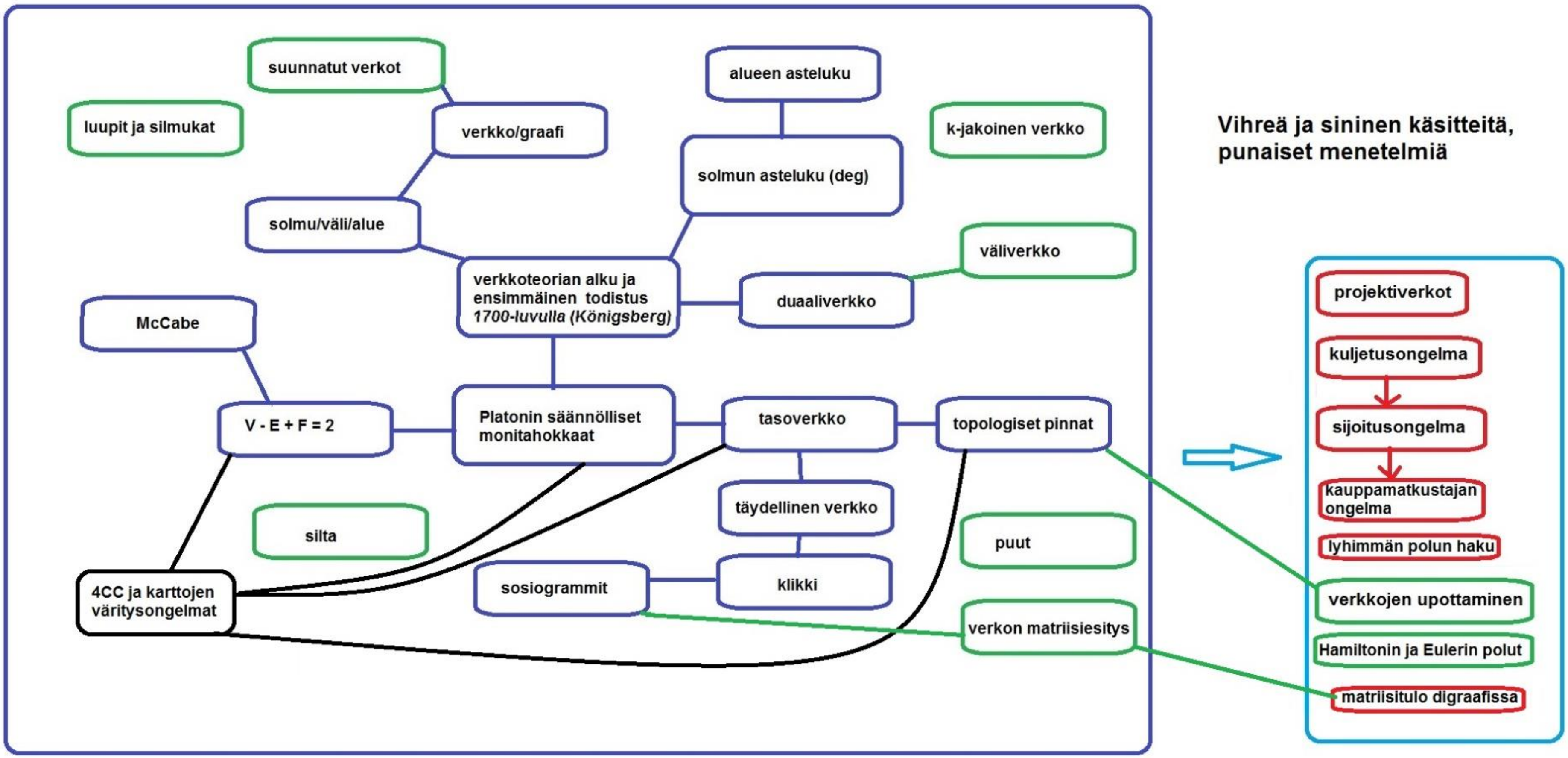
Johdatus verkkoteoriaan
6. luento
5.12.17



suunnatut verkot
luupit ja silmukat
verkko/graafi
alueen asteluku
solmun asteluku (deg)
k-jakoinen verkko
Vihreä ja sininen käsitteitä, punaiset menetelmiä
solmu/väli/alue
väliverkko
verkkoteorian alku ja ensimmäinen todistus 1700-luvulla (Königsberg)
duaaliverkko
McCabe
V - E + F = 2
Platonin säännölliset monitahokkaat
tasoverkko
topologiset pinnat
täydellinen verkko
silta
puut
sosiogrammit
klikki
4CC ja karttojen väritysongelmat
verkon matriisiesitys
projektiverkot
kuljetusongelma
sijoitusongelma
kauppamatkustajan ongelma
lyhimmän polun haku
verkkojen upottaminen
Hamiltonin ja Eulerin polut
matriisitulo digraafissa

