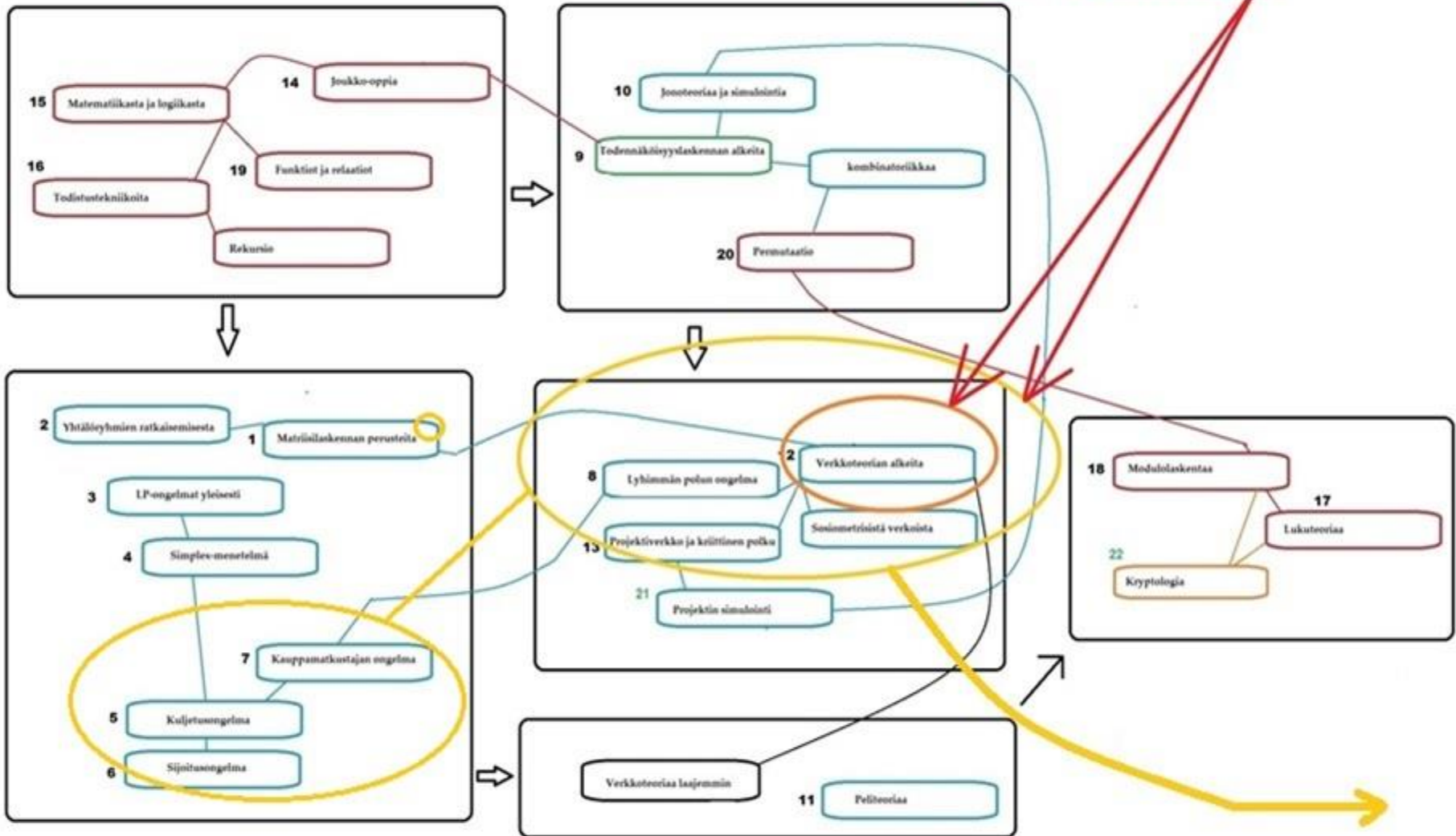


Johdatus
verkkoteoriaan
luento 20.3.18

Kurssin sijainti muussa suunnitellussa kokonaisuudessa

TIEP TUHAT: 2017



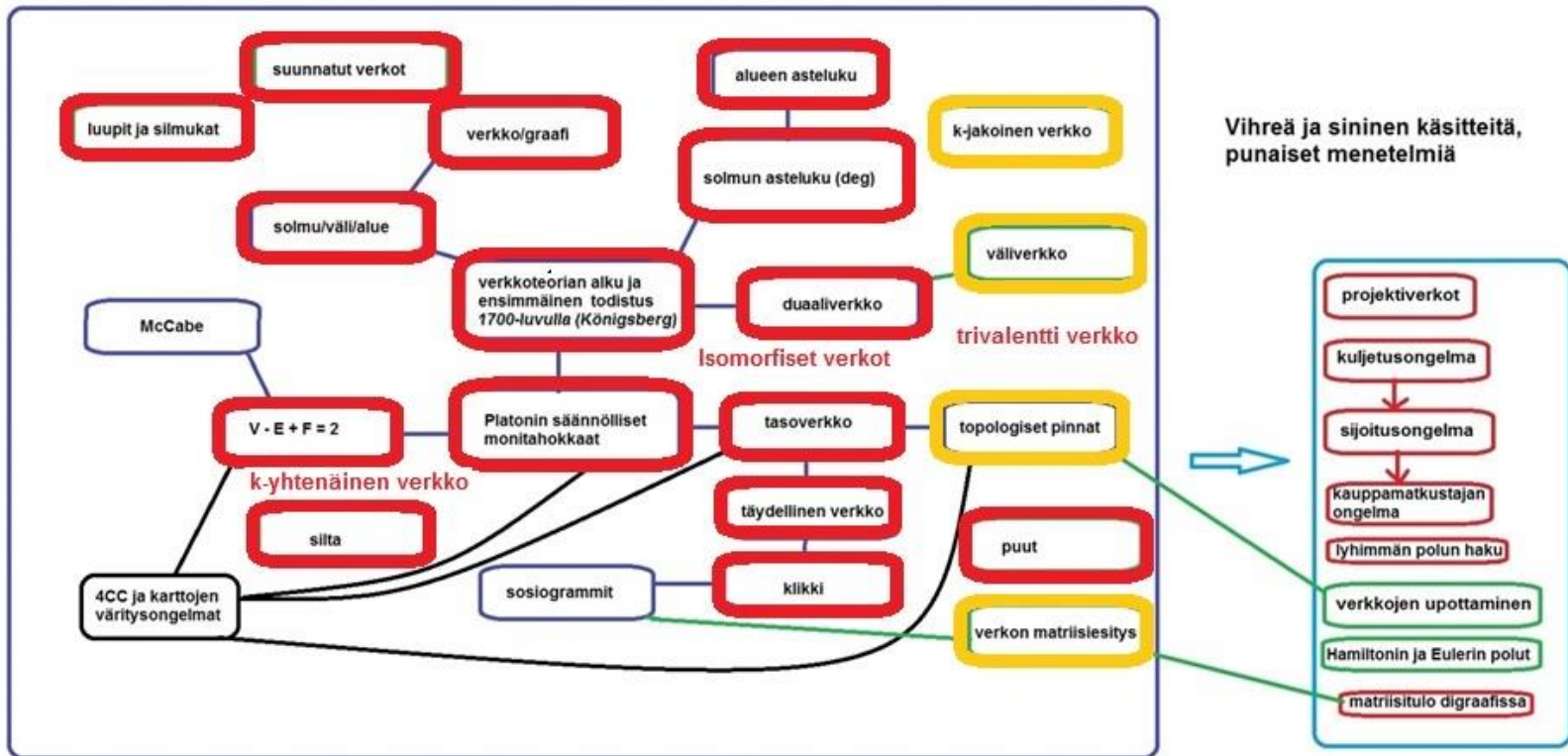
Verkko eli graafi, tasoverkko, solmut, välit, alueet ,
suunnatut verkot, isomorfiset verkot, verkon duaali,
verkon upottaminen, verkon genus, verkon
komplementti, aliverkko, täydellinen verkko,
solmun ja alueen asteluku, väliverkko, säännöllinen
verkko, Eulerin ja Hamiltonin verkot,
kauppamatkustajan ongelma, verkon kromaattinen
luku, kaksijakoinen verkko, erilaiset polut ja
silmukat, verkon yhtenäisyys, puurakenteet,
projektiverkko ja sen kriittinen polku ...

(punaisella olleet käsitteet käsitelty jollain tasolla maaliskuussa)

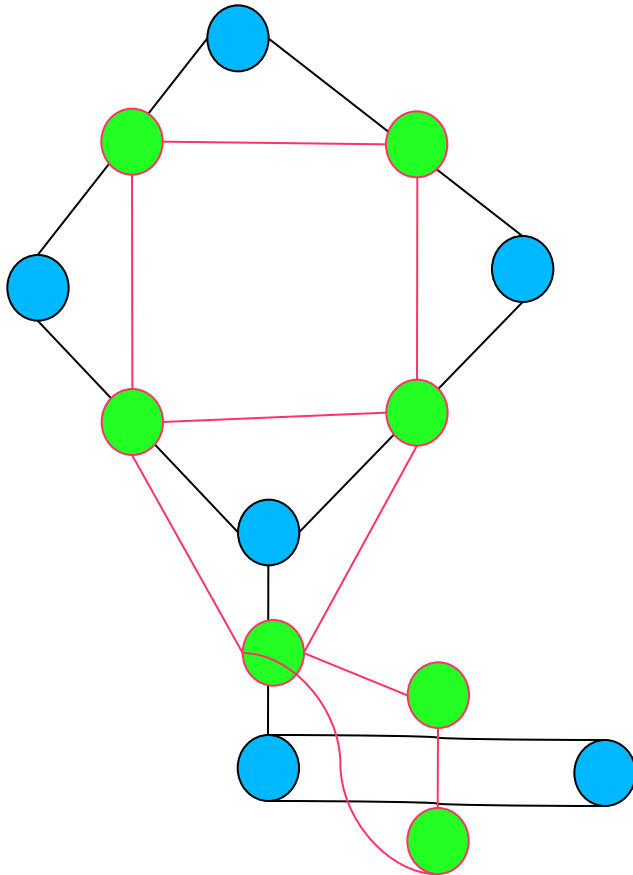
TASOVERKKO
ALIVERKKO
SOLMUN ASTE
LEIKKAUSSOLMU
SOSIOGRAMMI
EULERIN KAAVA
4CC
LYHIN POLKU
KRIITTINEN POLKU

(keltaisella jo käsitellyt asiat)

