \in \mathcal{V}$, $x \neq z$. Siten tässä luvussa konstruoitu Sierpinskin kolmion metriikka d on kvasisymmetrinen SK:n euklidisen metriikan kanssa, mikä oli todistettava. □

5.3 Yläarvioita SK:n konformiselle dimensiolle

Edellä siis osoitettiin, että sallitun painofunktion $\boldsymbol{\rho} : F^k \to (0,1]$ avulla määritelty metriikka $d = d_{k,\rho}$ on kvasisymmetrinen Sierpinskin kolmion tavallisen euklidisen metriikan kanssa. Tämän perusteella tiedetään, että $\dim_{\mathcal{C}} SK \leq \dim(SK, d)$ kaikille metriikoille $d = d_{k,\rho}$, missä $\boldsymbol{\rho}$ on jokin sallittu painofunktio. Jotta Sierpinskin kolmion konformiselle dimensiolle saadaan jokin konkreettinen yläraja, on siis tiedettävä mikä on $\dim(SK, d)$, tai saatava tälle ainakin jokin yläraja, sekä laskettava tämä jollekin metriikalle $d = d_{k,\rho}$. Seuraava lause antaakin kaivatun ylärajan $\dim(SK, d)$:lle:

Lause 5.13. *Kun $k \in \mathbb{N}$ ja $\boldsymbol{\rho} : F^k \to (0,1]$ on sallittu painofunktio, on*

$$\dim(SK, d_{k,\rho}) \leq s_0,$$

missä $s_0 = s_0(k, \boldsymbol{\rho})$ *on yhtälön*

$$\sum_{\sigma \in F^k} \rho_\sigma^{s_0} = 2^{k\, s_0} \tag{42}$$

yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Olkoon $s > s_0$. Tällöin (koska $\sigma_\rho \leq 1$ ja $\lambda^k \leq 1$)

$$\sum_{\sigma \in F^k} \rho_\sigma^s \lambda^{ks} < \sum_{\sigma \in F^k} \rho_\sigma^{s_0} \lambda^{k\, s_0} = 1,$$

missä siis (kuten aikaisemminkin) $\lambda = \frac{1}{2}$. Kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee selvästi

$$SK \subset \bigcup_{\sigma \in F^{mk}} P_\sigma \,.$$

Lemman 5.9 perusteella on olemassa vakio c_4 siten, että

$$d_d(P_\sigma) \leq c_4\, \rho_\sigma\, d_{\mathrm{euk}}(P_\sigma) \leq c_4 d_{\mathrm{euk}}(P_\sigma)$$

kaikilla $\sigma \in F^{mk}$. Koska $d_{\mathrm{euk}}(P_\sigma) = \lambda^{mk} d_{\mathrm{euk}}(P)$ kun $\sigma \in F^{mk}$, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{c_4\, \lambda^{mk} d_{\mathrm{euk}}(P)}(SK, d) &\leq \sum_{\sigma \in F^{km}} d_d(P_\sigma)^s \\
&\leq c_4^s \sum_{\sigma \in F^{mk}} \left(\rho_\sigma\, \lambda^{km}\right)^s d_{\mathrm{euk}}(P)^s \\
&= c_4^s \left(\sum_{\sigma \in F^k} \rho_\sigma^s \lambda^{ks} \right)^m d_{\mathrm{euk}}(P)^s,
\end{aligned}$$

josta antamalla $m \to \infty$ saadaan $\mathcal{H}^s(SK, d) = 0$. Siten $\dim(SK, d) \leq s$, ja antamalla $s \to s_0$ saadaan väite $\dim(SK, d) \leq s_0$. $\square$

Huomautus. Tapauksessa $\rho_\sigma = 1$ (jolloin siis $d_{k,\rho}(x, y) = |x - y|$) saadaan (42):sta $3^k = 2^{k\, s_0}$ eli $s_0 = \log 3 / \log 2 = \dim SK$.

