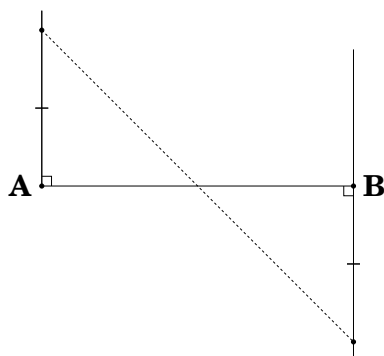


Euklidinen tasogeometria, kevät 2010

Harjoitus 3, ti 13.4. klo 12-14 MaD 355 (huomaa muuttunut aika ja paikka)
ja ke 14.4. klo 12-14 MaD 380

1. Olkoon l ja suora ja P piste. Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi suoran l normaali, joka kulkee P :n kautta.
Ohje: Riittää osoittaa, ettei tällaisia normaaleja ole enempää kuin yksi. Osoita, että kahden P :n kautta kulkevan normaalin olemassaolo johtaisi ristiriitaan vuorokulmalauseen (jos $P \notin l$) tai (A7):n (jos $P \in l$) kanssa.
2. Olkoon l suora ja P piste siten, että $P \notin l$. Osoita, että on olemassa (ainakin yksi) P :n kautta kulkeva suora m , joka on yhdensuuntainen l :n kanssa.
3. Olkoon l suora ja P piste siten, että $P \notin l$. Konstruoi harpilla ja viivaimella P :n kautta kulkeva suora m , joka on yhdensuuntainen l :n kanssa.
4. Konstruoi harpilla ja viivaimella kolmio, kun annettuna on sivu, kulma ja kulma (SKK). Onnistuuko konstruktio aina? Tarvitaanko joitain lisäehtoja? Saadanko annetuista osista useita erilaisia kolmioita?
5. Olkoon annettuna ympyrä ja sen keskipiste. Konstruoi harpilla ja viivaimella tämän ympyrän sisälle neliö (siis neliö, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä).
6. Olkoon annettuna ympyrä ja sen keskipiste. Konstruoi harpilla ja viivaimella tämän ympyrän sisälle tasasivuinen kolmio ja säännöllinen kuusikulmio (ei tarvitse tehdä tässä järjestyksessä). Mitä muita säännöllisiä monikulmioita osaisit konstruoida?
7. Todista, että jokaisella janalla on keskipiste. Voit käyttää apuna oheista kuvaa. Mieti myös, miten keskipiste konstruoidaisiin harpilla ja viivaimella.



Kuva 1: Janan AB keskipisteen olemassaolon todistus

8. Todista sivu-sivu-sivu -yhtenevyysääntö kolmiolle.
Ohje: Olkoot kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ vastinsivut yhtenevät. Valitse aksioomien (A5) ja (A7) avulla piste P siten, että $\angle PDE \cong \angle CAB$, $PD \cong CA$ ja $\overleftrightarrow{PDE} \cong \overleftrightarrow{DEF}$. Tutki syntyneitä tasakylkisiä kolmioita, huomaa erityisesti, että nyt esim. $EF \cong EP$ (miksi?). Voit käyttää hyväksi myös kulmien "yhteenlaskua" ja/tai "vähentämistä" (vrt. kulmamitta-aksioma).

KÄÄNNÄ!

Jana- ja kulmamitta-aksioomat

Valitaan aluksi kiinteä ”yksikköjana” OI johon muita janoja verrataan. Tällöin pätee

(JMA) Jokaisella janalla AB on pituus $\overline{AB} > 0$ siten, että

(i) $\overline{OI} = 1$

(ii) $\overline{AB} = \overline{CD} \iff AB \cong CD$

(iii) $A * B * C \iff \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

(iv) $\overline{AB} < \overline{CD} \iff AB < CD$

(v) Jos $r > 0$, niin löytyy jana AB siten, että $\overline{AB} = r$

Kulmia verrataan johonkin kiinteään suoraan kulmaan $\angle KOI$. Tällöin pätee

(KMA) Jokaisella kulmalla $\angle ABC$ on astemitta $0 < (\angle ABC)^\circ < 180$ siten, että

(i) $(\angle ABC)^\circ = (\angle DEF)^\circ \iff \angle ABC \cong \angle DEF$

(ii) Jos D on $\angle ABC$:n sisällä, niin $(\angle ABC)^\circ = (\angle ABD)^\circ + (\angle DBC)^\circ$

(iii) $(\angle ABC)^\circ < (\angle DEF)^\circ \iff \angle ABC < \angle DEF$

(iv) $(\angle A)^\circ = 90 \iff \angle A$ on suora kulma.

(v) Vieruskulmien astemittojen summa on 180.