Kurssin rakennetta

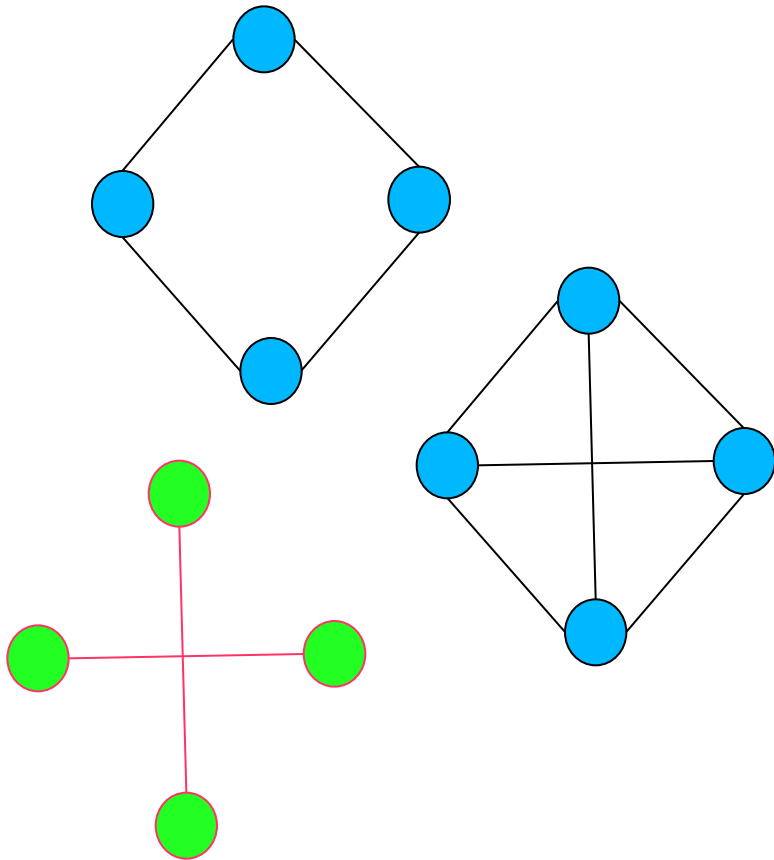


Väliverkko



- tekeminen
 - alueet solmuiksi
 - ylitetään vierekkäiset välit
- välien määrä:
 - $e_L = -e + \frac{1}{2} \sum (d_i)^2$

Komplementti

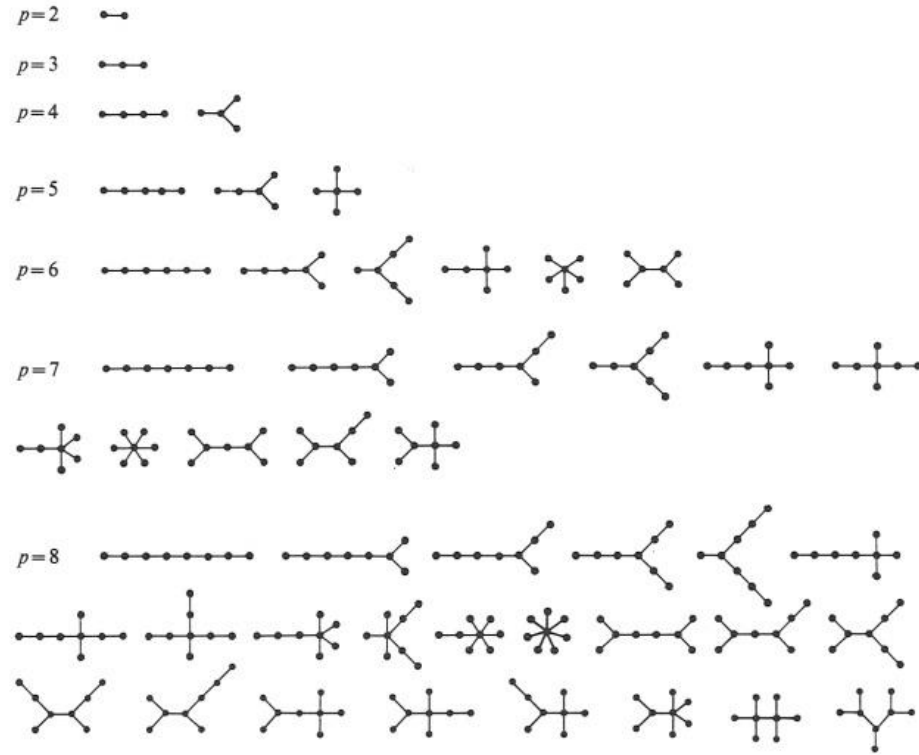


- vain yksinkertaisille verkoille
- tekeminen
 - tehdään vastaava täydellinen verkko
 - poistetaan ne välit, jotka ovat alkuperäisessä verkossa

Demoista lyhyesti

THE NUMBER OF TREES, ROOTED TREES, IDENTITY TREES,
AND HOMEOMORPHICALLY IRREDUCIBLE TREES WITH p POINTS

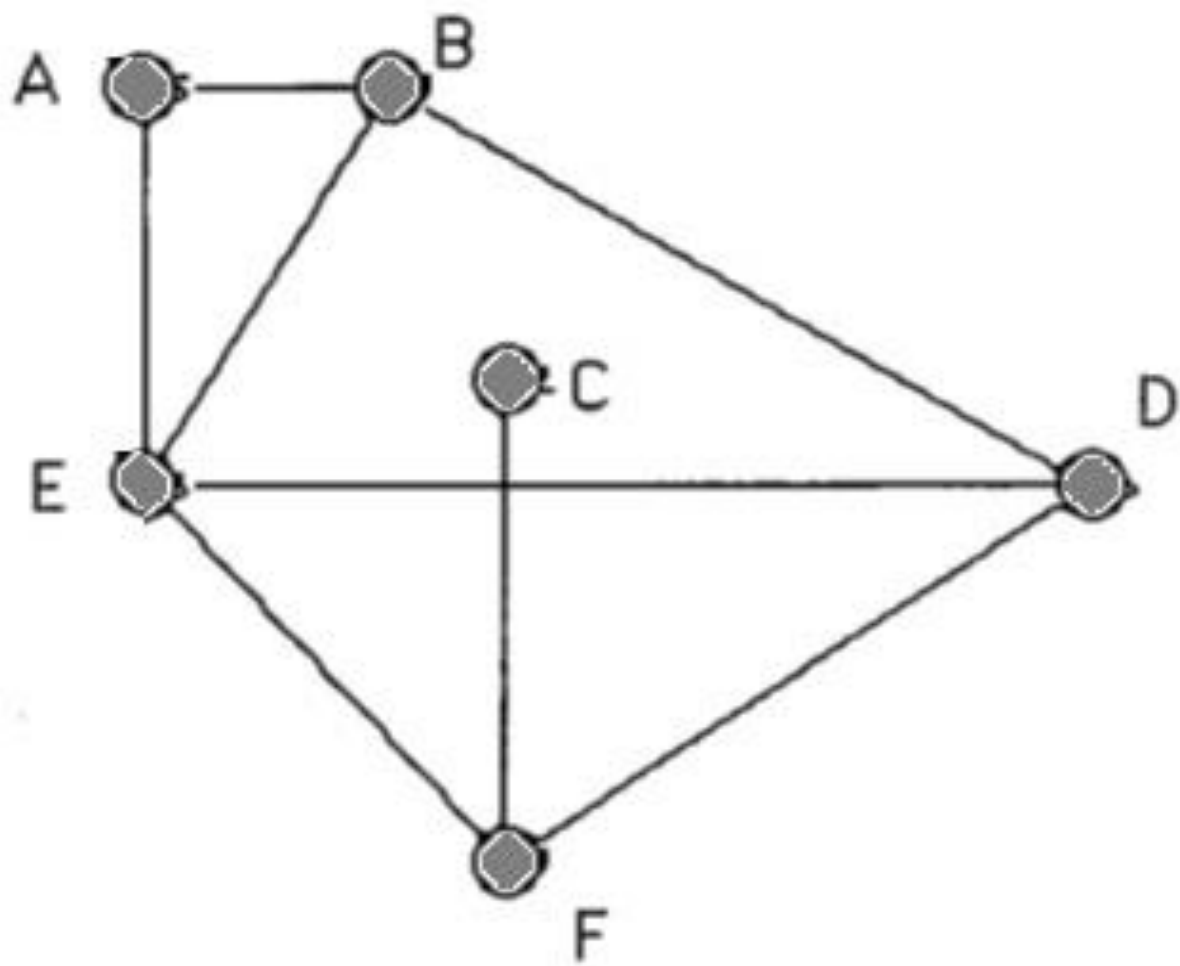
p	t_p	T_p	i_p	h_p	p	t_p	T_p
1	1	1	1	1	13	1 301	12 486
2	1	1	0	1	14	3 159	32 973
3	1	2	0	0	15	7 741	87 811
4	2	4	0	1	16	19 320	235 381
5	3	9	0	1	17	48 629	634 847
6	6	20	0	2	18	123 867	1 721 159
7	11	48	1	2	19	317 955	4 688 676
8	23	115	1	4	20	823 065	12 826 228
9	47	286	3	5	21	2 144 505	35 221 832
10	106	719	6	10	22	5 623 756	97 055 181
11	235	1842	15	14	23	14 828 074	268 282 855
12	551	4766	29	26	24	39 299 897	743 724 984
					25	104 636 890	2 067 174 645
					26	279 793 450	5 759 636 510



THE NUMBER OF GRAPHS WITH $p \leq 9$ POINTS AND q LINES

$q \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1								
1		1							
2		1	1						
3			1	2	2	2	2	2	2
4			1	3	4	5	5	5	5
5				2	6	9	10	11	11
6				1	6	15	21	24	25
7					6	21	41	56	63
8					4	24	65	115	148
9					2	24	97	221	345
10					1	21	131	402	771
11					1	15	148	663	1637
12						9	148	980	3252
13						5	131	1312	5995
14						2	97	1557	10120
15						1	65	1646	15615
16						1	41	1557	21933
17							21	1312	27987
18							10	980	32403
19							5	663	34040
g_p	1	2	4	11	34	156	1044	12346	308708

$p \backslash q$	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$
$p=1$							
$p=2$							
$p=3$							
$p=4$							



Wikivertailua (verkkoteoria)

Contents [\[hide\]](#)

- 1 Definitions
 - 1.1 Graph
- 2 Applications
- 3 History
- 4 Graph drawing
- 5 Graph-theoretic data structures
- 6 Problems
 - 6.1 Enumeration
 - 6.2 Subgraphs, induced subgraphs, and minors
 - 6.3 Graph coloring
 - 6.4 Subsumption and unification
 - 6.5 Route problems
 - 6.6 Network flow
 - 6.7 Visibility problems
 - 6.8 Covering problems
 - 6.9 Decomposition problems
 - 6.10 Graph classes
- 7 See also
 - 7.1 Related topics
 - 7.2 Algorithms
 - 7.3 Subareas
 - 7.4 Related areas of mathematics
 - 7.5 Generalizations
 - 7.6 Prominent graph theorists
- 8 Notes
- 9 References
- 10 External links
 - 10.1 Online textbooks

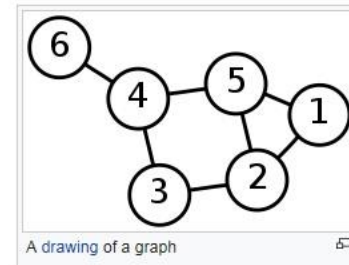
Sisällysluettelo [\[piilota\]](#)

- 1 Verkkoteorian alku: Euler, Erdős ja Renyi
- 2 Skaalavapaa verkko teoria
 - 2.1 Skaalavapaa verkko ja tieteen paradigma
 - 2.2 Skaalavapaan verkon ominaisuuksia
 - 2.3 Klusterit ja heikot yhteydet
 - 2.4 Kytäjät, supersolmut (hubs)
 - 2.5 "Voittaja vie kaiken"- periaate
 - 2.6 Skaalavapaan verkkoteorian sovellutuksia
- 3 Verkko ja kompleksisuus
- 4 Graafialgoritmeja
- 5 Graafiongelmiä
- 6 Katso myös
- 7 Lähteet
- 8 Kirjallisuutta

Verkkoteoria eli **graafiteoria** on **matematiikan** osa-alue, joka tutkii kohteiden välisten suhteiden esittämiseen käytettäviä matemaattisia malleja eli **verkkoja**^[1]. Verkkoja voidaan käyttää erilaisten suhteiden ja prosessien mallintamiseen niin fyysikaalisissa^[2], biologisissa^[3], sosiaalisissa^{[4][5]} kuin tietoteknisissäkin^[6] systeemeissä. Verkkoteoriaa voidaankin soveltaa monilla eri tieteenoilla^[7].

