Hardyn epäyhtälöitä ennen ja nyt

Juha Lehrbäck

12. kesäkuuta 2009

Matematiikan väitöskirjani *Weighted Hardy inequalities and the boundary size* tarkastettiin Jyväskylän yliopistossa marraskuussa 2008. Ohjaajanani toimi professori Pekka Koskela, ja tutkimukseni aiheena oli niin sanottujen Hardyn epäyhtälöiden voimassaolo euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimissa osajoukoissa. Esittelen tässä kirjoituksessa näiden epäyhtälöiden historiaa, keskeisimpiä aikaisemmin tunnettuja tuloksia sekä joitakin väitöskirjassani esiintyviä uusia havaintoja. Lisäksi pyrin muutamien esimerkkien avulla selvittämään Hardyn epäyhtälöiden läheistä yhteyttä alueen reunan kokoon, erityisesti reunan dimensioon eli ulottuvuuteen.

Alkuperäiset epäyhtälöt

Hardyn epäyhtälöiden historia alkaa 1900-luvun alun Englannista. Tuolloin aikansa vaikutusvaltaisimpiin matemaatikoihin kuulunut G. H. Hardy (1877–1947) tutki niin sanottuja Hilbertin epäyhtälöitä äärettömille sarjoille. Etsiessään yksinkertaista todistusta näille epäyhtälöille Hardy huomasi, että positiivitermisille ($a_k \geq 0$) sarjoille pätee seuraava arvio aina, kun $1 < p < \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \Big)^p \leq \big(\tfrac{p}{p-1}\big)^p \sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^p.$$

Pian tämän epäyhtälön löytymisen jälkeen oivallettiin, että vastaava epäyhtälö on voimassa myös integraalimuodossa, toisin sanoen, jos $1 < p < \infty$ ja $f \geq 0$ on mitallinen, niin

$$\int_0^\infty \Big(\tfrac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \Big)^p dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p dx, \tag{1}$$

missä epäyhtälön oikean puolen paras mahdollinen vakio on edelleen $C = \big(\frac{p}{p-1}\big)^p$. Epäyhtälö (1), *Hardyn p-epäyhtälö*, esiintyi ensimmäistä kertaa Hardyn vuoden 1925 julkaisussa [3] ja on tämän jälkeen osoittautunut yhdessä lukuisten yleistystensä kanssa hyödyllisiksi työkaluksi monissa eri yhteyksissä. Huomionarvoista on, että näitä epäyhtälöitä tutkivat 1900-luvun alkupuolella Hardyn lisäksi muiden muassa E. Landau, G. Pólya ja M. Riesz, kaikki tuttuja nimiä vähänkin enemmän matematiikkaa harrastaneille. Hardyn epäyhtälöiden löytymiseen johtaneita mielenkiintoisia vaiheita on selvitetty oivallisesti artikkelissa [7].

Jos funktio u on jatkuvasti derivoituva ja $u(0) = 0$, niin analyysin peruslauseen nojalla

$$|u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)|\,dt.$$

Jos nyt Hardyn epäyhtälössä (1) valitaan $f = |u'|$, saadaan funktiolle u vaihtoehtoinen ja erittäin käyttökelpoinen muoto Hardyn epäyhtälöstä,

$$\int_0^\infty \Big(\tfrac{|u(x)|}{x} \Big)^p dx \leq C \int_0^\infty |u'(x)|^p\,dx.$$

Tätä epäyhtälöä voidaan havainnollistaa seuraavasti: Jos funktio u saa (itseisarvoltaan) suuria arvoja joissakin pisteissä $x > 0$, jotka ovat kuitenkin lähellä nollaa, on näissä pisteissä suhde $|u(x)|/x$ hyvin suuri. Siten epäyhtälön vasemman puolen integraali on suuri, ja nyt Hardyn p-epäyhtälö siis sanoo, että myös oikealla puolella oleva u:n derivaatan integraali on suuri. Tämä puolestaan tarkoittaa sitä, että u:n muutosnopeuden täytyy olla ainakin jossakin kohdassa suurta. Hardyn epäyhtälö siis antaa tälle sinänsä luonnolliselle ilmiölle tarkan kvantitatiivisen muotoilun.

