

Euklidinen tasogeometria, kevät 2010

Harjoitus 6, ti 4.5. klo 12-14 MaD 355 ja ke 5.5. klo 12-14 MaD 380

1. Todista (esim. sinilauseen avulla) *kulmanpuolittajalause* (Lause 7.3):

Jos $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * C$ ja $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\angle A$ puolittaja, niin

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

2. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Todista kosinilause

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \overline{BC} \cos \angle C$$

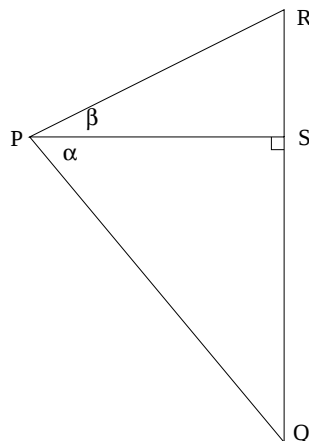
luennon tapauksissa (c)–(e), ts. kun $C * D * A$, $D = A$ tai $C * A * D$, missä $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$. (Kaksi tapausta riittää demopisteeseen.)

3. Olkoot $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$ kulmia siten, että $(\angle A)^\circ = (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ$. Osoita, että tällöin pätee yhteenlaskukaavakaava

$$\cos \angle A = \cos \angle B \cos \angle C - \sin \angle B \sin \angle C.$$

(Vertaa analyysin kaavaan $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.)

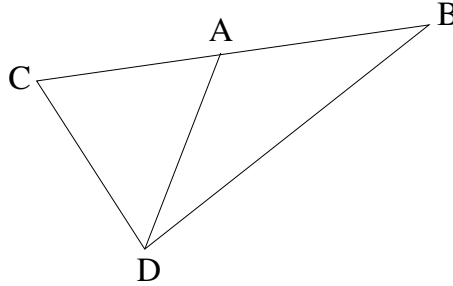
Ohje: Merkitse $\alpha = (\angle B)^\circ$ ja $\beta = (\angle C)^\circ$, jolloin siis $(\angle A)^\circ = \alpha + \beta$. Tutkitaan pelkästään tapausta, jossa $\angle B$ ja $\angle C$ ovat teräviä, jolloin kulmat voidaan asettaa kuten oheisessa kuvassa (miksi?). Käytä kosinilauseetta kolmioon $\triangle PQR$, ratkaise tästä $\cos(\alpha + \beta)$ ja käytä Pythagoraa lausetta sopivasti.



4. Palauta mieleesi ns. muistikolmiot, joiden avulla saadaan tarkat arvot $\sin \angle A$:lle ja $\cos \angle A$:lle kun $(\angle A)^\circ \in \{30, 45, 60\}$. Määritä näiden avulla tarkka arvo $\cos \angle B$:lle, kun $(\angle B)^\circ = 75$.

KÄÄNNÄ!

5. Olkoon oheisessa kuvassa $(\angle ACD)^\circ = 65$, $(\angle CDA)^\circ = 48$, $(\angle ADB)^\circ = 32$ ja $\overline{CD} = 70$. Määritä janan AB pituus.



6. Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O , ja olkoon l suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Osoita, että jos $l \perp \overleftrightarrow{OP}$, niin l on α :n tangentti.

7. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Osoita, että sivujen AB , AC ja BC keskinormaalit leikkaavat kaikki samassa pisteessä P . Miksi P on tällöin kolmion $\triangle ABC$ ympäri piirretyn ympyrän keskipiste (siis ympyrän, joka kulkee kaikkien kolmion kärkien kautta)?

Ohje: Totea ensin, että kaksi keskinormaalialia leikkaa aina toisensa jossakin pisteessä P ja osoita sitten, että P :n täytyy olla myös kolmannella keskinormaalilla (muista harjoitus 4, tehtävä 4).

8.* Ehkäpä kuuluisin geometrinen suhde on ns. *kultainen leikkaus* tai *kultainen suhde*, joka saadaan kun jana jaetaan kahteen osaan siten, että pienemmän osan suhde suurempaan on sama kuin suuremman osan suhde koko janaan. Toisin sanoen piste C jakaa janan AB kultaisen leikkauksen suhteessa, jos $A * C * B$ ja $\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}$. Laske mikä tämä kultaisen leikkauksen jakosuhde on ja konstruoi sitten harpin ja viivaimen avulla ns. *kultainen suorakulmio*, jonka sivut ovat kultaisen leikkauksen suhteessa toisiinsa.