Suomessa tästä matematiikan haarasta käytetään yliopistosta riippuen kahta eri nimitystä eli verkko- tai graafiteoria^{kenen mukaan?}. Myös käsitteiden nimikirjo poikkeaa opetuspaikan mukaan. Samoin verkkoteoriasta on erotettava omana alueenaan vielä verkostojen teoria. Pohjimmiltaan verkko on verkkoteorian määrittämä solmujen eli pisteiden ja niitä yhdistävien välien eli kaarien kokonaisuus. Topologisessa verkkoteoriassa myös välien erottamat alueet huomioidaan. *Verkko* kuvaa verkkomaisen rakenteen riippumatta sen sisällöstä ja tulkinnasta ja esittää, mitä reittejä verkossa eri pisteiden välillä on. Verkkoja on myös lähes kaikkialla luonnossa ja ihmisen toiminnassa. Verkkoteoria on täten osa olemassaolon yleisempää ymmärtämistä.


In **mathematics**, **graph theory** is the study of *graphs*, which are mathematical structures used to model pairwise relations between objects. A graph in this context is made up of *vertices*, *nodes*, or *points* which are connected by *edges*, *arcs*, or *lines*. A graph may be *undirected*, meaning that there is no distinction between the two vertices associated with each edge, or its edges may be *directed* from one vertex to another; see [Graph \(discrete mathematics\)](#) for more detailed definitions and for other variations in the types of graph that are commonly considered. Graphs are one of the prime objects of study in [discrete mathematics](#).



Network theory

From Wikipedia, the free encyclopedia

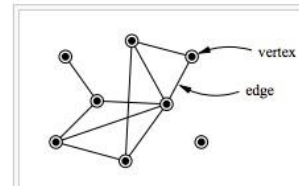
For the theory regarding the regulation of the adaptive immune system, see immune network theory. For the sociological theory, see social network.

 It has been suggested that this article be merged with *Network science*. (Discuss) Proposed since November 2016.

Network theory is the study of **graphs** as a representation of either symmetric relations or asymmetric relations between discrete objects. In computer science and network science, network theory is a part of **graph theory**: a network can be defined as a graph in which nodes and/or edges have attributes (e.g. names).

Network theory has applications in many disciplines including statistical physics, particle physics, computer science, electrical engineering, biology,^[1] economics, finance, operations research, climatology and sociology. Applications of network theory include logistical networks, the World Wide Web, Internet, gene regulatory networks, metabolic networks, social networks, epistemological networks, etc.; see List of network theory topics for more examples.

Euler's solution of the Seven Bridges of Königsberg problem is considered to be the first true proof in the theory of networks.^[2]



A small example network with eight vertices and ten edges

Contents [hide]

- 1 Network optimization
- 2 Network analysis
 - 2.1 Social network analysis
 - 2.2 Biological network analysis
 - 2.3 Narrative network analysis
 - 2.4 Link analysis
 - 2.4.1 Network robustness
 - 2.4.2 Web link analysis
 - 2.5 Centrality measures
 - 2.6 Assortative and disassortative mixing
 - 2.7 Recurrence networks
- 3 Spread
- 4 Interdependent networks
- 5 Implementations
- 6 See also
- 7 References
- 8 Books
- 9 External links

1 Background and history

- 1.1 Department of Defense initiatives

2 Network properties

- 2.1 Size
- 2.2 Density
- 2.3 Planar Network Density
- 2.4 Average degree
- 2.5 Average path length (or characteristic path length)
- 2.6 Diameter of a network
- 2.7 Clustering coefficient
- 2.8 Connectedness
- 2.9 Node centrality
- 2.10 Node influence

3 Network models

- 3.1 Erdős–Rényi random graph model
- 3.2 Watts–Strogatz small world model
- 3.3 Barabási–Albert (BA) preferential attachment model
 - 3.3.1 Mediation-driven attachment (MDA) model
- 3.4 Fitness model

Network science

4 Network analysis

- 4.1 Social network analysis
- 4.2 Dynamic network analysis
- 4.3 Biological network analysis
- 4.4 Link analysis
 - 4.4.1 Network robustness
 - 4.4.2 Pandemic analysis
 - 4.4.2.1 Susceptible to infected
 - 4.4.2.2 Infected to recovered
 - 4.4.2.3 Infectious period
 - 4.4.3 Web link analysis
 - 4.4.3.1 PageRank
 - 4.4.3.1.1 Random jumping

4.5 Centrality measures

5 Spread of content in networks

- 5.1 The SIR model
- 5.2 The master equation approach

6 Interdependent networks

7 Multilayer networks

8 Network optimization

9 See also

10 References

Network science



Theory

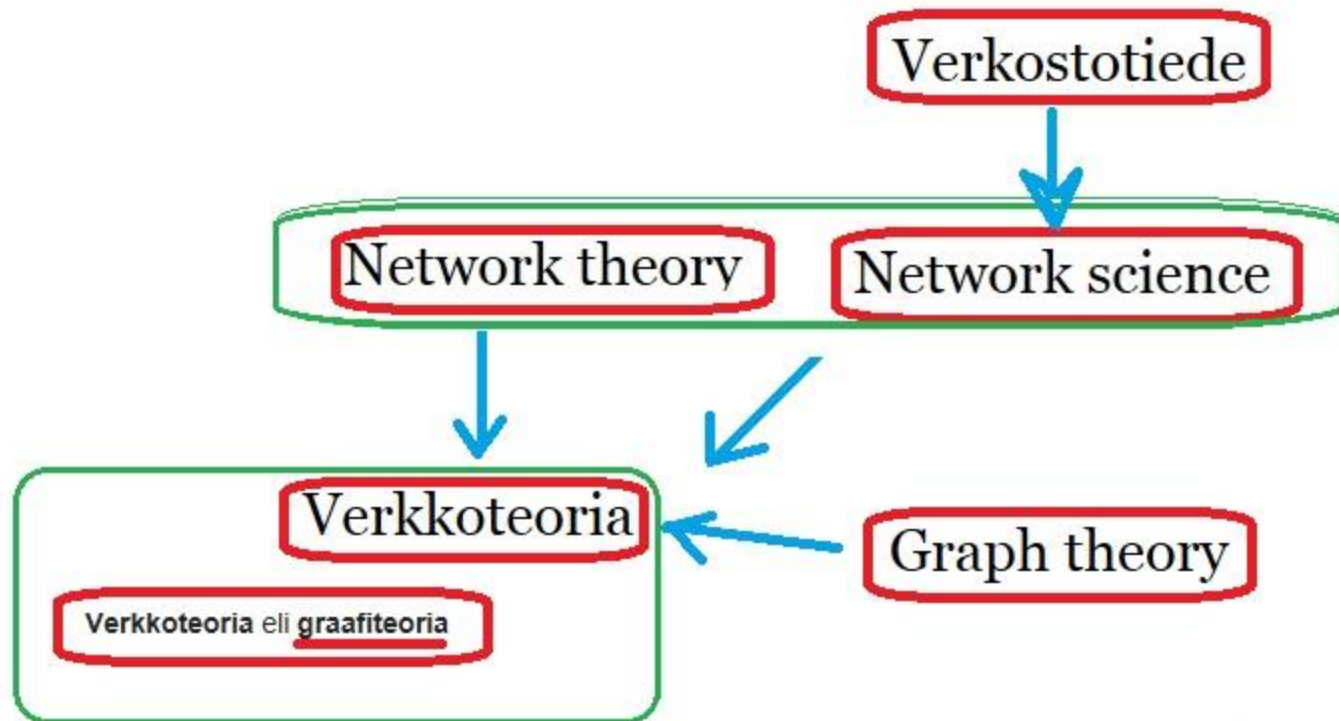
Graph · Complex network · Contagion · Small-world · Scale-free · Community structure · Percolation · Evolution · Controllability · Graph drawing · Social capital · Link analysis · Optimization · Reciprocity · Closure · Homophily · Transitivity · Preferential attachment · Balance theory · Network effect · Social influence

Network types

Informational (computing) · Telecommunication · Transport · Social · Scientific collaboration · Biological · Artificial neural · Interdependent · Semantic · Spatial · Dependency · Flow