Kun edellisen epäyhtälön molemmille puolille lisätään vielä painofunktio x^β, missä $\beta \in \mathbb{R}$, saadaan yksiulotteinen *painotettu* Hardyn (p,β)-epäyhtälö

$$\int_0^\infty |u(x)|^p\, x^{\beta-p}\, dx \leq C \int_0^\infty |u'(x)|^p\, x^\beta\, dx. \tag{2}$$

Jos $\beta \neq p-1$, niin epäyhtälö (2) pätee vakiolla $C = \left(\frac{p}{|p-1-\beta|}\right)^p$ (ainakin) kaikille funktioille $u \in C_0^1(]0,\infty[)$, toisin sanoen jatkuvasti derivoituville funktioille, joiden kantaja on välin $]0,\infty[$ kompakti osajoukko. Yksiulotteisessa tapauksessa kompaktikantajaisuus tarkoittaa sitä, että on olemassa luvut $0 < a < A < \infty$ siten, että suljetun välin $[a, A]$ ulkopuolella u saa vain arvon nolla.

Epäyhtälön (2) todistus funktiolle $u \in C_0^1(]0,\infty[)$ on melko suoraviivainen. Jos nimittäin $1 < p < \infty$ ja $\beta \neq p-1$, niin u:n kompaktikantajaisuudesta seuraa, että osittaisintegroitaessa (2):n vasenta puolta sijoitustermi häviää. Jäljelle jääneen integraalin itseisarvoa voidaan arvioida käyttämällä Hölderin epäyhtälöä konjugaattieksponenteille p ja $p/(p-1)$, ja haluttu epäyhtälö seuraa. Yleisempi todistus, joka toimii myös muotoa (1) oleville painotetuille epäyhtälöille, löytyy esimerkiksi Hardyn ja kumppanien klassikkokirjasta *Inequalities* [4].

Korkeammat ulottuvuudet

Yksiulotteisia Hardyn epäyhtälöitä oli tutkittu jo useamman vuosikymmenen ajan, kun J. Nečas huomasi vuonna 1962, että vastaavat epäyhtälöt ovat tarpeellisia myös korkeammissa ulottuvuuksissa. Nečas tutki artikkelissaan [10] tiettyjen elliptisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkeavuutta painotetuissa avaruuksissa. Tätä varten hän tarvitsi painotettujen Sobolev- ja L^p-avaruuksien välisiä upotuksia, jotka puolestaan seuraavat epäyhtälön

$$\int_\Omega |u(x)|^p\, d_\Omega(x)^{\beta-p}\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, d_\Omega(x)^\beta\, dx \tag{3}$$

voimassaolosta funktioille $u \in C_0^1(\Omega)$. Tässä Ω on n-ulotteisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ alue, eli avoin ja yhtenäinen osajoukko, ja $d_\Omega(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ tarkoittaa pisteen $x \in \Omega$ etäisyyttä alueen Ω reunasta. Huomaa epäyhtälöiden (2) ja (3) samankaltaisuus: $x = d_\Omega(x)$ alueessa $\Omega =]0,\infty[\subset \mathbb{R}$ ja derivaatan itseisarvo $|u'(x)|$ vastaa gradientin pituutta $|\nabla u(x)|$ yksiulotteisessa tapauksessa; molemmathan ilmaisevat funktion muutosnopeutta. Siten on oikeutettua kutsua myös epäyhtälöä (3) Hardyn (p,β)-epäyhtälöksi. Tämän epäyhtälön havainnollinen tulkinta on samankaltainen kuin epäyhtälön (2), sillä jos funktion u reuna-arvot ovat nollia mutta u saa suuria arvoja reunan läheisyydessä, täytyy epäyhtälön (3) perusteella myös funktion muutosnopeuden olla suurta ainakin jossakin kohdassa.