Läpikäydyt käsitteet tavoitelistalta

Verkko eli graafi, tasoverkko, solmut, välit, alueet, suunnatut verkot, isomorfiset verkot, verkon duaali, verkon upottaminen, verkon genus, verkon komplementti, aliverkko, täydellinen verkko, solmun ja alueen asteluku, väliverkko, säännöllinen verkko, Eulerin ja Hamiltonin verkot, kauppamatkustajan ongelma, verkon kromaattinen luku, kaksijakoinen verkko, erilaiset polut ja silmukat, verkon yhtenäisyys, puurakenteet, projektiverkko ja sen kriittinen polku …

AVOIN	SULJETTU	
T I E *W A L K*	SULJETTU TIE *CLOSED WALK*	koostuu väleistä ja solmuista tie alkaa aina solmusta ja päättyy solmuun
K E T J U *T R A I L*	S I L M U K K A *CLOSED TRAIL* *(CIRCUIT)*	jokainen väli esiintyy vain kerran
P O L K U *P A T H*	SULJETTU POLKU *CLOSED PATH*	jokainen solmu (ja väli) esiintyy vain kerran

erityisesti suljettu polku on:

kun polun pituus on:

KEHÄ *CYCLE*	•3
LUUPPI (LENKKI) *LOOP*	1

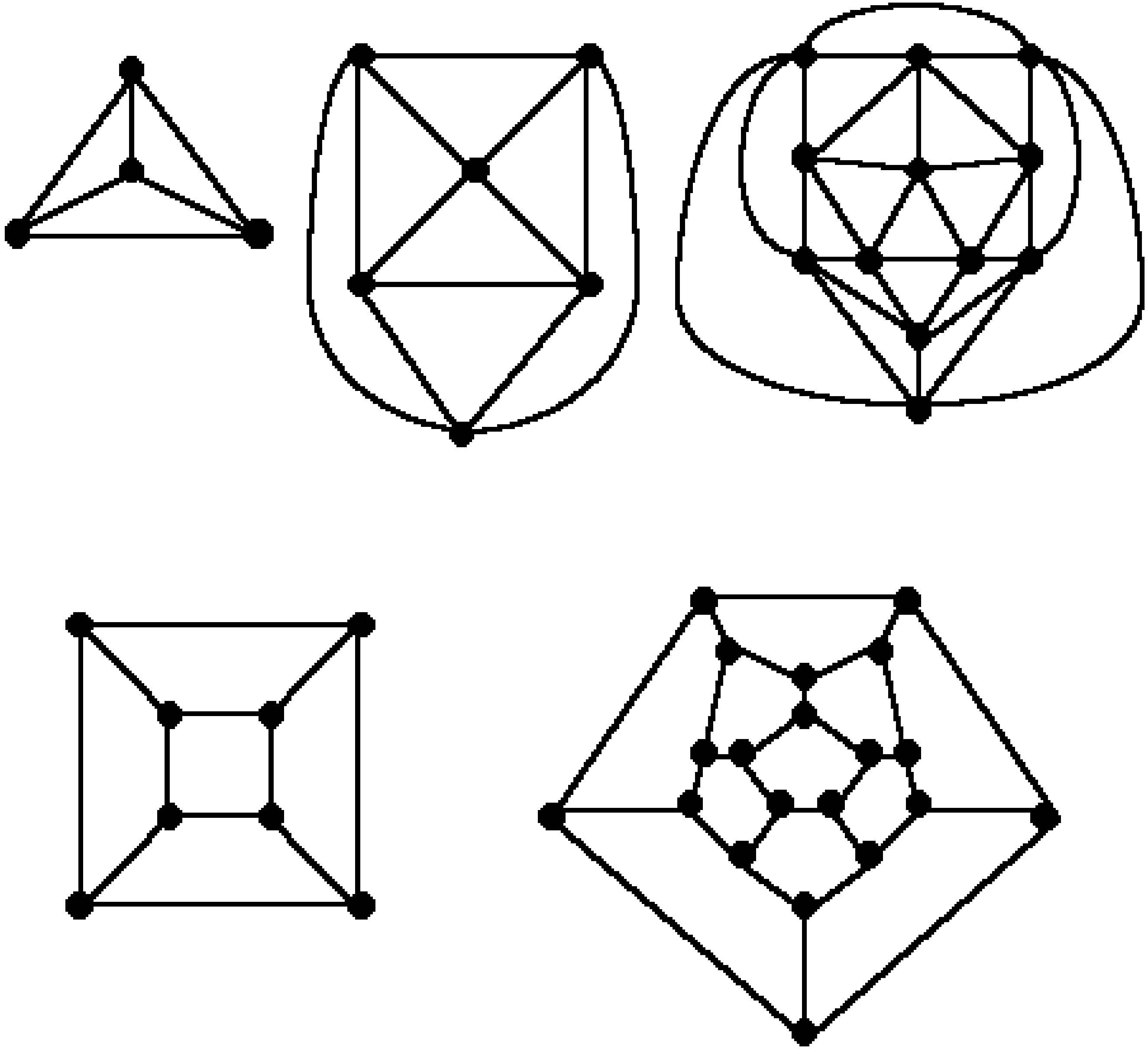