Graphs

Features



Laajemmin Eulerin kaavasta

$$V - E + F = 2$$

Cyclomatic number, $v(G)$

For a graph G

$$v(G) = e - n + 2p$$

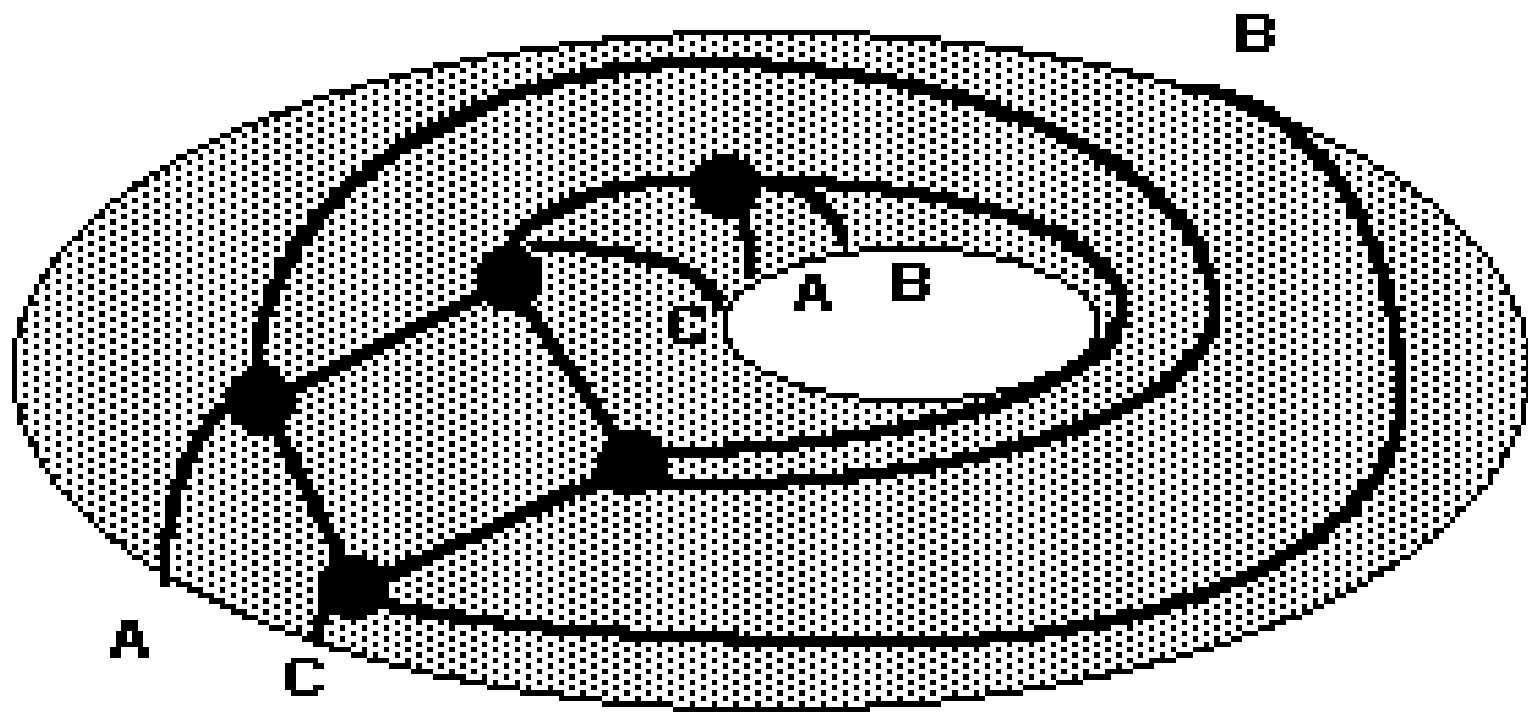
where

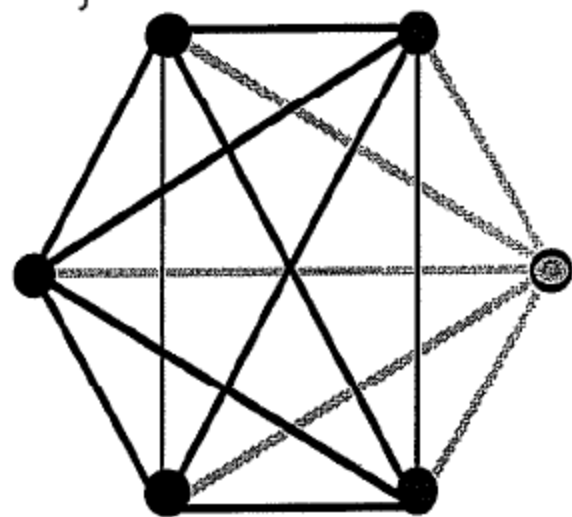
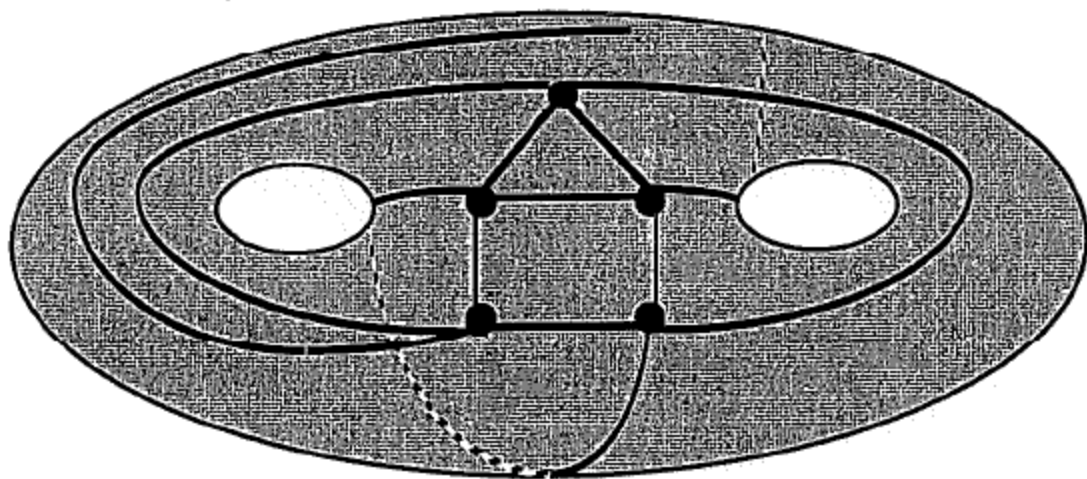
n is the number of vertices,

e is the number of edges,

p is the number of strongly connected components.

Genus (g)



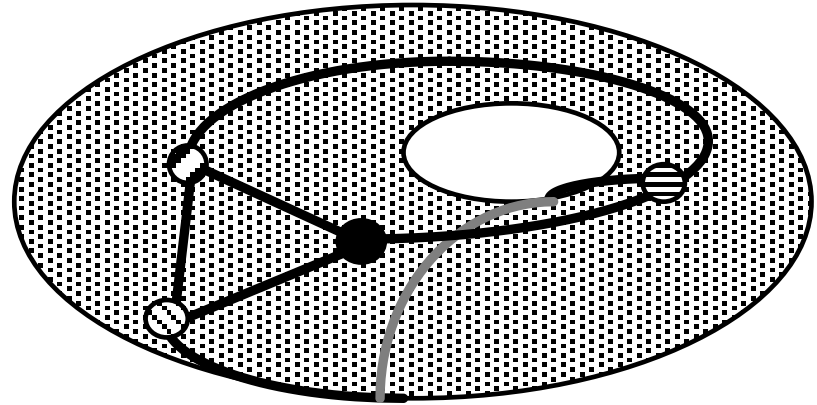
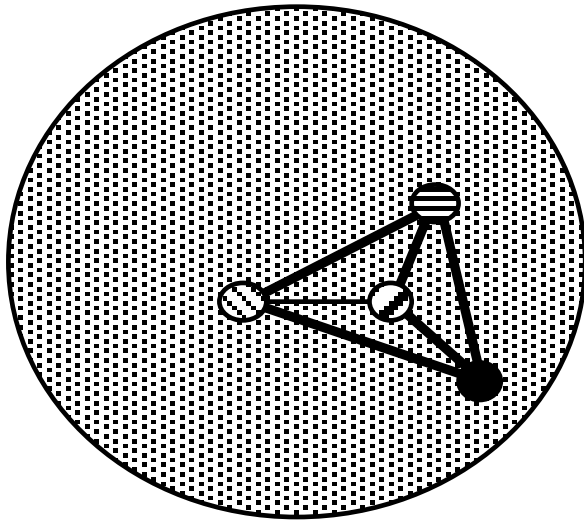


$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$V - E + F = 2 - 2g$$

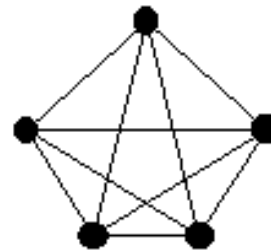
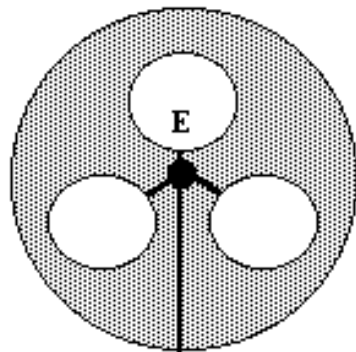
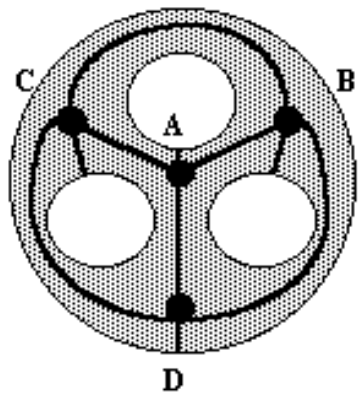
genus

$$\mathbf{g} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

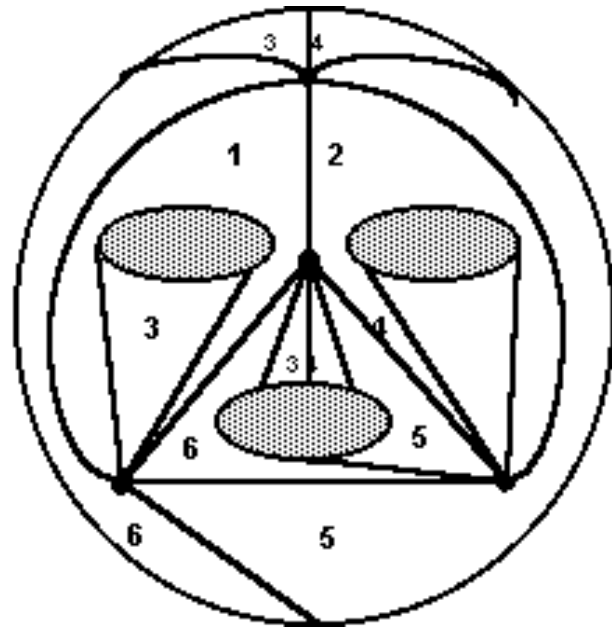
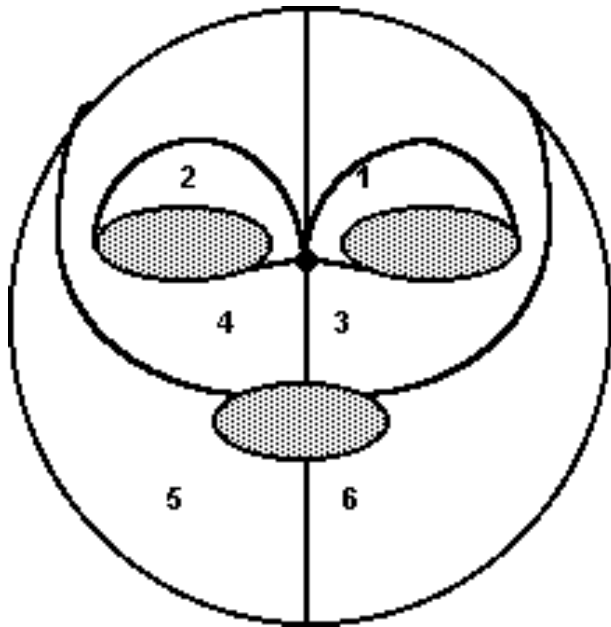


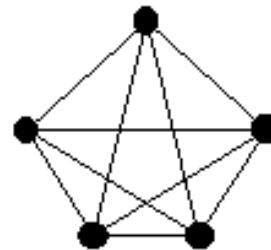
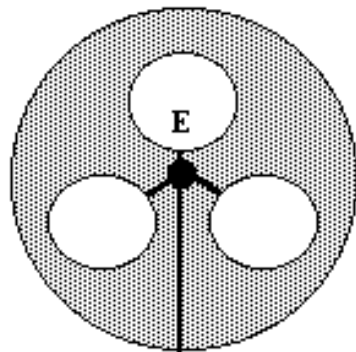
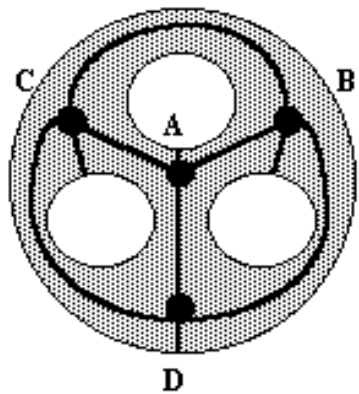
TÄYDELLISEN VERKON GENUS

$$\gamma(K \downarrow) = \left\{ \frac{(v-3)(v-4)}{12} \right\}$$



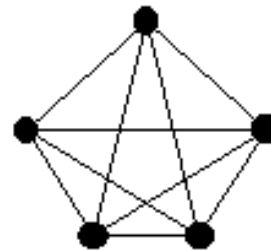
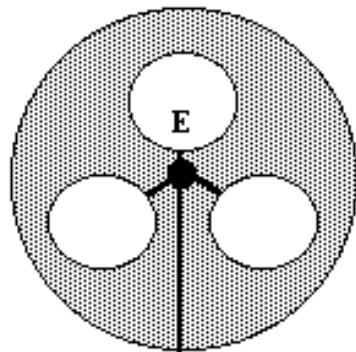
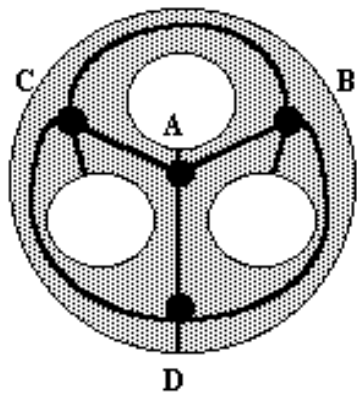
$$g = 3$$
$$V - E + F = -4$$