Näin oli saatu korkeampiulotteinen vastine alkuperäisille Hardyn epäyhtälöille, ja seuraavaksi oli luonnollista kysyä, missä alueissa tällainen epäyhtälö on voimassa. Toisin sanoen, milloin on olemassa vakio $C > 0$ niin, että epäyhtälö (3) pätee kaikille alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funktioille $u \in C_0^1(\Omega)$ tällä samalla vakiolla. Ensimmäisen vastauksen tähän kysymykseen antoi jo Nečas osoittaessaan, että Hardyn (p,β)-epäyhtälö on voimassa rajoitetussa Lipschitz-alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aina, kun $1 < p < \infty$ ja $\beta < p-1$. Aluetta $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan Lipschitz-alueeksi, jos sen reuna voidaan esittää Lipschitz-jatkuvien funktioiden kuvaajien yhdisteenä.

Nečasin todistus Hardyn epäyhtälöille nojaa vahvasti yksiulotteiseen epäyhtälöön (2), jota voidaan tässä tapauksessa käyttää alueen reunan lähellä juuri Lipschitz-parametrisaatioiden avulla. Jos epäyhtälössä (2) korvataan integrointiväli $]0,\infty[$ rajoitetulla välillä $]a,b[$ ja $u \in C_0^1\big(]a,b[\big)$, niin voidaan osoittaa, että tällöin epäyhtälö pätee täsmälleen kun $\beta < p-1$. Koska rajoitetussa Lipschitz-alueessa Ω epäyhtälöä (2) käytetään juuri rajoitetuilla väleillä, on luonnollista, että Hardyn (p,β)-epäyhtälö pätee Ω:ssa näillä samoilla β:n arvoilla. Raja $p-1$ on myös optimaalinen, sillä esimerkiksi pallossa $B \subset \mathbb{R}^n$ (joka on Lipschitz-alue) Hardyn (p,β)-epäyhtälö ei ole voimassa millään $\beta \geq p-1$.

Näin ollen Nečas antoi täsmällisen vastauksen Hardyn epäyhtälöiden voimassaololle Lipschitz-alueiden tapauksessa, mutta yleisempien alueiden osalta tämä kysymys jäi täysin avoimeksi vielä pitkäksi ajaksi. Yksiulotteisia epäyhtälöitä voi toki hyödyntää hieman lievemmilläkin oletuksilla, erityisesti alueissa, joiden reuna voidaan parametrisoida Hölder-jatkuvien funktioiden avulla, mutta toisaalta on olemassa valtava määrä kiinnostavia alueita, joiden reunalla ei ole olemassa minkäänlaista siistiä parametriesitystä. Tutkittaessa Hardyn epäyhtälöitä tällaisissa yleisissä alueissa tarvitaan siis täysin uusia, yksiulotteisesta tapauksesta riippumattomia lähestymistapoja.

Tärkeitä läpimurtoja tähän suuntaan saavutettiin viimein 1980-luvulla, kun oivallettiin Hardyn epäyhtälöiden ja alueen reunan (tai komplementin) potentiaaliteoreettisen paksuuden välinen yhteys. Ensimmäisenä tähän liittyviä tuloksia julkaisi A. Ancona [1] tapauksessa $p=2$, $\beta=0$, ja pian hänen jälkeensä toisistaan riippumatta J. Lewis [9] ja A. Wannebo [11] yleiselle $1<p<\infty$. Näissä töissä todistettiin, että jos alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ komplementti $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ on *tasaisesti p-paksu*, niin alueessa on voimassa Hardyn p-epäyhtälö (eli epäyhtälö (3), missä $\beta=0$), tai itse asiassa jopa (p,β)-epäyhtälö kaikilla $\beta < \beta_0$, missä β_0 on pieni p:stä riippuva positiivinen luku, kuten Wannebo osoitti. Tasainen p-paksuus muotoiltiin alunperin joukon *kapasiteetin* tiheyttä koskevaksi ehdoksi, mutta tämä ehto osoittautuu yhtäpitäväksi myös seuraavan geometrisemman Hausdorff-tyyppisen tiheysehdon kanssa: On olemassa eksponentti $\lambda > n-p$ siten, että kaikilla $w \in \Omega^c$ ja kaikilla $r>0$ pätee

$$\mathcal{H}^\lambda_\infty\big(\Omega^c \cap B(w,r)\big) \geq C r^\lambda. \tag{4}$$