Teitä ja polkuja

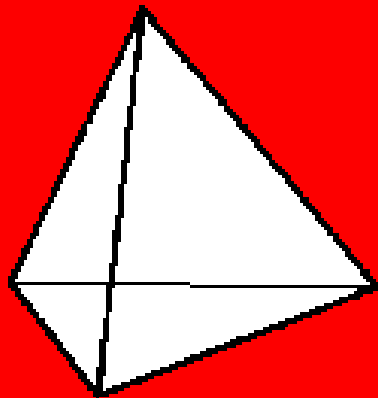
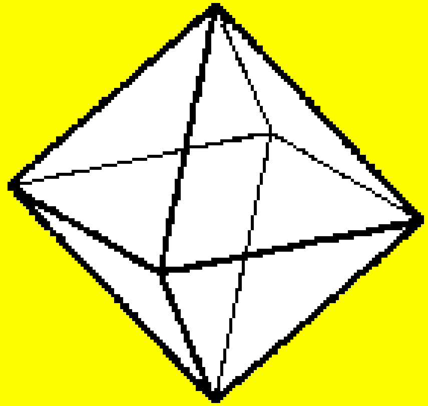
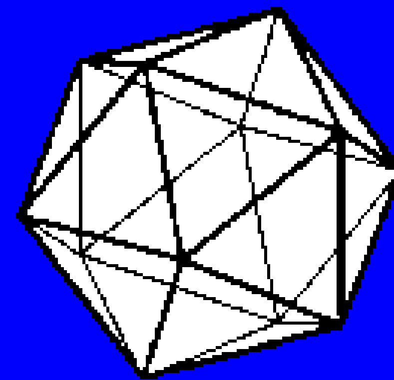
Sijoitusongelman ratkaisu
Unkarilaisella menetelmällä:

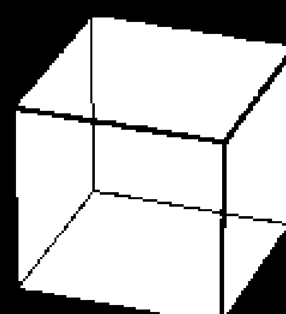
1. Ongelmasta muodostetun nxn-matriisin kultakin riviltä vähennetään sen riviminimi,
2. sen jälkeen kultakin sarakkeelta vähennetään sarakeminimi,
3. yliviivataan kaikki 0-alkiot siten että viivoja on mahdollisimman vähän, aluksi eniten nollia sisältävät rivit/sarakkeet,
4. jos viivojen lukumäärä on suurempi tai yhtäsuuri kuin n niin mennään viimeiseen askeleeseen 6.,
5. etsitään pienin alkio (merk. L), jota ei ole peitetty viivalla ja vähennetään se kaikista peittämättömien rivien alkioista ja lisätään kaikkien peitettyjen sarakkeiden alkioihin ja palataan askeleeseen 3.,
6. valitaan ratkaisuun tulevat nolla-alkiot siten että kultakin riviltä ja sarakkeelta tulee täsmälleen yksi alkio.

Huom! Ratkaisu ei ole aina yksiselitteinen.