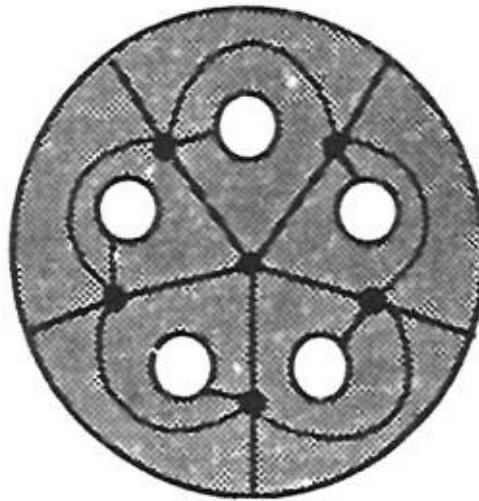
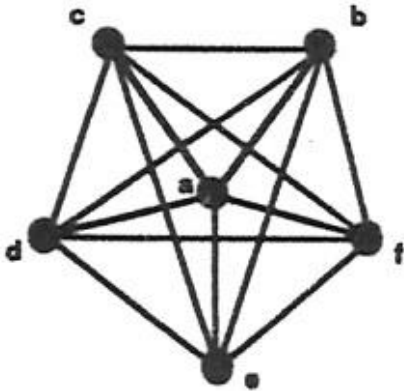
Täydellisen verkon maksimigenus

$$\gamma_M(K_v) = \lfloor \beta(K_v)/2 \rfloor = \lfloor (v-1)(v-2)/4 \rfloor.$$



Kuuden solmun täydellinen verkko

A scheme for the case $n=2$ (K_6 in the 5-toroid):



$$\mathbf{V} - \mathbf{E} = 0$$

$$V - E + F = 2$$

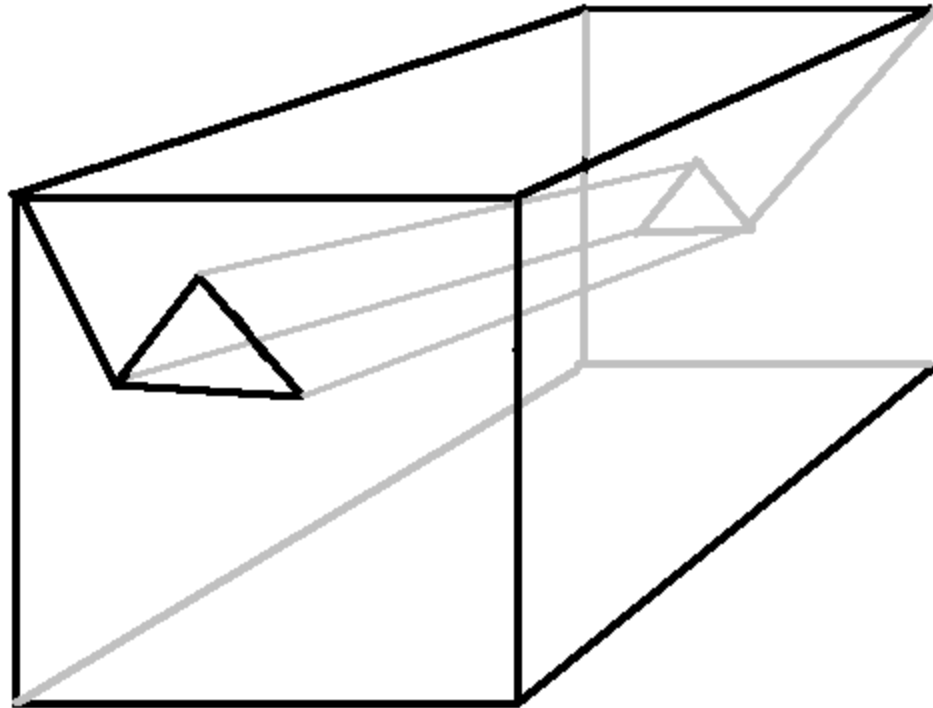
$$V - E + F - S = 0$$

Eulerin-Poincarén kaava

S_k on k -simpleksien lukumäärä

$k = 0 \dots n+1$

$$\sum (-1)^k * S_k = 1 - \gamma, \text{ kun } S_{n+1} = 1 - \gamma$$



**Säännölliset verkot
eli Eulerin kaava kun
alueen asteluku on sama**

$$E = 3V - 6$$

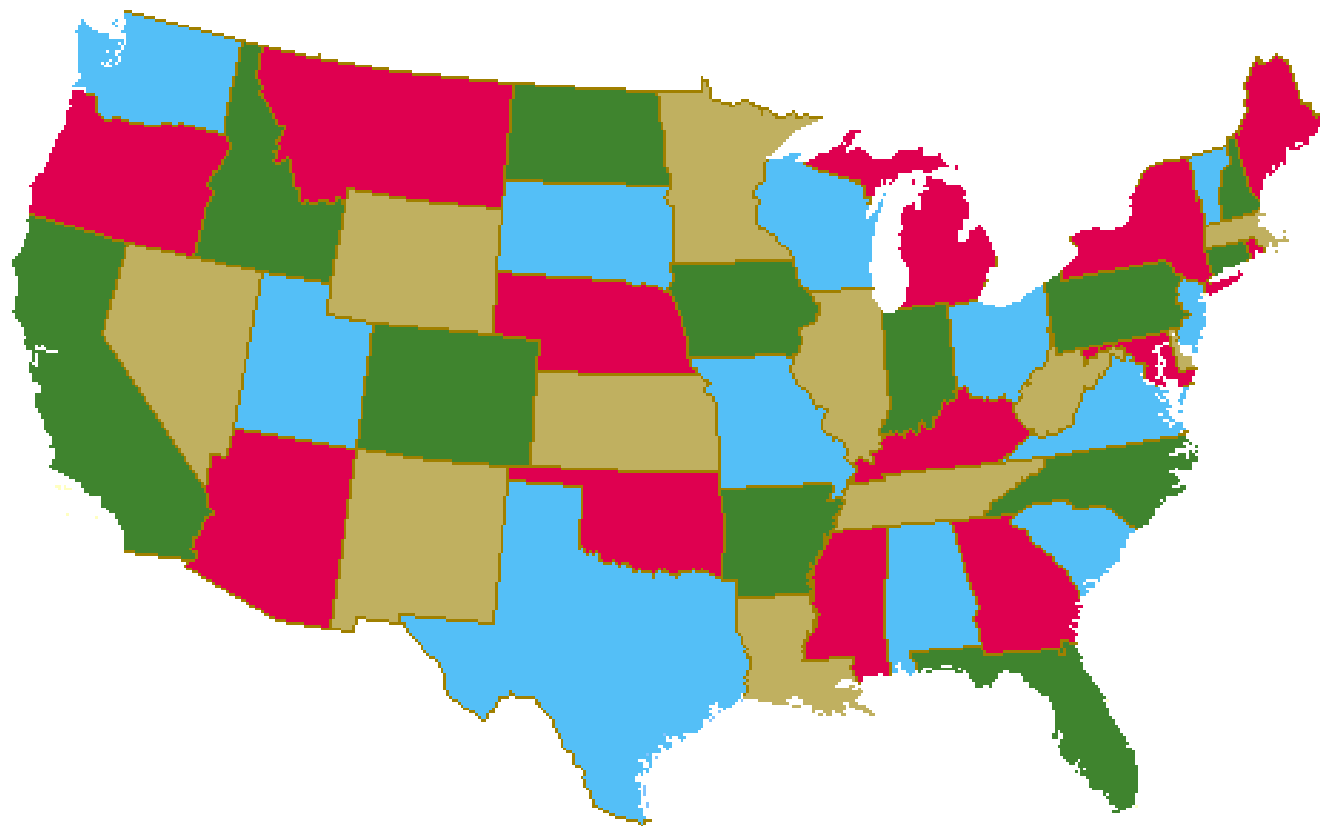
$$E = 2V - 4$$

$$2e = \sum k * \text{deg}(v_k)$$

$$2e = 3f$$

$$v - e + f = 2$$

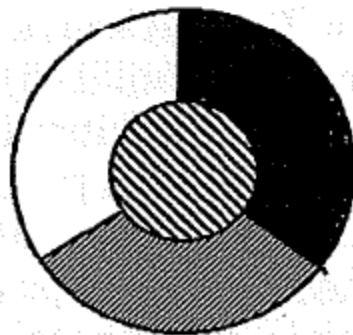
4CC



Karttojen neliväritysprobleema eli lyhyesti 4CC (four-colour conjecture) löydettiin jo lähes 160 vuotta sitten ja aina siitä lähtien se on ollut eräs keskeisiä ratkaisuaan odottavia ongelmia matematiikassa. Tai oikeastaan nykyään voidaan puhua Karttojen neliväriteoreemasta (4CT), koska ongelma todistettiin 1976 ja todistus tarkistettiin toisen ryhmän toimesta 1994. Nämä todistukset tehtiin kuitenkin tietokoneita apuna käyttäen eivätkä tyydytä kaikkia ongelmasta kiinnostuneita koska lyhyt matemaattinen todistus, jota voitaisiin hyödyntää muuallakin, puuttuu edelleen.

Millaisesta ongelmasta on kyse?

Monet ovat varmasti huomanneet karttakirjoja selaillessaan, että karttojen väryksessä on eri maiden erottamiseksi toisistaan käytetty menetelmää, jossa viereiset maat on väritetty eri värillä. Sensijaan maihin, jotka eivät ole naapureita voidaan käyttää samaa väriä. Koska värejä tarvitaan siis vähemmän kuin kartassa on valtioita niin on ymmärrettävää, että tarvittavien värien määrälle on olemassa jokin yläraja. Näin onkin ja kokemus on osoittanut kartantekijöille, että tuo yläraja on neljä. Karttoja on siis iät ajat väritetty neljällä värillä asian teoreettista puolta turhia pohtimatta. Miksi olisikaan sillä tehtävä vaikutti sangen yksinkertaiselta, suorastaan petollisen helpolta. Mutta se osoittautui sittemmin kaikkea muuta kuin helpoksi. Alla pienin neljä väriä vaativa tasokartta.



Ensimmäisenä ongelman kanssa joutui tekemisiin nuori englantilainen opiskelija, Francis Guthrie. Tämän mieleen juolahti vuonna 1852 kysymys: *"Olisiko mahdollista kaikesta huolimatta piirtää monimutkainen kartta, jonka värityksessä viidennen värin käyttöönotto olisi välttämätöntä?"*

Tähän vaarallisen yksinkertaiseen ja naiivilta vaikuttavaan kysymykseen suhtauduttiin aluksi alentuvasti. Viidettä väriä ei tarvita ja asian todistaminen olisi triviaali toimenpide. Tehtävä lojui näin puoliunohduksissa toistakymmentä vuotta kunnes löytyi matemaatikko, Alfred Cayley, jolla oli ylimääräistä aikaa yrittää tuota "triviaalia" todistusta. Työ osoittautui odotettua vaikeammaksi ja turhautunut Cayley päätti julkistaa ongelman vuonna 1878. Tämän jälkeen matemaatikko ja maallikko toisensa jälkeen yritti ratkaisua. Monet luulivat välillä onnistuneensaakin, mutta aina löytyi jostain ammottava aukko, jonka takaa paljastui entistä laajempi ongelmakenttä. Yhä useampi yrittäjä tarttui samaan "nyt-minä-sen-keksin"-koukkuun ja tempoili loppuelämänsä (jotkut jopa 60 vuotta) ongelman parissa. Ratkaisu tuntui aina odottavan jo seuraavan oven takana. Tärkeä vuosi oli 1879, jolloin ilmestyi Arthur Kempen virheellinen todistus, jota pidettiin yleisesti oikeana peräti 11 vuotta! Todistuksen kaatoi Percy John Heawood 1890, jonka työstä lähemmin II luvussa. Kempen työ lienee matematiikan historian kuuluisin "väärä" todistus. Vuosi Kempen todistuksen jälkeen julkaisi myös Peter Guthrie Tait omaperäisiä ideoita sisältäneen todistuksen, mutta sen sisältämät vuotokohdat havaittiin jo samana vuonna.