Tässä

$$\mathcal{H}^\lambda_\infty(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^\infty r_i^\lambda : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(z_i,r_i) \right\}$$

on joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ Hausdorffin λ-sisältö, ja merkinnällä $B(x,r)$ tarkoitetaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ palloa, jolla on keskipiste $x \in \mathbb{R}^n$ ja säde $r>0$. Pienin luku $\lambda \geq 0$, jolle $\mathcal{H}^\lambda_\infty(E) > 0$, on joukon E Hausdorff-dimensio, jota merkitään $\dim_{\mathcal{H}}(E)$.

Karkeasti ottaen ehto (4) sanoo, että joukon Ω^c tulee olla joka paikassa ja kaikissa skaaloissa tutkittuna vähintään λ-ulotteinen. Tasaista paksuutta voikin helposti havainnollistaa seuraavilla esimerkeillä: n-ulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ piste on tasaisesti p-paksu kaikilla $p>n$, suora on p-paksu kaikilla $p>n-1$, kaksiulotteinen taso puolestaan kaikilla $p>n-2$ ja niin edelleen. Vastaavasti esimerkiksi Lipschitz-alueen Ω reuna (ja siten erityisesti komplementti) on tasaisesti p-paksu kaikilla $p>1$. Niinpä edellä mainittu Anconan, Lewisin ja Wannebon tulos sisältää erikoistapauksenaan osittain myös Nečasin aikaisemman tuloksen, joskaan Wannebon menetelmällä ei saada painoeksponentille β tarkkaa ylärajaa $\beta_0 = p-1$.

Pisteittäisiä epäyhtälöitä

Käyttämällä ideoita, jotka ovat samankaltaisia kuin Lewisin todistuksessa painottomille epäyhtälöille, nähdään, että itse asiassa alueen komplementin tasainen p-paksuus johtaa seuraavan *pisteittäisen* epäyhtälön voimassaoloon kaikilla $u \in C_0^1(\Omega)$ ja $x \in \Omega$:

$$|u(x)| \le C d_\Omega(x) \big(M_{2d_\Omega(x)} \big(|\nabla u|^q \big)(x) \big)^{1/q}. \tag{5}$$

Tässä q on jokin eksponentti, jolle pätee $1 < q < p$, ja

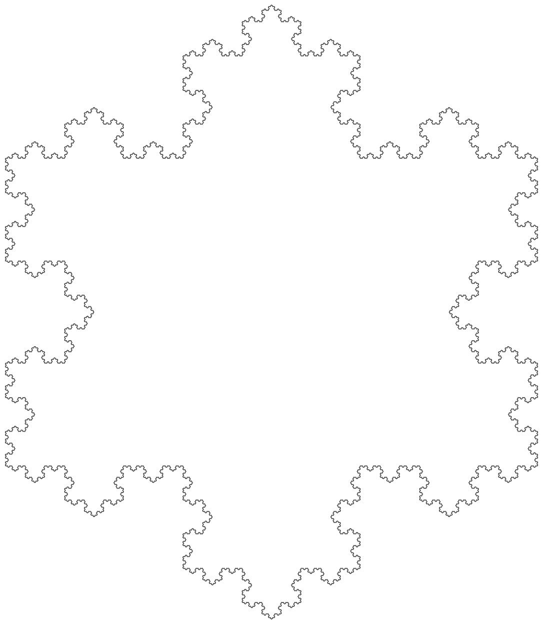
$$M_R f(x) = \sup_{0<r\le R} \fint_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

on rajoitettu Hardy-Littlewood maksimaalifunktio, joka saa (sopivasti tulkittuna) vain hieman suurempia arvoja kuin alkuperäinen funktio f. Merkintä $\fint_B$ tarkoittaa keskiarvointegraalia, jossa tavallinen integraali $\int_B$ jaetaan vielä joukon B mitalla. Havainnon pisteittäisten epäyhtälöiden voimassaolosta tekivät toisistaan riippumatta P. Hajłasz [2] sekä J. Kinnunen ja O. Martio [5] 1990-luvun loppupuolella. Tunnetun maksimaalifunktiolauseen perusteella pisteittäinen epäyhtälö (5) implikoi integraalimuotoisen (painottoman) Hardyn p-epäyhtälön, joten kutsummekin epäyhtälöä (5) pisteittäiseksi Hardyn epäyhtälöksi.

