

Euklidinen tasogeometria, kevät 2009

Harjoitus 6, ti 5.5. klo 14-16 ja ke 6.5. klo 12-14, MaD 380

1. Todista (esim. sinilauseen avulla) *kulmanpuolittajalause*:

Jos $\triangle ABC$ on kolmio, $B * D * C$ ja $\overrightarrow{AD}$ on kulman $\angle A$ puolittaja, niin

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

2. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Todista kosinilause

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\overline{BC}\cos\angle C$$

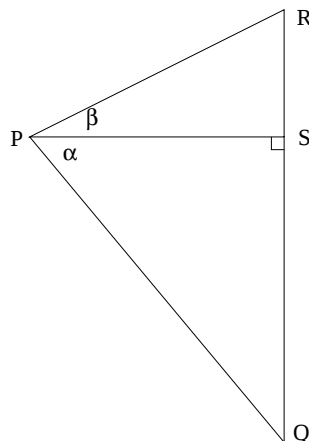
luennon tapauksissa (c)–(e), ts. kun $C * D * A$, $D = A$ tai $C * A * D$, missä $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$. (Kaksi tapausta riittää demopisteeseen.)

3. Olkoot $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$ kulmia siten, että $(\angle A)^\circ = (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ$. Osoita, että tällöin pätee yhteenlaskukaavakaava

$$\cos\angle A = \cos\angle B \cos\angle C - \sin\angle B \sin\angle C.$$

(Vertaa analyysin kaavaan $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.)

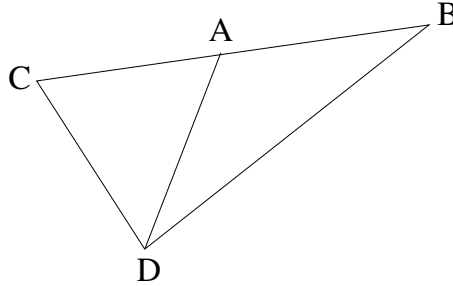
Ohje: Merkitse $\alpha = (\angle B)^\circ$ ja $\beta = (\angle C)^\circ$, jolloin siis $(\angle A)^\circ = \alpha + \beta$. Tutkitaan pelkästään tapausta, jossa $\angle B$ ja $\angle C$ ovat teräviä, jolloin kulmat voidaan asettaa kuten oheisessa kuvassa (miksi?). Käytä kosinilauseetta kolmioon $\triangle PQR$, ratkaise tästä $\cos(\alpha + \beta)$ ja käytä Pythagoraa lausetta sopivasti.



4. Palauta mieleesi ns. muistikolmiot, joiden avulla saadaan tarkat arvot $\sin\angle A$:lle ja $\cos\angle A$:lle kun $(\angle A)^\circ \in \{30, 45, 60\}$. Määritä näiden avulla tarkka arvo $\cos\angle B$:lle, kun $(\angle B)^\circ = 75$.

KÄÄNNÄ!

5. Olkoon oheisessa kuvassa $(\angle ACD)^\circ = 65$, $(\angle CDA)^\circ = 48$, $(\angle ADB)^\circ = 32$ ja $\overline{CD} = 70$. Määritä janan AB pituus.



6. Olkoon α ympyrä, jonka keskipiste on O , ja olkoon l suora, joka kulkee pisteen $P \in \alpha$ kautta. Osoita, että jos $l \perp \overleftrightarrow{OP}$, niin l on α :n tangentti.

7. Olkoon α ympyrä ja P piste. Konstruoi harpilla ja viivaimella α :lle pisteen P kautta kulkeva tangentti, kun

(a) $P \in \alpha$

(b) P on α :n ulkopuolella.

8. Ehkäpä kuuluisin geomertinen suhde on ns. *kultainen leikkaus* tai *kultainen suhde*, joka saadaan kun jana jaetaan kahteen osaan siten, että pienemmän osan suhde suurempaan on sama kuin suuremman osan suhde koko janaan. Toisin sanoen piste C jakaa janan AB kultaisen leikkauksen suhteessa, jos $A * C * B$ ja $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$. Laske mikä tämä kultaisen leikkauksen jakosuhte on ja konstruoi ns. *kultainen suorakulmio*, jonka sivut ovat kultaisen leikkauksen suhteessa toisiinsa.

9. (vapaaehtoinen vapputehtävä) Keksi oma tehtävä, jossa kolmion tuntemattomia osia ratkaistaan sini- ja/tai kosinilauseen sekä tunnettujen osien avulla. Tehtäväsi voi olla (tai voi olla olematta) sanallinen ja se voi koskea (tai voi olla koskematta) vapun viettoa. Ratkaise tehtäväsi itse tai anna se kaverin ratkaistavaksi.

KÄÄNNÄ!