Esimerkki 1. Annetaan arvio $\dim(SK, d_{3,\rho})$:lle, missä $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{3,\varepsilon}$ on kuten kappaleen 5.2 esimerkissä 2:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{3,\varepsilon} : F^3 \to (0, 1]\,;\ \rho_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad \sigma \in F^3 \setminus \Sigma \\ \varepsilon, & \qquad\quad \sigma \in \Sigma \end{cases}$$

kun $0 < \varepsilon \leq 1$ ja

$$\Sigma = \Big\{(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1)\Big\}.$$

Koska F^3:ssa on $3^3 = 27$ alkiota, ja siis $\rho_\sigma = \varepsilon$ kuudelle $\sigma \in F^3$, on 21 alkiota $\sigma \in F^3$ joille $\rho_\sigma = 1$. Siten yhtälöstä (42) saadaan

$$21 \cdot 1^{s_0} + 6 \cdot \varepsilon^{s_0} = 2^{3s_0} \quad \text{eli} \quad 21 + 6\varepsilon^{s_0} = 8^{s_0}\,,$$

missä s_0 on lauseen 5.13 mukaan yläraja $\dim(SK, d_{3,\rho})$:lle. Antamalla $\varepsilon \to 0$, saadaan rajalla lauseen 5.12 perusteella

$$\dim_{\mathcal{C}} SK \le s_0 = \log 21/\log 8 = 1.4641\ldots\,,$$

joten erityisesti

$$\dim_{\mathcal{C}} SK \le \frac{\log 21}{\log 8} < \frac{\log 27}{\log 8} = \frac{\log 3}{\log 2} = \dim SK\,. \tag{43}$$

Epäyhtälö (43) siis todistaa tavoittena olleen tuloksen

Lause 5.14. *Siepinskin kolmiolle*

$$1 \le \dim_{\mathcal{C}} SK < \dim SK.$$

Todistus. Alaraja seuraa SK:n yhtenäisyydestä ja lauseesta 4.7, ylärajan aidon epäyhtälön antaa (43). □

Esimerkin 1 painofunktio $\boldsymbol{\rho}$ on vielä aika ”karkea”. Seuraavassa esimerkissä annetaan SK:lle metriikka hieman monimutkaisemman painofunktion avulla ja saadaan parempi arvio $\dim_{\mathcal{C}} SK$:lle:

Esimerkki 2. Olkoon $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{5,\varepsilon}$ kuten kuvassa 12. Tällöin 117:lla $\sigma \in F^5$ on $\rho_\sigma = 1$, 48:lla $\sigma \in F^5$ on $\rho_\sigma = \frac{1}{2}$ ja 78:lla $\sigma \in F^5$ on $\rho_\sigma = \varepsilon$. Siten lauseen 5.13 mukaan $\dim(SK, d_{5,\rho}) \le s_0$, missä s_0 on yhtälön

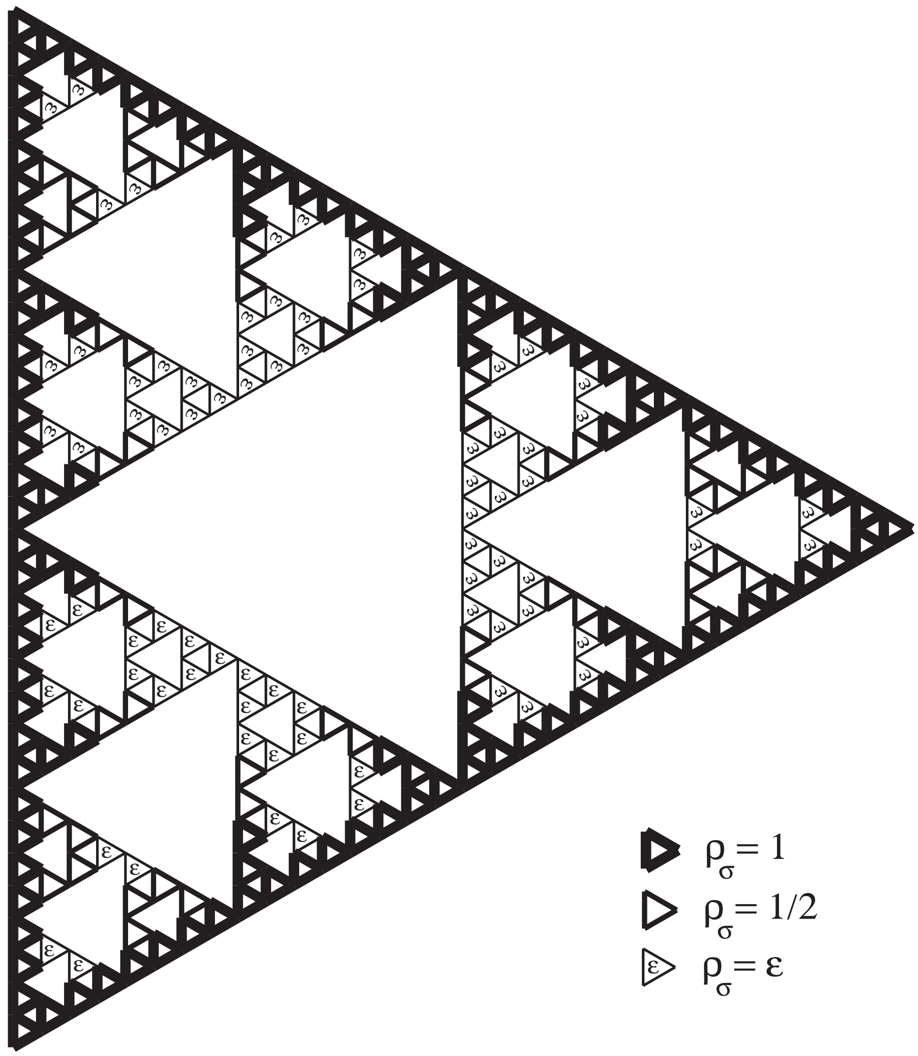
$$117 + 48 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{s_0} + 78 \cdot \varepsilon^{s_0} = 32^{s_0}$$