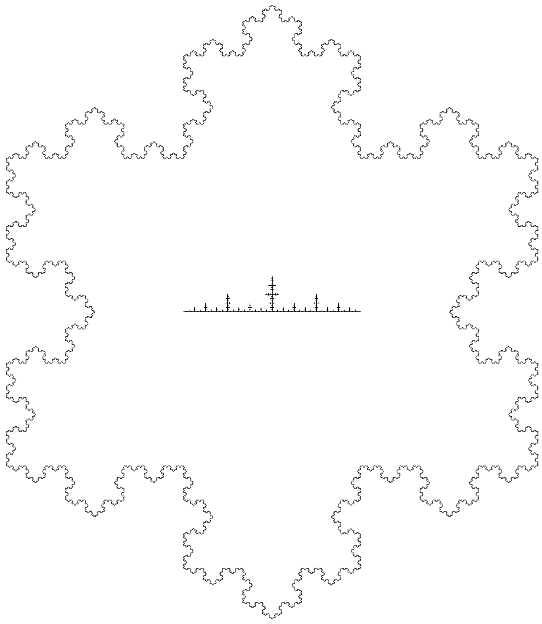
Toisaalta pisteittäinen epäyhtälö (5) on parempi ja tarkempi kuin tavallinen Hardyn epäyhtälö, koska (5):ssä funktion arvolle saadaan kasvunopeudesta riippuva yläraja jokaisessa pisteessä erikseen, eikä vain funktion kokonaiskäyttäytymisen huomioivan integraalin avulla. Epäyhtälö (5) onkin aidosti vahvempi kuin Hardyn p-epäyhtälö, eli on olemassa alueita, joissa Hardyn p-epäyhtälö on voimassa mutta pisteittäinen epäyhtälö (5) ei pädekään. Helpoin esimerkki tällaisesta alueesta on $\mathbb{R}^n$:n pallo, josta on poistettu keskipiste. Käyttämällä yksiulotteisia Hardyn epäyhtälöitä pallon säteitä pitkin nähdään, että tässä alueessa on voimassa Hardyn p-epäyhtälö kun $1 < p < n$ tai $n < p < \infty$, mutta pisteittäinen epäyhtälö pätee ainoastaan kun $n < p < \infty$. Tämä ilmiö on läheisessä yhteydessä siihen, että piste — tässä tapauksessa siis pallosta poistettu keskipiste — on tasaisesti p-paksu ainoastaan kun $n < p < \infty$. Artikkelissa [8] nimittäin osoitettiin käänteinen puoli Hajłaszin, Kinnusen ja Martion havainnolle: Jos alueessa Ω on voimassa pisteittäinen Hardyn epäyhtälö (5), niin tiheysehto (4) pätee jollakin eksponentilla $\lambda > n - p$, ja siten Ω^c on tasaisesti p-paksu. Näin saadaan mielenkiintoinen yhtäpitävyys analyyttisen epäyhtälön (5), geometrisen tiheysehdon (4) sekä alkuperäisen potentiaaliteoreettisen paksuusehdon välille. Erityisesti alueen komplementin paksuutta tai tiheyttä voidaan tarkastella pisteittäisten epäyhtälöiden avulla alueen sisältä käsin.