Vihdoin vuonna 1976 tämä etupäässä verkkoteorian, algebrallisen topologian ja kombinatoriikan alueille sijoittuva ongelma sai "lopullisen" ratkaisunsa Illinoisin yliopiston tutkijoiden K. Appelin ja W. Hakenin toimesta. Todistus tehtiin poikkeuksellisella tavalla käyttäen hyväksi tietokoneita (IBM:n mallit 360-75, 370-158 ja 370-168). Pelkästään ratkaisujoukon tuottaminen vei ajoaikaa 1200 tuntia.

Todistustapa oli sekä mielenkiintoinen, että epätyydyttävä. Mielenkiintoinen syystä, että nyt oli löydetty esimerkkitapaus perustavaa laatua olevasta matemaattisesta ongelmasta, jolle ei ehkä olisikaan olemassa lyhyttä ratkaisua vaan todistus olisi mahdollinen ainoastaan tietokoneen avulla! Epätyydyttävä todistus taas oli syystä, että Appel ja Haken, käyttivät tietokoneita apunaan niin laajassa mitassa, ettei heidän mammuttимаista todistustaan voi käytännössä tarkistaa kuin tietokoneella. Näin itseasiassa on tehtykin, Appelin ja Hakenin todistuksen rinnalle ilmestyi vuonna 1994 toinen, Robertsonin, Sandersin, Seymourin ja Thomasin, tekemä tietokonetodistus, joka perustui pitkälti samoihin algoritmeihin. Vaikka se selkeyttikin eräitä osia Appelin ja Hakenin todistuksesta niin perusrakenteeltaan se on samanlainen. Ainoastaan tietokoneet ovat tulleet parissa vuosikymmenessä tehokkaammiksi.

Edellisestä seuraa , että todistusten yleinen hyöty jää vähäiseksi. Eli siis mahdollisuudet soveltaa todistusta muihin vastaaviin ongelmiin jäävät pieniksi. Näiden läheisesti tai kaukaisesti sivuavien ongelmien joukko puolestaan on huomattavan suuri, mikä paljastaa tämän viattoman näköisen ongelman perustavan luonteen. Tällä hetkellä tilanne on siis se, että lyhyt matemaattinen ratkaisu, joka avaisi monta muutakin vastaavanlaista Gordionin solmua on edelleen tekemättä. Toisaalta kyseessä saattaa olla tieteenfilosofisesti kiintoisa ongelma, johon ei todellisuudessa ole olemassakaan lyhyttä ratkaisua. Jos matemaattinen ratkaisu joskus löytyy niin se ilmeisesti perustuu tunnettuun Eulerin kaavaan, josta Kempe johti sen kaavan, jolle Appelin ja Hakenin todistus perustui. Eulerin kaava puolestaan ratkaisi aikoinaan jo muinaisia kreikkalaisia (ja tietävästi myös egyptiläisiä) askarruttaneen Platonin kappaleiden ongelman, jota Eukleides piti 'Alkeidensa' merkittävimpänä osana. Eukleideen 'Alkeita' puolestaan voidaan pitää länsimaisen matematiikan perusteoksena. Kirja on sikäli läheinen myös Jyväskylän yliopistolle, että sen suomennoksen laitto alkuaan yliopiston isä, Volmar Schildt-Kilpinen. Nämä vanhat historialliset juuret paljastavat sen, että neliväri-ongelma onkin vain ilmentymä niistä perusrakenteista, joista maailmamme rakentuu. Tässä piileekin sen vaikeus ja kiehtovuus. Samalla käy ymmärrettäväksi miksi tämä päällisin puolin vähäpätöinen ongelma on toiminut generaattorina valtavalle määrälle tutkimuksia, jotka ovat tuottaneet vastauksia moniin ongelmiin. Paitsi siihen alkuperäiseen, neliväri-ongelmaan.

Eulerin kaava: $V-E+F=2-2g$

Kempen kaava: $\sum_{k=2}^n (6-k)p_k = 12$

Kuva 2.

V = solmujen lukumäärä

E = välien lukumäärä

F = alueiden lukumäärä

g = suku, genus

p_k = k -asteisten alueiden tai solmujen lukumäärä k -asteinen = alue, jonka reunalla on k väliä tai solmu, johon liittyy k väliä (luuppi kasvattaa k :ta kahdella)

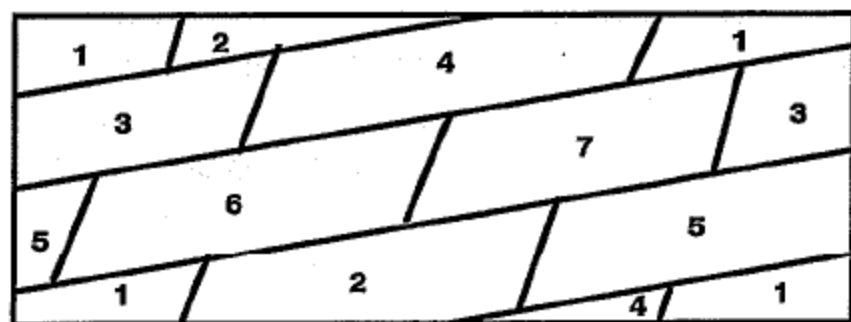
Heawoodin kartanväritysongelma

Heawoodin kartanväritysongelma ratkaistiin puolestaan lopullisesti vuonna 1968 kaikille muille pinnoille paitsi tavalliselle pallopinnalle. Siitä lähtien ongelmaa on kutsuttu kartanvärityslauseeksi. Ratkaisu pallopinnalla toisi ratkaisun myös neliväri-ongelmaan, jonka lopullinen, mutta matemaattiselta kannalta epätydyttävä todistus tehtiin kahdeksan vuotta myöhemmin. Ongelman tausta on hyvä selvittää ennen siihen perehtymistä.

Täydellisten verkkojen genuksen määrittäminen oli pitkä ja työläs kamppailu. Duaalimuodossaan se tuli tunnetuksi Heawoodin kartanväritysongelmana, joka sai 1965 kunniapaikan Tietze'n kirjassa "Matematiikan Kuuluisia Ongelmia". Tämä erityisen värikkään taustan omaava ongelma säilyi todistamattomana vuodesta 1890 aina vuoteen 1968 eli kokonaisuudessaan 78 vuotta. Paradoksaalista on se, että karttojen neliväritysongelma ratkesi vasta 1976 saavuttaen näin 124 vuoden iän. Paradoksaalista asiassa on se, että neliväritysongelma sisältyy kartanväritysongelmaan sen osaongelmana sekä se, että toisaalta kartanväritysongelma syntyi juuri yrityksestä ratkaista neliväri-ongelma. Luodaan seuraavaksi lyhyt kertaus kartanväritysongelman taustoihin tavoitteena helpottaa seuraavien sivujen kaavojen asettamista niille kuuluville paikoille verkkoteorian alueella.

Kautta verkkoteorian kehityshistorian on ollut havaittavissa mielenkiintoinen ilmiö, kuinka pieni puu on kasvattanut itseään suuremman oksan ja tullut näin tavallaan osaksi omaa verso-
aan. Königsbergin kaupungin sunnuntaikävelijöiden hauskana pohdiskelun aiheena ja aivo-
pähkinänä oli ongelma siitä, miten voisi ylittää jokainen kaupungin läpi virtaavan joen, Prege-
lin, 7:stä sillasta joutumatta kertaakaan kahdesti samalle sillalle (*). Ongelman ratkaisi 1736
Leonhard Euler, joka pani samalla matematiikassa alulle uuden vehreän oksan, verkkoteorian,
kasvun. Verkkoteoria puolestaan antoi lähtöalustan topologialle, matematiikan osa-alueelle, jo-
ka nopeasti kasvoi laajemmaksi kuin itse verkkoteoria. Tosin verkkoteoria on sittemmin, erityi-
sesti tietokoneiden aikakaudella, levinnyt matematiikan ulkopuolella monille muille tieteen
alueille, joille topologia ei yllä. Yksi verkkoteorian ja koko matematiikan vaikeimpia pulmakoh-
tia on siis ollut karttojen neliväri-ongelma, johon suhtauduttiin alussa vähätellen. Tuon enem-
mänkin koulupoikien aivopähkinäksi uskotun ongelman todellinen laajuus ja salakavala luonne
paljastui vasta myöhemmin vähin erin. Sen ratkaisuyritykset johtivat, monien muiden ongel-
mien ja teorioiden ohella, tutkimaan verkkoja monimutkaisilla topologisilla pinnoilla. Percy
John Heawood oli tällaisen tutkimuksen uranuurtaja ja hänen työnsä tuloksena syntyi mainittu
kartanväri-ongelma, jonka ratkaisu suoritettiin toisen hyvin samanlaisen ongelman ns. väli-
ongelman kautta. Väliongelman, joka liittyy edellä mainittuun täydellisten verkkojen genuksen
määrittämiseen, isä oli puolestaan Alfred Möbius tai, mikäli halutaan olla historian suhteen aivan
tarkkoja, filologian professori Weiske. Heawoodin kartanväri-ongelmaan liittyvä kaava oli
puolestaan johdettu edelleen Eulerin kaavasta $v-e+f=2$, jonka löytymisen 1750 voidaan sanoa
synnyttäneen topologian. Eulerin kaavan taustalta taas paljastuu ikivanha ja tunnettu kreikka-
laisen matematiikan ongelma, Platonin kappaleet, joiden tutkimisen pohjimmaisina virikkeinä
toimivat toivottomiksi tuomitut yritykset neliöidä ympyrä. Yritysten tunnetuin hedelmä oli π :n
löytyminen, tapahtuma, joka päätti yhden ajanjakson antiikin ajattelussa. Se oli silloisen, ratio-
naalilukuihin perustuvan, matematiikan lapsuuden loppu. Varsinaisen kartanväri-ongelman
ratkaisun kehitys on yhtä kuin väliongelman todistushistoria, jota selvitetään seuraavassa.

Kun Heawood vuonna 1890 osoitti virheelliseksi Kempen 11 vuotta aiemmin julkaiseman neliväriongelman ratkaisun niin samalla hän toi esille kartanvärityslauseensa. Kartanvärityslauseessa arvioi Heawood pintoja, jotka ovat olennaisesti erilaisia kuin pallopinta osoittaakseen, että karttojen neliväriongelman todellisuudessa vain osa vielä monimutkaisempaa ongelmaa. Tällainen pinta on mm. torus eli rengaspinta, jolle piirretyn kartan Heawood osoitti tarvitsevan 7 väriä (ks. kuva 3).