yksikäsitteinen ratkaisu. Antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan

$$\dim_{\mathcal{C}} SK \le s_0 = 1.41535\ldots\,,$$

joka on tietysti hieman parempi arvio kuin esimerkissä 1 saatu.

Huomautus. Ilmeisesti $\dim_{\mathcal{C}} SK = 1$. On kuitenkin (vielä) epäselvää, miten lähelle arvoa yksi päästään kappaleessa 5.2 konstruoidun kaltaisilla mertiikoilla. Sallittujen painofunktioiden antaminen käy joka tapauksessa työteliäämmäksi aina k:n kasvaessa. Tämän tutkielman kannalta oleellisinta on kuitenkin se, että Sierpinskin kolmion Hausdorffin dimensiota pystytään aidosti pienentämään kvasisymmetrisillä kuvauksilla.



Kuva 12: Esimerkin 2 painofunktio $\boldsymbol{\rho}_{5,\varepsilon}$

6 Yhteenvetoa ja muita huomioita

Tärkeimmät tässä tutkielmassa todistetut konformiseen dimensioon liittyvät tulokset voidaan tiivistää seuraavasti:

(i) Kun X on metrinen avaruus siten, että $\dim X > 0$, ja $R > 0$, löytyy X:n kanssa kvasisymmetrinen metrinen avaruus Y, jolle $\dim Y > R$ (Luvun 4 esimerkki 1).

(ii) Kun metrinen avaruus X on yhtenäinen, on $\dim_{\mathcal{C}} X \geq 1$ (Lause 4.7).

(iii) Kochin käyrän KK (samoin kuin yleistettyjen Kochin käyrien KK_α, $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$) konforminen dimensio on 1. Erityisesti löydetään joukko Y ($Y = [0,1]$) siten, että $KK \overset{QS}{\sim} Y$ ja $\dim Y = \dim_{\mathcal{C}} KK$. (Kappale 4.2)

(iv) Sierpinskin kolmion (SK) konforminen dimensio on aidosti pienempi kuin sen Hausdorffin dimensio (Lause 5.14).

Erityisesti kohdat (iii) ja (iv) osoittavat, että löytyy tyypillisiä fraktaalikuvioita, joiden Hausdorffin dimensiota voidaan pienentää kvasisymmetrisillä kuvauksilla. Lisäksi luvussa 5 esitetty konstruktio, joka siis koski vain Sierpinskin kolmiota ja jonka avulla saatiin arvio SK:n konformiselle dimensiolle, voidaan melko helposti yleistää koskemaan myös monia muita – rakenteeltaan SK:n kaltaisia – fraktaaleja. Tätä yleisempää konstruktiota on esitelty paperissa [12].