Painotettuja epäyhtälöitä epäsäännöllisissä alueissa

Jonkin verran yksinkertaistaen voimme todeta, että edellä mainittujen tulosten perusteella reunan dimensio $\lambda = n - p$ on kriittinen Hardyn p-epäyhtälön voimassaololle. Painotetulle (p, β)-epäyhtälölle vastaava raja tuntuisi olevan $\lambda = n - p + \beta = n - (p - \beta)$ eli sama kuin painottomalle $(p - \beta)$-epäyhtälölle, toki sillä edellytyksellä, että $\beta < p - 1$, jotta jälkimmäinen epäyhtälö olisi järkevä. Toisaalta raja $\beta < p - 1$ on tunnetusti paras mahdollinen ”siisteille” alueille, joten on perusteltua kysyä, onko tapaus $\beta \ge p - 1$ edes relevantti. Edellä totesimme, että Hardyn epäyhtälöiden voimassaolo riippuu alueen reunan koosta, joten saadaksemme parempia epäyhtälöitä kuin siisteissä alueissa, meidän olisi ilmeisesti tutkittava alueita, joilla on enemmän reunaa kuin siisteillä alueilla.



Kuva 1: lumihiutalealue



Kuva 2: antenni lumihiutaleessa

Olkoon esimerkiksi $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ *fraktaalisen* lumihiutalekäyrän sisällä oleva alue. Tavallisen kuvassa 1 esiintyvän "tasasivuisen" lumihiutalekäyrän dimensio on

$$\lambda = \log 4/\log 3 \approx 1{,}26$$

mutta konstruktiota sopivasti muuttamalla saadaan aikaan käyriä, joiden dimensio on mikä tahansa luku $\lambda \in \,]1,2[$. Joka tapauksessa alueella Ω_1 on todellakin enemmän reunaa kuin siisteillä alueilla, kuten vaikkapa ympyrällä tai neliöllä, sillä näiden reunan dimensio on tasossa $\mathbb{R}^2$ aina yksi. Lumihiutalekäyrä on kuitenkin hyvin säännöllinen joukko, jopa paloittain *itsesimilaari*, ja voidaankin osoittaa, että se toteuttaa tiheysehdon (4) (missä siis Ω^c korvataan lumihiutalekäyrällä eli Ω_1:n reunalla) eksponentilla λ. Painottoman tilanteen perusteella voisi siis odottaa, että alueessa Ω_1 olisi voimassa Hardyn (p,β)-epäyhtälö aina, kun $\lambda > 2-(p-\beta)$, eli kun $\beta < p-2+\lambda$ (nythän $n=2$).

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 2 aluetta $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, joka saadaan kun alueen Ω_1 keskeltä poistetaan antennijoukko A. Myös antenni on säännöllinen fraktaalijoukko, ja se voidaan muodostaa niin, että $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \lambda$, missä λ on lumihiutalekäyrän dimensio. Tällöin Ω_2:n reuna toteuttaa edelleen tiheysehdon (4) eksponentilla λ, joten voisimme jälleen odottaa, että alueessa Ω_2 olisi voimassa Hardyn (p,β)-epäyhtälö aina, kun $\beta < p-2+\lambda$. Jos kuitenkin tutkitaan sopivia funktioita, jotka saavat nollasta poikkeavia arvoja ainoastaan alueen keskellä olevan antennin alapuolella ja tällöinkin vain lähellä antennia, voidaan laskea, että ainakaan $(p,p-1)$-epäyhtälö ei ole voimassa; huomaa, että tässä $p-1 < p-2+\lambda$. Alue Ω_2 siis osoittaa, että pelkkä reunan tiheys ei riitä yleisessä tapauksessa Hardyn epäyhtälöiden voimassaoloon, vaan lisäksi tarvitaan joitakin lisäehtoja, esimerkiksi että reuna myös näyttää joka suuntaan vähintään λ-ulotteiselta — alueessa Ω_2 antenni näyttää alapuolelta katsottuna vain 1-ulotteiselta. Tämän esimerkkin perusteella voimmekin todeta, että eksponenteilla $\beta \geq p-1$ päästään painotettujen epäyhtälöiden avulla käsiksi ilmiöihin, joita ei esiinny painottomien epäyhtälöiden tapauksessa.