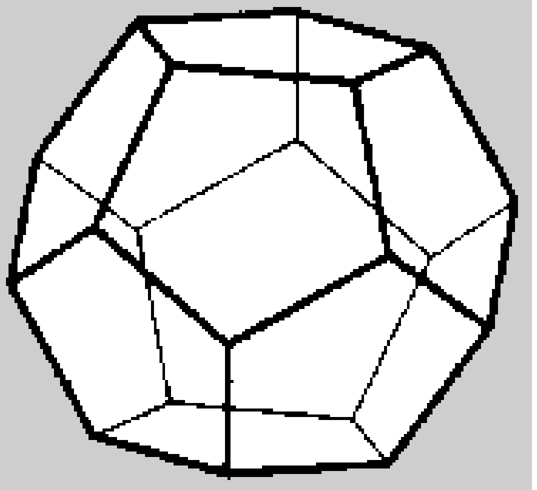
$$V - E + F = 2$$



Fire	Air	Water
 Tetrahedron	 Octahedron	 Icosahedron
hot & dry	hot & wet	cold & wet

Empedocles	Earth
Plato: Platonic Solid with Squares	 Cube
Aristotle	cold & dry

back Netspace



Dodecahedron

back

Netspace

$$V - E + F = 0$$

Back Netspace

Genus (g)