Kuva 3. Torukselle piirretty 7-kromaattinen kartta

Kromaattisen luvun määrittämistä varten Heawood johti omaa nimeään kantavan ns. Heawoodin luvun $H(\gamma)$ ja todisti yleisesti epäyhtälön $\chi(S_\gamma) \leq H(\gamma)$, mutta yhtäsuuruuden vain mainitulle arvolle 7. Nyt oli puolestaan Heawoodin vuoro erehtyä luulemaan, että koko ongelma oli tällä todistettu. Jatkotodistamisen hän kuittasi totemalla vain lyhyesti: "yleisesti tarvittavia yhteyksiä (välejä) on enemmän kuin kylliksi". Todistus toruksen pinnalla ei kuitenkaan ollut suoraan yleistettävissä muille pinnoille ja ongelma alkoi isänsä, neliväriongelman, tavoin vaivihkaa laajeta. Tutkimus kohdistui tämän jälkeen Lothar Heffterin toimesta kartanväriytyksen duaali-ongelmaan ja yhtälöön $\gamma(K_V) = \{(v-3)(v-4)/12\}$, joka antaa täydellisen verkon K_V genuksen arvon ja liittyy edellä mainittuun väli-ongelmaan. Yhtälön todistus johtaa siis suoraan myös kartanväriyslauseen todistukseen. Monet henkilöt vaikuttivat osaltaan tämän tutkimuksen etenemiseen ja lopullinen todistus tapahtui tärkeimmiltä osiltaan Ringelin ja Youngsin toimesta. Todistuksen helpompi osa, epäyhtälön $\gamma(K_V) \geq \{(v-3)(v-4)/12\}$ oikeaksi osoittaminen, seuraa suoraan Heawoodin todistuksesta. Sen todistaminen, että epäyhtälön oikea puoli on samalla myös genuksen yläraja suoritettiin siten, että K_V upotettiin annetun genuksen määräämälle suunnatulle pinnalle, minkä jälkeen haettiin verkon suurin kromaattinen luku.

Kronologisesti todistus eteni seuraavassa järjestyksessä: Vuonna 1891 Heffter todisti yhtälön solmujen määrille $8 \rightarrow 12$ eli $v \leq 12$ ja omituisen näköiselle sarjalle $v=19,31,55,67,139, 175,199,\dots$ Luvut muodostuvat siten, että $v=12s+7$ kun $q=4s+3$ on alkuluku. Lisäksi on vielä asetettu ehto, joka poistaa näistä arvoista eräitä jakojäännösluokan mod q lukuja. Vieläkään ole selvitetty, onko k.o. lukujen luokka äärellinen vai ei (nykyään tämän selvittämällä ei enää ole merkitystä itse päätodistuksen kannalta). Seuraavaa edistysaskelta saatiinkin odottaa sitten aina vuoteen 1952, jolloin Ringel todisti yhtälön kun $v=13$. Kehityksen tässä vaiheessa ymmärrettiin, että oli luonnollista yrittää ratkaisua yhdelle v modulo 12 jäännöslukuluokalle samalla kertaa. Kirjoittamalla $v=12s+r$, Ringel todisti 1954 lauseen kaikille täydellisille verkoille K_v , joille $r=5$ eli $\forall v \equiv 5 \pmod{12}$. Vuonna 1961 (-1965) Ringel onnistui selvittämään jäännöslukuluokat $v \equiv 7, 10$ ja $3 \pmod{12}$. Gustin esitteli 1963 uuden ns. *virtausverkkoihin* perustuvan menetelmän, joka yhdisti verkkoteorian, ryhmäteorian ja topologian. Hän ratkaisi omalla tahollaan itsenäisesti tapaukset $v \equiv 3, 4$ ja $7 \pmod{12}$ tietämättä, että Ringel oli jo todistanut näistä ensimmäisen ja viimeisen. Gustin ei kuitenkaan voinut todistustaan aivan loppuun saakka ja hänen esittämästään kolmesta esimerkistä 3, 4 ja 7 (yksi jokaisesta tapauksesta) oli tapauksen 4 esimerkki lisäksi virheellinen. Terry, Welch ja Youngs ratkaisivat 1963 yhdessä luokan $v \equiv 0 \pmod{12}$. Vuosina 1963-65 Gustin ja Youngs todistivat $v \equiv 1 \pmod{12}$ ja $v \equiv 9 \pmod{12}$. Youngs ratkaisi 1966 tapauksen 6. Näin oli siis ennen vuoden 1966 loppuun mennessä ratkaistu jakojäännösluokat 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 ja 10. Seuraavana vuonna Ringel ja Youngs yhdistivät voimansa Kalifornian yliopistossa, Santa Cruzissa, ja ratkaisivat Richard Guyn avustaessa kolme jäljelle jäänyttä tapausta 2, 8 ja 11 vuoden loppuun mennessä mainitussa järjestyksessä. Joitakin todistusten osia paranneltiin vielä keväällä 1968.

Mutta todistushistoria ei päättynyt vielä tähän. Yleiset menetelmät eivät toimineet joillakin pienillä v :n arvoilla ja niinpä todistuksen ulkopuolelle jäivät erilliset tapaukset $v = 18, 20, 23, 30, 35, 47$ ja 59 (nämä eivät siis ole jakojäännösluokkia). Tilanteesta tietämättömänä Jean Mayer, ranskalaisen kirjallisuuden professori Montpellierin yliopistosta, todisti vuoden 1967 aikana yhtälön kaikille $v \leq 23$. Näin jäi jäljelle enää neljä erillistapausta. Helmikuussa 1968 Ringel ja Youngs pitivät luennon verkkoteoreetikkojen kokouksessa Michiganissa ja selostivat mitkä yksityiskohtaiset tapaukset vielä puuttuivat, esimerkkinä tapaus $v = 59$. Eräs kuulijoista, Richard Guy, työskenteli läpi yön selvittäen tapauksen seuraavaan aamuun mennessä.

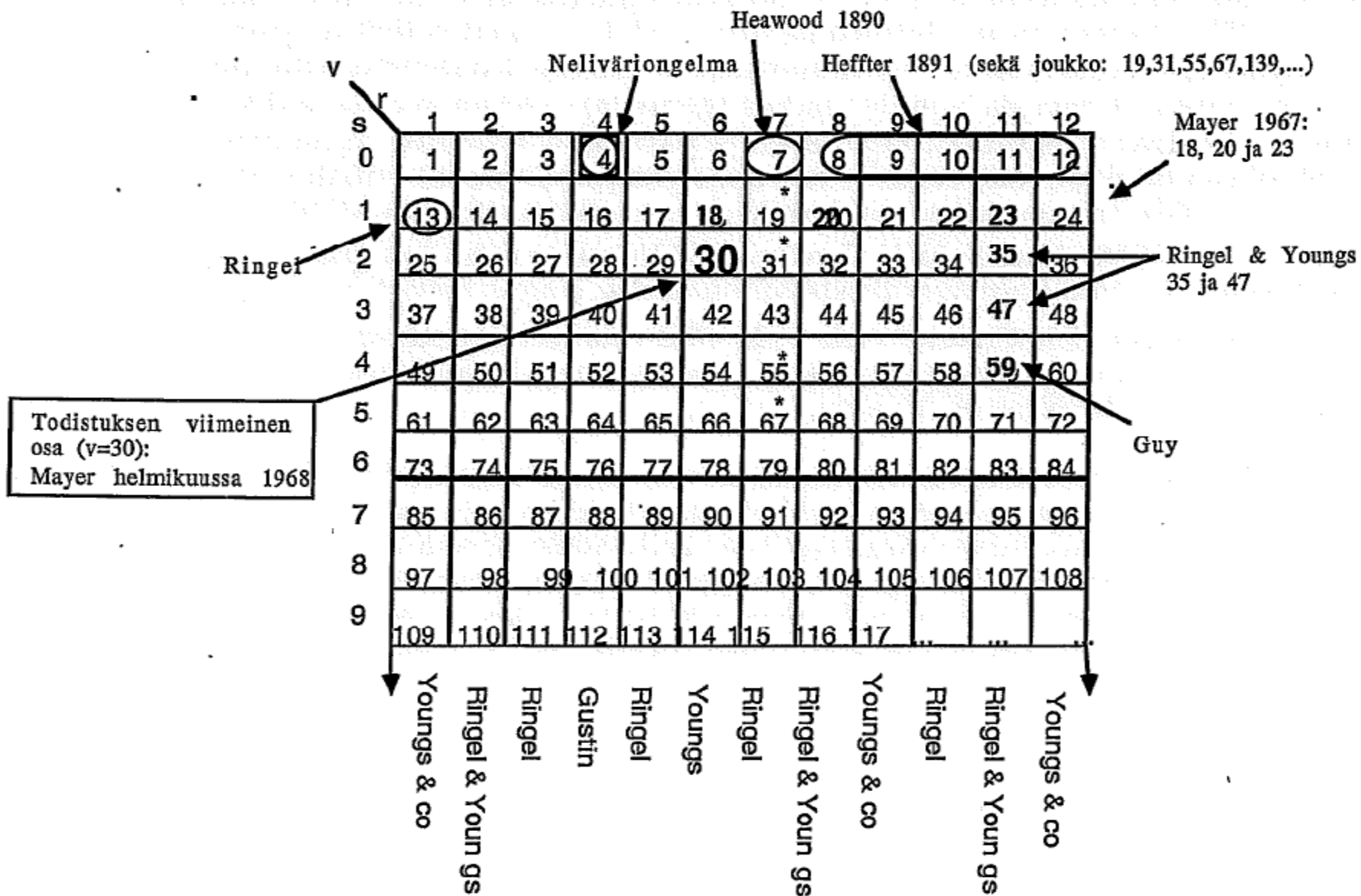
Tämän jälkeen Ringel ja Youngs ratkaisivat tapaukset $v=35$ ja 47 . Viimeisen tapauksen, $v=30$, ratkaisi Mayer helmikuun lopulla ja hänen työstään tietämättä Youngs vielä erikseen saman vuoden maaliskuussa. Vaikka todistus näin olikin saatu päätökseen niin on huomattava, että todistamatta jäi vieläkin kuitenkin merkittävä tapaus $\gamma = 0$ ($v = 4$) eli neliväriongelma. Merkittävä seikka on myös, että todistus koski vain suunnistuvia pintoja. Suunnistumattomilla pinnoilla, joilla γ ei saa kokonaislukuarvoja ja joiden sukua (genusta) merkitään q :lla, todistus kulki aivan omia latujaan. Yksinkertaisimman tapauksen ja parhaiten tunnetun suunnistumattoman pinnan, ns. Möbiuksen nauhan, joka samalla on myös yksipuolinen, eli unilateraali, pinta jolle $q=1$, selvitti Tietze jo 1910. Hänen ratkaisunsa, $\chi(M_1)=6$, merkitsi sitä, että Möbiuspinnalle piirretty kartta vaatii enimmillään kuusi väriä. Vuonna 1934 Franklin ratkaisi tapauksen $q=2$, jolloin $\chi(M_2)=6$ eli värimäärä oli sama kuin tavallisella Möbiuksella. Kagno selvitti 1935 tapaukset $q=3$, 4 ja 6 , Bose 1939 tapauksen $q=7$ ja Coxeter vielä 1943 väliin jääneen tapauksen $q=5$. Yleisen ratkaisun esitti Ringel vuonna 1954 ja 1967 ilmestyi vielä huomattavasti Ringelin todistusta lyhyempi versio 1967, tekijänä oli Youngs.

Neliväriongelmaa yritettiin ratkaista näiden samojen vuosien aikana myös kehittämällä jatkuvasti suurempia nelivärittyviä karttoja. Kun Birkhoff aloitti tämän kehityssuunnan vuonna 1913 kartalle, jossa oli 21 maata, niin Heawoodin ongelman ratkaisemisvuonna 1968 oltiin päästy jo 40 maahan. Tulosta parantelivat vuorollaan ja vuorotellen Franklin, Reynolds, Winn ja Ore. Vielä vuonna 1975 Stromquist ehti vielä julkaista 52 maata käsittävän kartan ennenkuin seuraavana vuonna Appel ja Haken onnistuivat tuottamaan tietokoneella 1482 karttavariaatiotaan. Näin oli myös ratkaistu tapaus $\chi(S_0) = 4$.