Artikkelissa [6] todistettiin, että sopivan näkyvyys- tai saavutettavuusehdon vallitessa reunan tiheysehto (4) eksponentilla λ johtaa todella painotettujen Hardyn (p, β)-epäyhtälöiden voimassaoloon kaikilla $\beta < p - n + \lambda$. Koska esimerkiksi kuvan 1 lumihiutalealueessa Ω_1 reuna on hyvin näkyvissä alueen sisälle, on Ω_1:ssä todella voimassa (p, β)-epäyhtälö aina kun $\beta < p - 2 + \lambda$. Itse asiassa [6]:ssa esitellään myös painotettu versio pisteittäisestä epäyhtälöstä (5) ja osoitetaan, että edellä mainituissa tilanteissa pätee jopa tällainen pisteittäinen epäyhtälö. Näistä tuloksista voidaan erityisesti vetää se johtopäätös, että Nečasin alkuperäisissä painotetuissa epäyhtälöissä ei ole lainkaan oleellista se, että alueen reuna on esitettävissä Lipschitz-funktioiden avulla, vaan ainoastaan se, että reuna on tasaisesti $(n-1)$-ulotteinen. Painotettujen Hardyn epäyhtälöisen voimassaoloa todistettaessa ratkaisevassa osassa on Poincarén epäyhtälöihin perustuva kerjutusargumentti, joka on tyypillinen tekniikka metrisissä avaruuksissa tapahtuvassa analyysissä. Siten onkin odotettavissa, että suuri osa Hardyn epäyhtälöitä koskevista tuloksista voidaan sujuvasti yleistää myös metrisiin avaruuksiin.

Reunan tiheysehto voidaan helpohkosti osoittaa välttämättömäksi myös painotettujen pisteittäisten Hardyn epäyhtälöiden tapauksessa, mutta näkyvyysehtojen osalta välttämättömyys on toistaiseksi avoin kysymys — tosin yhteys painottomiin epäyhtälöihin sekä tunnetut esimerkit viittaavat vahvasti siihen, että tapauksessa $\beta < p - 1$ näkyvyys ei ole oleellista, tai että tällainen ehto on jopa aina voimassa. Toisaalta kuvan 2 alue Ω_2 siis osoittaa, että tapauksessa $\beta \geq p - 1$ ainakin jonkinlainen lisäehto on reunan tiheyden lisäksi pakko olettaa, jotta voidaan olla varmoja Hardyn epäyhtälöiden voimassaolosta.

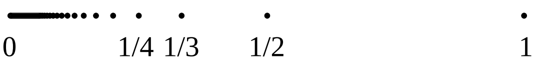
Pieniä reunoja

Kiinnostavia kysymyksiä ilmaantuu myös alueissa, joiden reuna sisältää sekä pieniä että suuria osia. Tällöin kiinteälle $1 < p < \infty$ tietyt reunan dimensiosta riippuvat painoeksponentin β arvot eivät ole koskaan mahdollisia. Jotta Hardyn (p, β)-epäyhtälö voisi olla voimassa, täytyy reunan pienten osien nimittäin olla riittävän pieniä, erityisesti niiden tulee näyttää kaikista suunnista ja kaikissa skaaloissa alle $(n - p + \beta)$-ulotteisilta. Toisaalta tällainen tasainen pienuusehto riittää melko yleisissä tapauksissa myös takaamaan Hardyn epäyhtälön voimassaolon.

Tarkastellaan jälleen kuvan 2 aluetta, mutta oletetaankin nyt, että antennin dimensio on $1 < \mu < \lambda$, missä λ on edelleen lumihiutalekäyrän dimensio. Rajoitetuissa alueissa pätee yleinen periaate, jonka mukaan λ:n ollessa suurin reunan osissa esiintyvä dimensio, ei Hardyn (p, β)-epäyhtälö voi olla voimassa millekään $\beta \geq p - n + \lambda$. Toisaalta alueemme reunassa on nyt osia, jotka näyttävät (ainakin sopivasta suunnasta katsottuna) 1- ja μ-ulotteisilta, jolloin näitä vastaavat painoeksponentit $\beta = p - n + 1$ ja $\beta = p - n + \mu$ eivät myöskään tule kyseeseen painotetuissa Hardyn epäyhtälöissä. Nämä kaksi poikkeustapausta poislukien kaikkia muita painoeksponentteja $\beta < p - n + \lambda$ vastaavat painotetut epäyhtälöt ovat tässä alueessa kuitenkin voimassa.