$$V - E + F = 2 - 2g$$

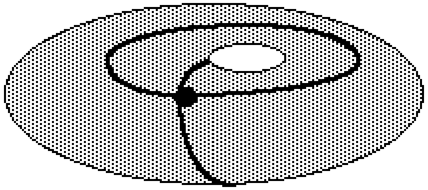
genus

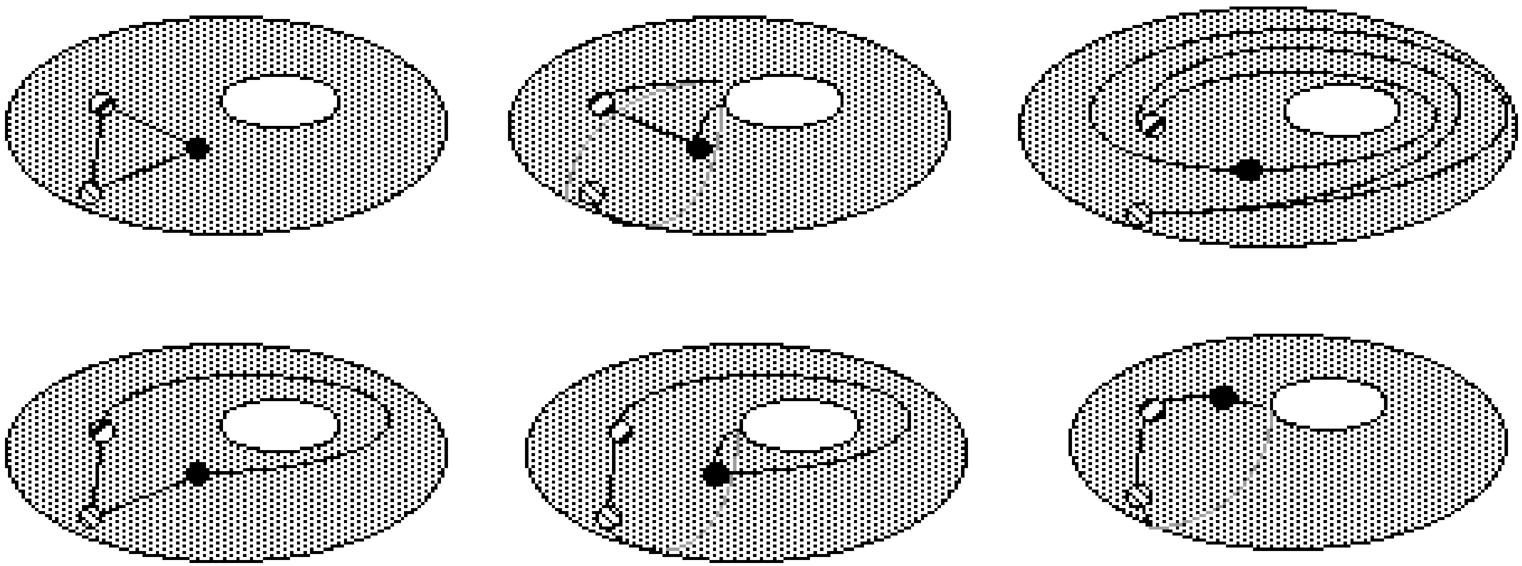
Back

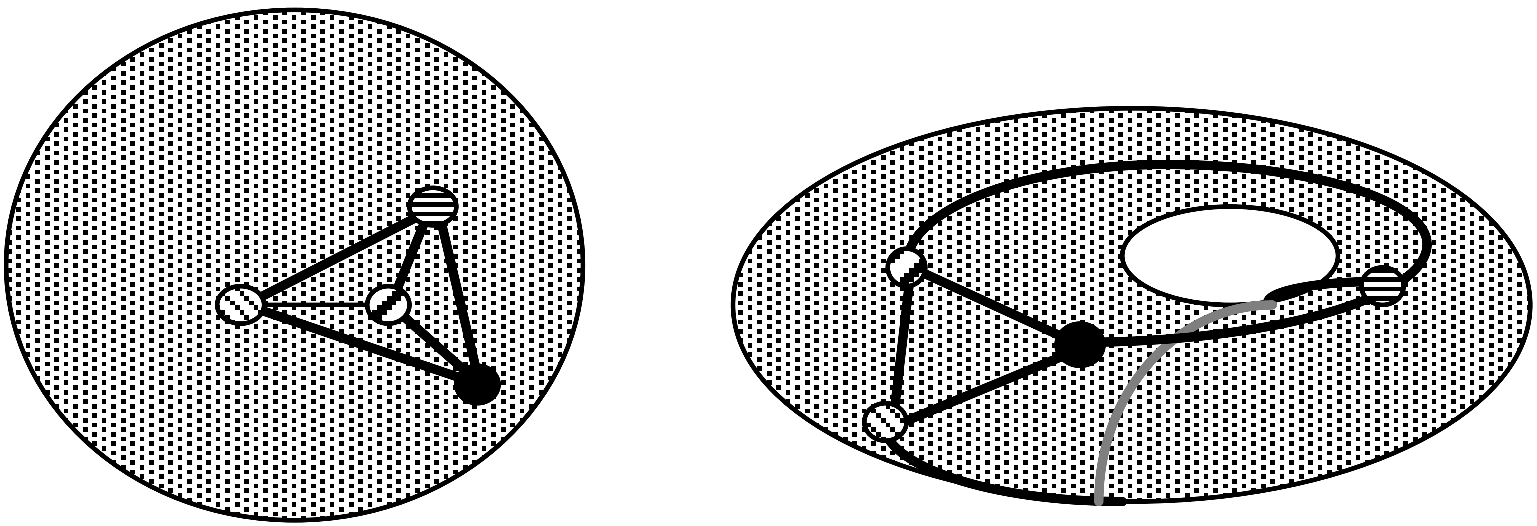
