

Geometria, syksy 2013

Harjoitus 2

Tiistai 24.9.2013, klo 10–12 (MaD 245), klo 12–14 (MaD 259) ja klo 16–18 (MaD 259).

Tarkastellaan seuraavaa aksiomaattista järjestelmää, jossa määrittelemättömiä peruskäsitteitä ovat *piste*, *suora* ja *suora kulkee pisteen kautta*, ja voimassa ovat seuraavat aksioomat:

- (A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa ainakin yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
- (A2) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa korkeintaan yksi suora, joka kulkee niiden kautta.
- (A3) Jos l ja m ovat eri suoria, niin on olemassa ainakin yksi piste P , jonka kautta sekä l että m kulkevat.
- (A4) On olemassa ainakin yksi suora ja jokainen suora kulkee ainakin kolmen pisteen kautta.
- (A5) Jos l on suora, niin on olemassa ainakin yksi piste, jonka kautta l ei kulje.
- (A6) Jokainen suora kulkee korkeintaan kolmen pisteen kautta.

1. Valitse jokin aksioomista (A1)–(A6) ja osoita, että se on *riippumaton* muista aksioomista konstruoimalla malli, jossa valitsemasi aksiooma ei päde, mutta muut viisi aksioomista (A1)–(A6) ovat voimassa.

2. Kuten tehtävä 1, mutta nyt jollekin toiselle aksioomalle (A1)–(A6).

3. Kuten tehtävä 2.

Huomio/haaste: Aksioomien (A3) ja (A6) riippumattomaksi osoittaminen on (ehkä) muita hankalampaa. Aksiooman (A6) tapauksessa kannattaa varmaan pohtia *pallogeometriaa*, ts. $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallon pintaa $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ siten, että pisteitä ovat joukot $\{x, -x\}$, missä $x \in S$ (ts. vastakkaiset pisteet samastetaan), ja suoria ovat origon kautta kulkevien tasojen ja S :n leikkaukset (eli isoympyrät).

Huom: Aksioomat (A1)–(A5) muodostavat ns. *elliptisen geometrian* perustan.

4. Todista, että jos kaikki aksioomat (A1)–(A6) ovat voimassa, niin on olemassa ainakin 7 eri pistettä. (Lisäkysymys jota ei käsitellä harjoituksissa: Voiko olla enemmän pisteitä?) Osoita myös, että aksioomajärjestelmä (A1)–(A6) on *ristiriidaton* konstruoimalla malli, jossa kaikki aksioomat ovat voimassa.

KÄÄNNÄ

Nyt unohdamme aksioomat (A1)–(A6) ja palaamme Hilbertin aksioomien pariin.

5. Olkoon l suora, jolla on tasan viisi pistettä, olkoot ne A, B, C, D ja E . Määrittele näille pisteille välissäolot $(*)$ siten, että aksioomat (H4)–(H6) toteutuvat.

6. Todista Lauseen 2.3.4 kohta: Jos $A * B * C$ ja $A * C * D$, niin $A * B * D$.

7. Todista, että jos (H1)–(H7) ovat voimassa, niin jokaisella janalla on äärettömän monta pistettä. (vihje: Lauseesta 2.3.4 (tai 2.3.7) voi olla iloa..)

8. Aksioomassa (H5) vaaditaan, että kun $A \neq B$, niin on olemassa piste D siten, että $A * D * B$. Osoita, että tämä kohta voidaan itse asiassa *todistaa*, jos tiedetään, että voimassa ovat aksioomat (H1)–(H4), (H5):n muut kohdat, sekä (H6) ja (H7). Mitä tämä siis sanoo aksioomiemme riippumattomuudesta ja *minimaalisuudesta*?

Ohje: Voit aloittaa valitsemalla pisteen $F \notin \overleftrightarrow{AB}$ ja tämän jälkeen pisteet G ja H joille $A * F * G$ ja $G * B * H$. Aksioomaa (H7) (tai Paschin lausetta) tarvitaan varmasti jossakin vaiheessa perustelua.