Tutkitaan lopuksi vielä hieman erityyppistä esimerkkiä Hardyn epäyhtälöihin liittyvistä ilmiöistä. Olkoon alue $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus E$, missä

$$E = \{(j^{-1}, 0, \ldots, 0) : j \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, \ldots, 0)\}.$$



Kuva 3: joukko E (hieman pullistettuna)

Tällöin joukko E on sekä Ω:n reuna että komplementti. Koska E koostuu numeroituvasta määrästä yksittäisiä pisteitä, on $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$. Komplementin tiheysehdon välttämättömyyden perusteella alueessa Ω on siten voimassa pisteittäinen Hardyn (p, β)-epäyhtälö ainoastaan kun $\beta < p - n$. Toisaalta voidaan osoittaa, että integraalimuotoinen Hardyn (p, β)-epäyhtälö (3) pätee Ω:ssa myös kun $\beta > p-n+1$. Tämä seuraa (hieman löyhästi puhuen) siitä, että kauempaa katsottuna E näytää origon lähellä yksiulotteiselta (ks. kuvaa 3), joten Hardyn epäyhtälö pätee kunhan $n-p+\beta > 1$. Kuitenkaan arvot $\beta \in [p-n, p-n+1]$ eivät tämän alueen tapauksessa ole mahdollisia painoeksponentteja. Tämä esimerkki osoittaa hyvin, ettei Hardyn epäyhtälöihin liittyvissä kysymyksissä voida käyttää vain yhtä ainoaa tapaa mitata joukon dimensiota, sillä joukko E täytyy tässä yhteydessä tulkita sekä nolla- että yksiulotteiseksi.

Alue Ω toimii esimerkkinä myös siitä, että rajoittamattomissa alueissa päästään käsiksi eksponentteihin $\beta > p$, jotka eivät voi koskaan tulla kyseeseen rajoitetuissa alueissa. Tämä ilmiö on itse asiassa näkyvissä jo Hardyn alkuperäisissä yksiulotteisissa painotetuissa epäyhtälöissä, päteehän rajoittamatonta aluetta $]0, \infty[$ koskeva (p, β)-epäyhtälö (2) aina kun $\beta \neq p - 1$ (erityisesti kun $\beta > p$), kun taas rajoitetulla välillä $]a, b[$ vastaava epäyhtälö on voimassa ainoastaan kun $\beta < p - 1$. Näin uudet ja vanhat havainnot kohtaavat edelleen Hardyn epäyhtälöiden tutkimuksessa, erottavista vuosikymmenistä välittämättä ja täydellisessä sopusoinnussa.

Viitteet

[1] A. Ancona, 'On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbb{R}^n$', *J. London Math. Soc.* (2) 34 (1986), no. 2, 274–290.

[2] P. Hajłasz, 'Pointwise Hardy inequalities', *Proc. Amer. Math. Soc.* 127 (1999), no. 2, 417–423.

[3] G. H. Hardy, 'Notes on some points in the integral calculus (LX): An inequality between integrals', *Messenger of Math.* 54 (1925), 150–156.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood ja G. Pólya, 'Inequalities', Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[5] J. Kinnunen ja O. Martio, 'Hardy's inequalities for Sobolev functions', *Math. Res. Lett.* 4 (1997), no. 4, 489–500.

[6] P. Koskela ja J. Lehrbäck, 'Weighted pointwise Hardy inequalities', *J. London Math. Soc.*, (2009).

[7] A. Kufner, L. Maligranda ja L. E. Persson, 'The prehistory of the Hardy inequality', *Amer. Math. Monthly* 113 (2006), no. 8, 715–732.

[8] J. Lehrbäck, 'Pointwise Hardy inequalities and uniformly fat sets', *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), no. 6, 2193–2200.

[9] J. L. Lewis, 'Uniformly fat sets', *Trans. Amer. Math. Soc.* 308 (1988), no. 1, 177–196.

[10] J. Nečas, 'Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle', *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 16 (1962), 305–326.

[11] A. Wannebo, 'Hardy inequalities', *Proc. Amer. Math. Soc.* 109 (1990), 85–95.