Kochin käyrälle KK siis löydetään kvasisymmetrinen joukko, jonka Hausdorffin dimensio on sama kuin KK:n konforminen dimensio (kohta (iii)). Yleisesti tilanteen ei tarvitse olla tämä, paperissa [2] nimittäin annetaan esimerkki joukosta A, jolle $\dim_{\mathcal{C}} A = 1$, mutta $\dim B > 1$ kaikilla $B \overset{QS}{\sim} A$.

Konformisen dimension teoria ei kuitenkaan olisi kovin mielenkiintoinen, jos esimerkiksi millekään tason $\mathbb{R}^2$ yhtenäiselle osajoukolle $A \subset \mathbb{R}^2$, jolle $1 < \dim A < 2$, ei saataisi lauseen 4.7 (lähes triviaalia) alarajaa $\dim_{\mathcal{C}} A \geq 1$ parempaa konformisen dimension arviota. Onneksi näin ei kuitenkaan ole, sillä paperissa [13] (katso myös [5, (15.10)]) osoitetaan, että itse asiassa jokaiselle $\alpha \geq 1$ löytyy metrinen avaruus X, jolle

$$\dim_{\mathcal{C}} X = \dim X = \alpha\,.$$

Erityisesti avaruudessa $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, on kaikilla $1 \leq \alpha \leq n$ olemassa joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $\dim_{\mathcal{C}} A = \dim A = \alpha$. Toisin sanoen on olemassa joukkoja, joiden Hausdorffin dimensio on kvasisymmetristen kuvausten mielessä minimaalinen. Millaisia nämä joukot sitten ovat?

Esimerkit [13]:ssa konstruoidaan käyttämällä *Ahlfors*[8]*-säännöllisiä* avaruuksia: Metrinen avaruus (X, d) on (Ahlfors) α-säännöllinen, jos on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\frac{1}{C}\, r^\alpha \leq \ \mathcal{H}^\alpha\big(\overline{B}(x,r)\big) \leq C\, r^\alpha \tag{44}$$

kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $0 < r < d(X)$, missä $\mathcal{H}^\alpha$ on (X, d):n α-ulotteinen Hausdorffin mitta. Ehdosta (44) seuraa erityisesti, että α-säännöllisen avaruuden Hausdorffin dimensio on α. Esimerkiksi Sierpinskin kolmio ja Kochin käyrät ovat Ahlfors-säännöllisiä. Voidaan osoittaa, että kaikilla $\alpha > 0$ on olemassa α-säännöllisiä joukkoja.

Paperin [13] päätuloksesta saadaan seuraava lause:

Lause 6.1. *Olkoon $\alpha > 1$. Kun Z on kompakti $(\alpha-1)$-säännöllinen avaruus, saadaan kompakti α-säännöllinen avaruus X, jolle $\dim_{\mathcal{C}} X = \dim X = \alpha$, kun asetetaan $X = Z \times [0,1]$ (varustettuna millä tahansa luonnollisella tuloavaruuden metriikalla).*

Esimerkki 1: "Rickman's Rug". Määritellään avaruus $RR = KK \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin lauseen 6.1 perusteella

$$\dim_{\mathcal{C}} RR = \dim RR = \dim KK + 1 = \frac{\log 4}{\log 3} + 1 = 2.2618\ldots$$

Lauseen 6.1 avulla on myös mahdollista saada arvioita joidenkin avaruuksien – kuten seuraavassa Sierpinskin maton – konformiselle dimensiolle:

Esimerkki 2: Cantorin joukko ja Sierpinskin matto. Cantorin[9] $\left(\frac{1}{3}\text{-}\right)$ joukko C on $\mathbb{R}$:n similitudien

$$S_1(x) = \tfrac{1}{3}\,x \quad \text{ja} \quad S_2(x) = \tfrac{1}{3}\,x + \tfrac{2}{3}$$

suhteen invariantti kompakti $\mathbb{R}$:n osajoukko.

