

Geometria, syksy 2013

Harjoitus 7

Tiistai 29.10.2013, klo 10–12 (MaD 245), klo 12–14 (MaD 259) ja klo 16–18 (MaD 259).

1. Nelikulmio $\square ABCD$ on *puolisuunnikas* jos $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Osoita, että puolisuunnikkaan $\square ABCD$ kärki A on kulman $\angle BCD$ sisäpuolella.

(Huom: merkintöjä vaihtamalla huomataan, että vastaava pätee itse asiassa jokaiselle puolisuunnikkaan kärjelle, ts. jokainen kärki on vastakkaisen kulman sisäpuolella.)

Koita keksiä myös esimerkki nelikulmiosta $\square ABCD$, jossa väite ei päde (kuva riittää).

2. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio, jossa kulmat $\angle A$ ja $\angle B$ ovat suoria ja $AD \cong BC$. Osoita, että tällöin $\angle C \cong \angle D$. Voidaanko tästä päätellä, että $\square ABCD$ on suorakulmio?

3. Olkoon $\square ABCD$ suorakulmio. Osoita, että $AB \cong CD$ ja $BC \cong AD$.

(Ohje: Totea ensin, että suorakulmio on puolisuunnikas, joten tehtävän 1 havainto on voimassa. Käytä Saccheri-Legendren lausetta kolmioille, jotka saadaan suorakulmion *lävistäjien* AC ja BD avulla, ja laske, että syntyvät vuorokulmat ovat yhtenevät.)

4. Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O , sekä l suora, joka leikkaa α :aa pisteessä P . Osoita, että jos $\overleftrightarrow{OP} \perp l$, niin l on α :n tangentti, ja että tällöin jokainen $R \in l \setminus \{P\}$ on α :n ulkopuolella.

5. Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O , ja olkoon l suora, joka leikkaa α :aa pisteessä P . Osoita, että jos l on α :n tangentti, niin $\overleftrightarrow{OP} \perp l$.

Seuraavat tehtävät ovat valmistelua aksioomien (H11) ja (H13) toteamiseen koordinaattigeometriassa.

6. Osoita, että kulmien yhtenevyys mallissa D (ks. kääntöpuoli) on *hyvin määritelty* eli että yhtenevyys ei riipu kylkipisteiden valinnasta. Toisin sanoen, osoita että jos $A' \in \overleftrightarrow{BA}$ ja $C' \in \overleftrightarrow{BC}$ (muista mitä nämä tarkoittavat mallissa D!), niin osoita laskemalla (käyttäen sisätulon laskusääntöjä), että

$$\frac{(A' - B|C' - B)}{\|A' - B\|\|C' - B\|} = \frac{(A - B|C - B)}{\|A - B\|\|C - B\|}.$$

7. Osoita, että siirrot T_b ja kierrot R_φ (ks. kääntöpuoli) säilyttävät janojen yhtenevyyden: Jos $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on joko tason siirto T_b tai kierto R_φ , ja $A, B \in \mathbb{R}^2$, niin $AB \cong L(A)L(B)$ (eli $\|A - B\|^2 = \|L(A) - L(B)\|^2$). Tässä tarvitaan hieman alkeellista lienaarialgebraa.)

8. Osoita, että siirrot T_b ja kierrot R_φ säilyttävät myös kulmien yhtenevyyden: Jos $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on joko tason siirto T_b tai kierto R_φ ja $\angle ABC$ on kulma tasossa $\mathbb{R}^2$, niin

$$\angle ABC \cong \angle L(A)L(B)L(C).$$

Ohje: Osoita ensin, että $\mathbb{R}^2$:ssä pätee ns. *polaarikaava*: kun $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$2(X|Y) = \|X + Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2.$$

Tämän kaavan avulla voidaan myös tässä tehtävässä hyödyntää tehtävän 7. tulosta.

Malli D (koordinaattigeometria)

Pisteitä ovat $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, suoria joukot

$$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(\alpha, \beta), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

missä $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ja piste P on suoralla l jos $P \in l$.

Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ pätee $A * B * C$ jos (ja vain jos) on olemassa $0 < \lambda < 1$ siten, että $B = A + \lambda(C - A)$, ts.

$$(b_1, b_2) = (a_1, a_2) + \lambda(c_1 - a_1, c_2 - a_2).$$

Janojen yhtenevyys mallissa D määritellään tavallisen euklidisen etäisyyden avulla seuraavasti: Pisteille $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ ja $D = (d_1, d_2)$ (missä $A \neq B$ ja $C \neq D$) pätee $AB \cong CD$ jos (ja vain jos) $\|A - B\| = \|C - D\|$ eli yhtäpitävästi $\|A - B\|^2 = \|C - D\|^2$, ts.

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2.$$

Kulmien yhtenevyys mallissa D määritellään seuraavasti: $\angle ABC \cong \angle DEF$ jos (ja vain jos)

$$\frac{(A - B|C - B)}{\|A - B\|\|C - B\|} = \frac{(D - E|F - E)}{\|D - E\|\|F - E\|},$$

missä $(A|B) = a_1b_1 + a_2b_2$ on $\mathbb{R}^2$:n sisätulo.

Apufunktiot T_b ja R_φ

Kun $b \in \mathbb{R}^2$, määritellään tason *siirto* b :n verran

$$T_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T_b(x) = x + b,$$

ja kun $\varphi \in [0, 2\pi[$, määritellään tason *kierto* φ :n verran

$$R_\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad R_\varphi(x) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$