Netspace

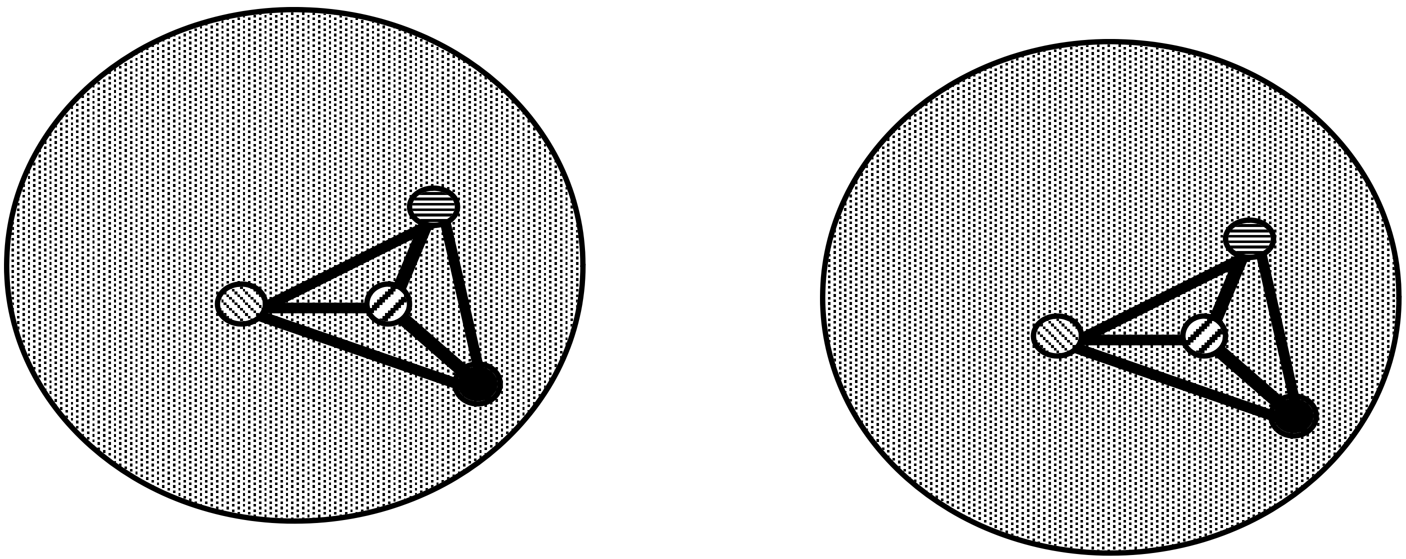
$$g = 1$$

$$V - E + F = 0$$



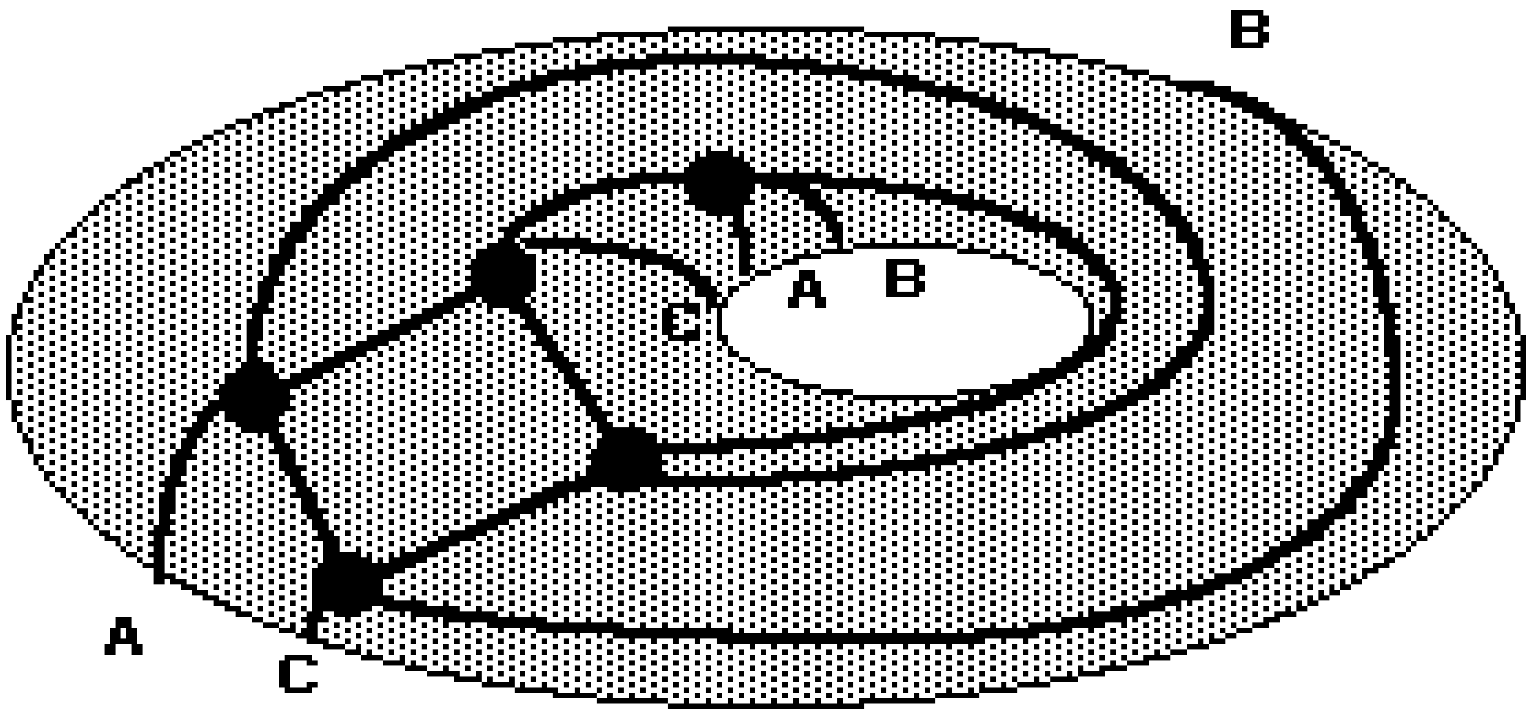