Kuva 13: Cantorin joukko C

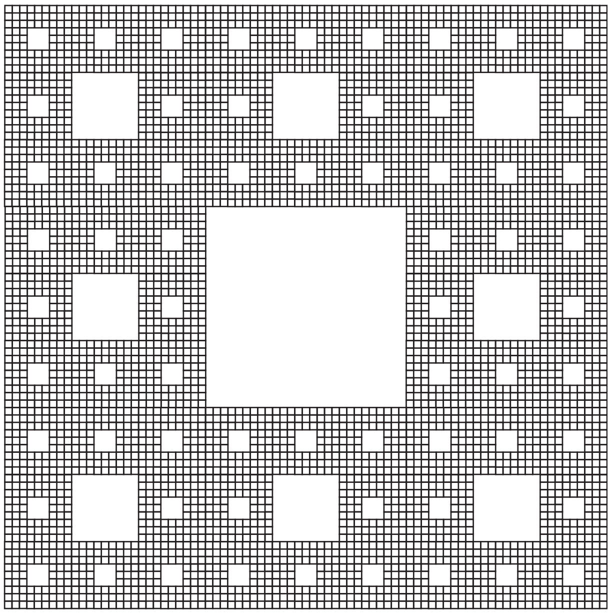
Cantorin joukko voidaan myös konstruoida tunnetulla iteratiivisella tavalla välistä $[0,1]$ siten, että konstruktion n:nnessä vaiheessa poistetaan kustakin jäljellä olevasta janasta keskimmäinen $\left(\frac{1}{3}\right)^n$-pituinen kolmannes (vertaa kuvaan 13). Kappaleen 2.3 tulosten perusteella

$$\dim C = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\ldots$$

[8] Lars Valerian Ahlfors, 1907–1996, Suomi–USA

[9] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845–1918, Venäjä–Saksa

Sierpinskin mattoa (SM, kuva 14) voidaan pitää Cantorin joukon yleistyksenä tasoon $\mathbb{R}^2$. Se on invariantti kahdeksan similitudin joukon $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_8\}$ suhteen, missä jokaisen S_i, $i = 1, \ldots, 8$, kutistussuhde on $\lambda = \frac{1}{3}$. Sierpinskin matto voidaan myös konstruoida yksikköneliöstä $[0,1] \times [0,1]$ ilmeisellä tavalla.



Kuva 14: Sierpinskin matto SM

Kappaleen 2.3 tulosten perusteella

$$\dim SM = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.8927\ldots$$

Joukkojen C ja SM määritelmien perusteella pätee $C \times [0,1] \subset SM$. Koska C on α-säännöllinen, $\alpha = \log 2 / \log 3$, on

$$\dim_{\mathcal{C}} \big(C \times [0,1]\big) = 1 + \dim C = 1 + \frac{\log 2}{\log 3}$$

lauseen 6.1 mukaisesti. Siten lemman 4.4 (i)-kohdan perusteella Sierpinskin maton konformiselle dimensiolle saadaan alaraja

$$\dim_{\mathcal{C}} SM \geq \dim_{\mathcal{C}} \big(C \times [0,1]\big) = 1 + \frac{\log 2}{\log 3} = 1.6309\ldots$$

Parempaa arviota $\dim_{\mathcal{C}} SM$:lle ei ilmeisesti (vielä) tunneta.

Viitteet

[1] Bishop, Christopher J.: *Quasiconformal mappings which increase dimension*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 24 (1999) 397–407.

[2] Bishop, Christopher J., Tyson, Jeremy: *Conformal dimension of the antenna set*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 129 (2001), 3631–3636.

[3] Evans, Lawrence C., Gariepy, Ronald F.: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[4] Falconer, Kenneth: *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications.* John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1990.

[5] Heinonen, Juha: *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] Hutchinson, John E.: *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713–747.

[7] Koskela, Pekka: *The degree of regularity of a quasiconformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994) 769–772.

[8] Mattila, Pertti: *Geometry of sets and measures in euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[9] McKemie, M. Jean: *Quasiconformal groups with small dilatation*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 12 (1987), 95–118.

[10] Purmonen, Veikko T.: *Mitta- ja integraaliteoriaa*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos, luentomoniste 14, 1999.

[11] Tukia, Pekka; Väisälä, Jussi: *Quasisymmetric embeddings of metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 5 (1980), 97–114.

[12] Tyson, Jeremy: *On the conformal dimensions of quasiconvex post-critically finite self similar sets*, preprint.

[13] Tyson, Jeremy: *Sets of minimal Hausdorff dimension for quasiconformal maps*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no 11, 3361–3367.

[14] Väisälä, Jussi: *Topologia 1*, Limes ry, 1999.

[15] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/
(University of St. Andrews, School of Mathematics and Statistics).