Lyhyesti sanottuna Appelin ja Hakenin todistus perustui Heeschin 50-luvulla kehittämiin algoritmeihin, joiden pohjana oli Kempen epäonnistuneessa todistuksessaan esittelemä kaava. Kempen todistuksen kaatoi aikanaan Heawood, joka yrittäessään kehittää parempaa todistusta saikin aikaiseksi kartanväriysongelman, jonka täydellisen ja lopullisen (ehkä) todistuksen mahdollisti vasta Kempen luoman kaavan uudelleen käyttöönotto. Ympyrä oli sulkeutunut. Alla on tiivistelmä todistuksen kulusta. Todistushistoriaa havainnollistava kaavio löytyy seuraavalta sivulta.

K_7	Heawood, 1890
K_v , kun $v \leq 12$	Heffter, 1891 (sekä $v=19,31,55,\dots$)
K_{13}	Ringel, 1952
K_v , kun $v \equiv 5 \pmod{12}$	Ringel, 1954
K_v , kun $v \equiv 3, 7 \text{ t. } 10 \pmod{12}$	Ringel, 1961
K_v , kun $v \equiv 4 \pmod{12}$	Gustin, 1963
K_v , kun $v \equiv 0 \pmod{12}$	Youngs, Terry ja Welch, 1963
K_v , kun $v \equiv 1 \text{ t. } 9 \pmod{12}$	Youngs ja Gustin, 1965
K_v , kun $v \not\equiv 6 \pmod{12}$	Youngs, 1966
K_v , kun $v \equiv 2, 8 \text{ t. } 11 \pmod{12}$	Ringel ja Youngs, 1967
K_v , kun $v \leq 23$	Mayer, 1967
K_{59}	Guy, 1968
K_{35} ja K_{47}	Ringel ja Youngs, 1968
K_{30}	Mayer, 1968

$$K_v, \text{ kun } v = r \bmod 12 \text{ eli } v = 12s + r$$



Mitä seuraavaksi?

Appelin ja Hakenin todistuksen aiheuttamasta lamaannuksesta selviäminen kesti aikansa, lähes sukupolvi myöhemmin saatiin siis edellä mainittu Robertson, Sanders, Seymour ja Thomas - tutkimusryhmän tekemä "parannus", parannus lainausmerkeissä siksi, että ajallinen säästö johtui etupäässä parantuneista tietokoneista. Toki konfiguraatioiden (633) määräkin oli tuntuvasti pienempi mitä se ei ole olennaista ja johtuu pitkälti vain laskumetodeista. Lyhyt matemaattinen todistus odottaa siis edelleen löytäjänsä, jos sellaista ylipäättään onkaan.

Ja mikäli 4CC jonain päivänä on ratkaistu odottaa nurkan takana jo Maa-Mars (Maa-Kuu) kartanväritysongelma (jokaisella maan valtiolla on Marsissa siirtomaa, joka on saman värinen) ja vastaavat yleistyksset, esim. Maa-Mars-Venus-Etc....

Aika ei tule käymään pitkäksi...

Projektiverkoista

**Demojen teossa on eniten
hyötyä kalvoista 68 ja 73**

• *Töiden järjestely* muistuttaa sijoitteluongelmaa, haetaan n :lle eri työlle tapa tehdä ne $m:n$ eri vaihtoehdon joukosta. Erotuksena sijoitteluongelmaan on töiden suoritusjärjestyksiin liittyvät ehdot. Töiden järjestelyn eräs sovellusalue on *projektisuunnittelu*.

• Projektisuunnitteluun on tehty erilaisia *projektinhallintamenetelmiä*, joista tunnetuimpia ovat 50-luvun lopulla kehitetyt CPM (Critical Path Method) ja PERT (Program Evaluation and Review Technique). Nämä menetelmät eroavat selvimmin ajan arvioinnissa. CPM:ssä se on deterministinen eli perustuu ennalta määrättyihin aikoihin kun taas PERT:issä ajan arviointi tapahtuu stokastisesti eli apuna käytetään satunnaislukujakaumia.

- Projektinhallinta on selvästi eräs verkkoteorian sovellusalue ja keskeistä osaa näyttelee ns. *projektiverkko* ja *kriittisen polun* hakeminen projektiverkosta. Verkon kriittinen polku tarkoittaa lyhyesti pisintä polkua alkusolmusta loppusolmuun kun verkon kaikki välit käydään läpi täsmälleen yhden kerran. Kriittisen polun pituus (pituus tarkoittaa ajan pituutta) antaa samalla lyhimmän ajan jolla projekti on mahdollista viedä läpi.
- Projektiverkon (*) piirtämisessä on noudatettava eräitä sääntöjä: 1. Verkon jokaisella välillä on suunta (verkko on suunnattu) ja verkolla on aina yksi alku- ja loppusolmu, 2. Välit kuvaavat töitä eli aktiviteetteja, 3. Verkon solmut on numeroitu nousevasti s.e. jokaisen välin päätesolmulla on aina suurempi numero kuin sen lähtösolmulla, 4.

Verkko ei saa sisältää silmukoita (eli projekti ei saa jäädä “luuppiin”) 5. Jokaisen aktiviteetin kuvaamiseen käytetään ainoastaan yhtä väliä ja jokainen väli esittää ainoastaan yhtä aktiviteettia, 6. Kahden solmun välissä on vain yksi aktiviteetti (suunnattu väli), 7. Jotta verkko voitaisiin piirtää s.e. ehdot 5 ja 6 eivät tulisi rikotuiksi, on verkkoon joskus lisättävä ns. *valeaktiviteetteja* (dummy activity), joiden kesto on nolla. Esimerkiksi jos työ A edeltää töitä C sekä D ja työ B edeltää myös D:tä, mutta ei C:tä niin verkon piirtäminen onnistuu lisäämällä valetyö A:n päätesolmusta (2) B:n päätesolmuun (3). Katso oheisen esimerkin kuvaa alla. Huom! Jos jollakulla aktiviteetilla ei ole edeltäjää niin sen lähtösolmu on tietenkin solmu nro 1.

Projektin kokonaiskesto saadaan selville kriittisen polun avulla. Kriittisen polun määrittämiseksi on tarpeen laskea seuraavia lukuarvoja: varhaisin aloitusaika (ES, earliest start time), myöhäisin aloitusaika (LF, latest start time), varhaisin lopetusaika (EF, earliest finish time), myöhäisin lopetusaika (LF, latest finish time) ja aktiviteetin pelivara (TS,). Nämä arvot voidaan laskea seuraavin yhtälöin kun aktiviteetin kestoa merkitään T:llä: $ES(\text{alkusolmusta lähtevä aktiviteetti}) = 0$, $ES(x) = \max\{EF(x\text{:ää edeltävä aktiviteetti})\}$ eli suurin x:ää edeltävien aktiviteettien varhaisimmasta päättymisajasta, $EF(x) = ES(x) + T(x)$. Projektin aikaisin mahdollinen päättymisaika on $EF(n)$ kun n on viimeinen aktiviteetti. Jatketaan laskemalla takaperin: $LF(n) = EF(n)$, $LS(n) = LF(n) - T(n)$, ..., $LF(x) = \min\{LS((x\text{:ää seuraava aktiviteetti})\}$ eli pienin x:ää seuraavien aktiviteettien myöhäisimmästä alkamisajasta, $LS(x) = LF(x) - T(x)$. Kun verkko on laskettu "läpi" niin saadaan pelivarat yksinkertaisesti: $TS(x) = LS(x) - ES(x)$.

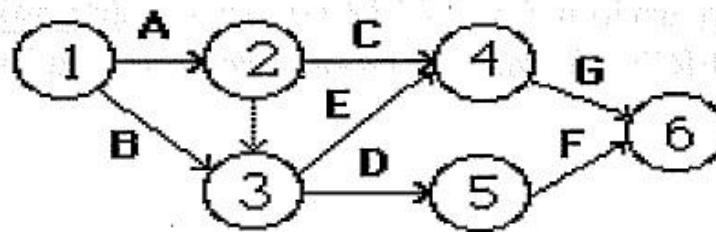
- Jos $TS(x) = 0$ niin aktiviteetti kuuluu projektiverkon kriittiseen polkuun.
- Kriittisellä polulla ei siis ole pelivaraa ja vastaavasti ne aktiviteetit, joilla $TS > 0$, on ns. vapaata pelivaraa. Vapaa pelivara on se aika, minkä ko. työ voi myöhästyä vaikuttamatta seuraavan työn alkamiseen.

Esimerkki.

On piirrettävä projektiverkko, jossa töiden järjestys on määrätty seuraavasti: Työtä C edeltää työ A, töitä E ja D edeltävät työt A ja B, työtä G edeltävät työt C ja E sekä työtä F edeltää työ D. Tutki missä ajassa projekti on mahdollista viedä läpi kun töiden kestoajat ovat seuraavat: A=3, B=2, C=3, D=5, E=3, F=2 ja G=5.

Esimerkki.

On piirrettävä projektiverkko, jossa töiden järjestys on määrätty seuraavasti: Työtä C edeltää työ A, töitä E ja D edeltävät työt A ja B, työtä G edeltävät työt C ja E sekä työtä F edeltää työ D. Tutki missä ajassa projekti on mahdollista viedä läpi kun töiden kestoajat ovat seuraavat: A=3, B=2, C=3, D=5, E=3, F=2 ja G=5.



Lasketaan arvot kullekin aktiviteetille. Esimerkiksi $EF(A) = ES(A) + T(A) = 0 + 3 = 3, \dots$ (lasketaan verkko loppuun), $LF(A) = \min \{LS(C), LS(D), LS(E)\} = \min\{3, 3, 4\} = 3$, $LS(A) = LF(A) - T(A) = 3 - 3 = 0$ ja $TS(A) = LS(A) - ES(A) = 3 - 3 = 0$. Ohessa taulukko.

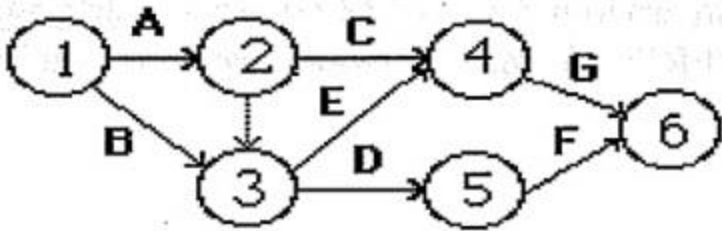
	T	ES	EF	LS	LF	TS
A	3	0	3	0	3	0
B	2	0	2	1	3	1
C	3	3	6	3	6	0
D	5	3	8	4	9	1
E	3	3	6	3	6	0
F	2	8	10	9	11	1
G	5	6	11	6	11	0

Kriittiseen polkuun kuuluvat siis työt A, C, E ja G.

Lasketaan arvot kullekin aktiviteetille. Esimerkiksi $EF(A) = ES(A) + T(A) = 0 + 3 = 3, \dots$ (lasketaan verkko loppuun), $LF(A) = \min \{LS(C), LS(D), LS(E)\} = \min\{3, 3, 4\} = 3$, $LS(A) = LS(A) - T(A) = 3 - 3 = 0$ ja $TS(A) = LS(A) - ES(A) = 3 - 3 = 0$. Ohessa taulukko.

	T	ES	EF	LS	LF	TS
A	3	0	3	0	3	0
B	2	0	2	1	3	1
C	3	3	6	3	6	0
D	5	3	8	4	9	1
E	3	3	6	3	6	0
F	2	8	10	9	11	1
G	5	6	11	6	11	0

Kriittiseen polkuun kuuluvat siis työt A, C, E ja G.



The End



Huhtikuussa tulossa mm.

Kuljetusongelma

Lyhimmän polun ongelma

Kauppamatkustajan ongelma

Matriisit ja sosiaaliset verkot

Muistin rakennetta verkkona

...