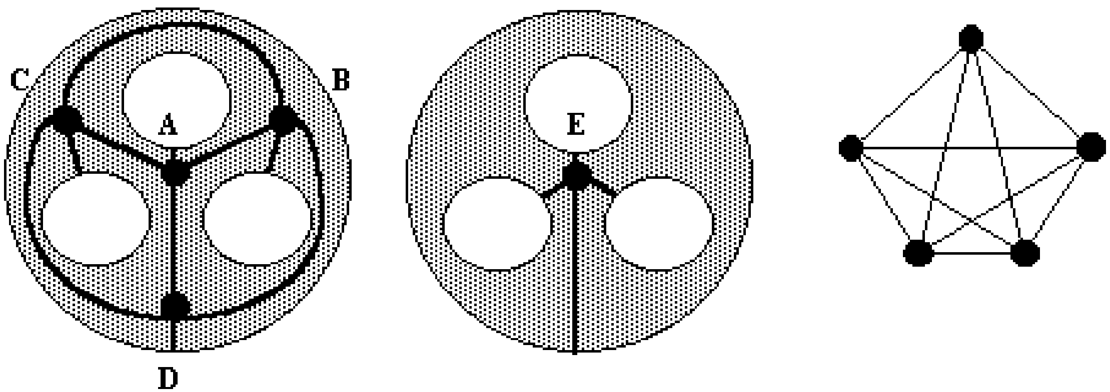
TÄYDELLISEN VERKON GENUS

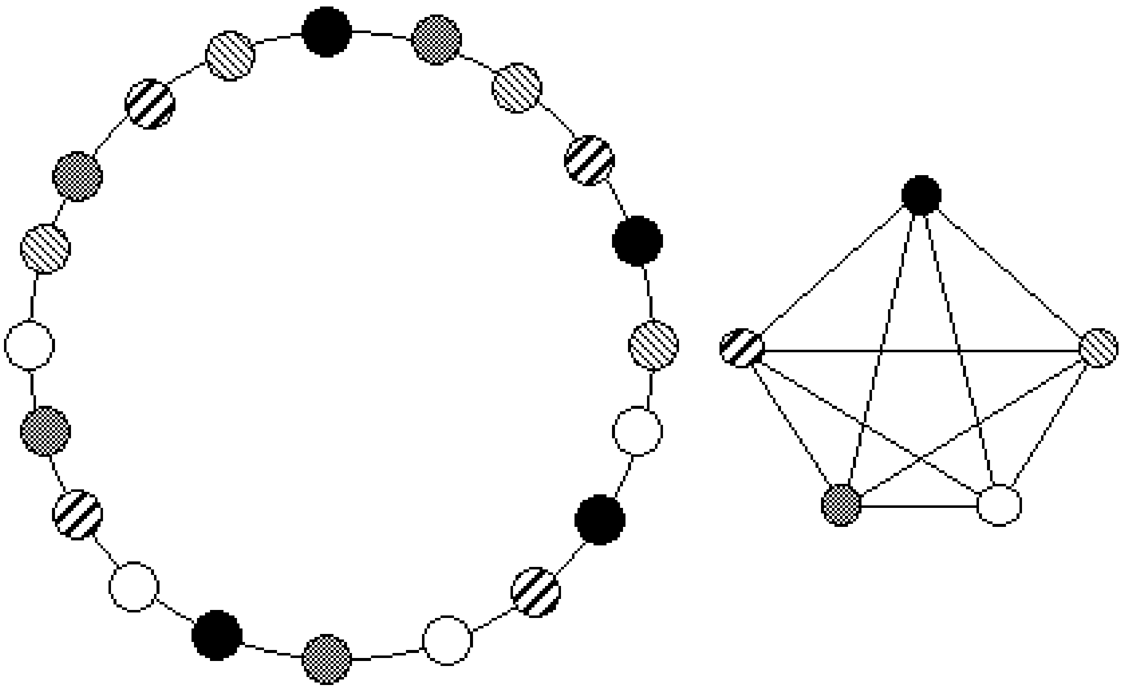
$$\gamma(K_v) = \left\{ \frac{(v-3)(v-4)}{12} \right\}$$

