Euklidinen tasogeometria, kevät 2010

Keskeisiä asioita:

1. Aksiomaattinen menetelmä: miten tasogeometriaa rakennetaan aksioomista ja määrittelemättömistä peruskäsitteistä lähtien monimutkaisia lauseita sisältäväksi järjestelmäksi.

2. Määritelmät.

3. Keskeiset lauseet, joita tarvitaan tasogeometrian perusteiden rakentelussa; esim. vuorokulmat, ristikulmat, kolmioiden yhtenevyyslauseet, normaalien ja yhdensuuntaisten suorien olemassaolo, ulkokulmaepäyhtälö jne... Nämä on tunnettava ja niitä on osattava soveltaa, mutta myös todistusten pääkohdat (ainkin) on syytä hallita.

4. Paralleeliaksiooman erityisasema euklidisessa tasogeometriassa; paralleeliaksiooman seuraukset.

5. Yhdenmuotoisiin kolmioihin ja trigonometriaan liittyvät tulokset (myös todistuksia); kolmion tuntemattomien osien ratkaiseminen. Yhdensuuntaisprojektioiden idea (mutta ei todistuksen yksityiskohtia).

6. Ympyröihin liittyvät perustulokset; esim. tangentit, Thaleen lause ja kehäkulmalause.

7. Kolmion pinta-alan määritelmä, tunnettava myös Cevan lause (ei todistusta).

8. Harppi–viivain konstruktiot: miten suoritetaan ja perustellaan harppi–viivain konstruktioita.

Tentistä:

1. Aksioomia ei tarvitse opetella ulkoa, vaan ne listataan tenttipaperissa (ks. käänẗopuolelle).

2. Tentissä ei tarvita (eikä siten saa käyttää) laskimia.

ETG2010 Aksioomat

(A1) Jos P ja Q ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora, joka kulkee sekä P:n että Q:n kautta.

(A2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi eri pistettä.

(A3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

(A4) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$. Jos lisäksi A, B ja C ovat suoran l eri pisteitä, niin täsmälleen yksi seuraavista on voimassa: $C * A * B$, $A * C * B$ tai $A * B * C$.

(A5) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

(A6) (a) Jos ABl ja BCl, niin ACl
(b) Jos AlB ja BlC, niin ACl.

(A7) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma, $\overrightarrow{DE}$ puolisuora ja P piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{DE}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ siten, että $FP\overleftrightarrow{DE}$ ja $\measuredangle ABC \cong \measuredangle FDE$.

(A8) (SKS) Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $AB \cong DE$ ja $AC \cong DF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(A9) Olkoon α ympyrä. Jos suoralla l on piste P, joka on α:n sisäpuolella, niin l leikkaa α:n ainakin kahdessa pisteessä.

(PA) Olkoon l suora ja P piste siten, että l ei kulje P:n kautta. Tällöin on olemassa korkeintaan yksi suora, joka kulkee P:n kautta ja on yhdensuuntainen l:n kanssa.

(JMA) Jokaisella janalla AB on pituus $\overline{AB} > 0$ siten, että

(i) $\overline{OI} = 1$, missä OI on kiinteä "yksikköjana".
(ii) $\overline{AB} = \overline{CD} \iff AB \cong CD$
(iii) $A * B * C \iff \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$
(iv) $\overline{AB} < \overline{CD} \iff AB < CD$
(v) Jos $r > 0$, niin löytyy jana AB siten, että $\overline{AB} = r$

(KMA) Jokaisella kulmalla $\measuredangle ABC$ on astemitta $0 < (\measuredangle ABC)^\circ < 180$ siten, että

(i) $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle DEF)^\circ \iff \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$
(ii) Jos D on $\measuredangle ABC$:n sisällä, niin $(\measuredangle ABC)^\circ = (\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle DBC)^\circ$
(iii) $(\measuredangle ABC)^\circ < (\measuredangle DEF)^\circ \iff \measuredangle ABC < \measuredangle DEF$
(iv) $(\measuredangle A)^\circ = 90 \iff \measuredangle A$ on suora kulma.
(v) Vieruskulmien astemittojen summa on 180.