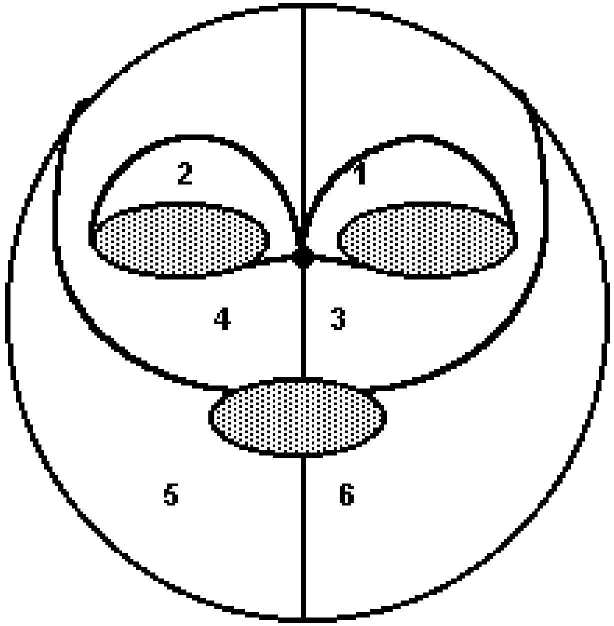

B
A
B
C
A
C

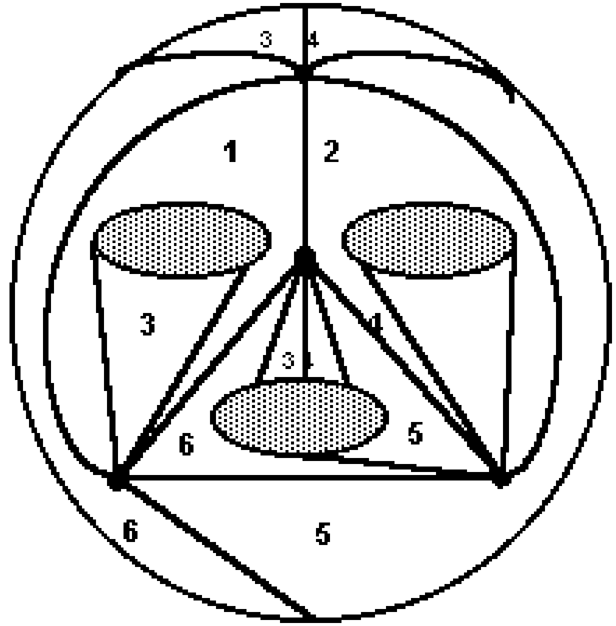
$$g = 3$$

$$V - E + F = -4$$


C
B
A
D
E







Back Netspace

$$V - E = 0$$

$$V - E + F = 2$$

$$V - E + F - S = 0$$

Eulerin-Poincarén kaava

S_k on k-simpleksien lukumäärä

$k = 0 \ldots n+1$

$$\Sigma\, (-1)^k * S_k = 1-\gamma, \text{ kun } S_{n+1} = 1-\gamma$$

Säännölliset verkot eli Eulerin kaava kun alueen asteluku on sama

$$E = 3V - 6$$

$$2e = \sum k * \deg(v_k)$$

$$2e = 3f$$

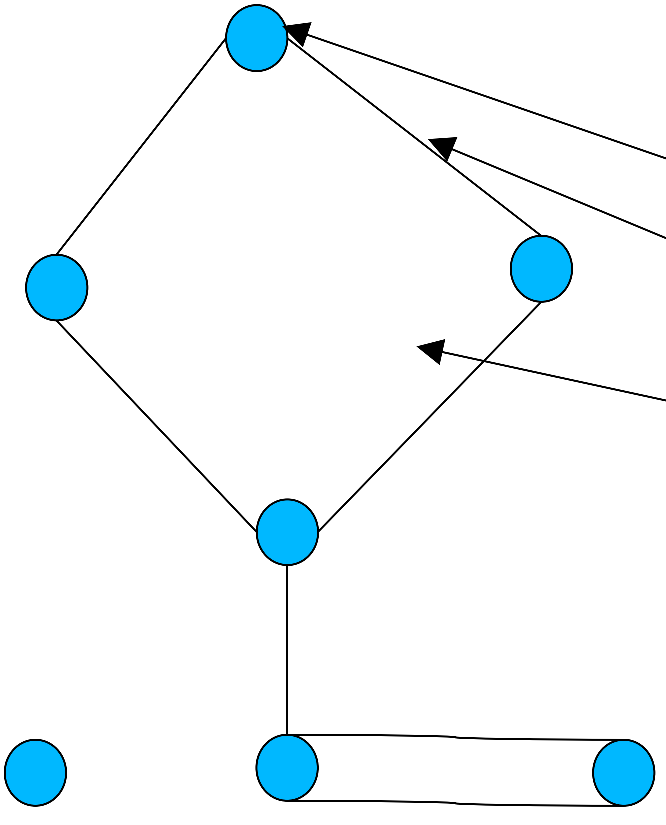
$$v - e + f = 2$$

$$E = 2V - 4$$

Verkkoteoriaa

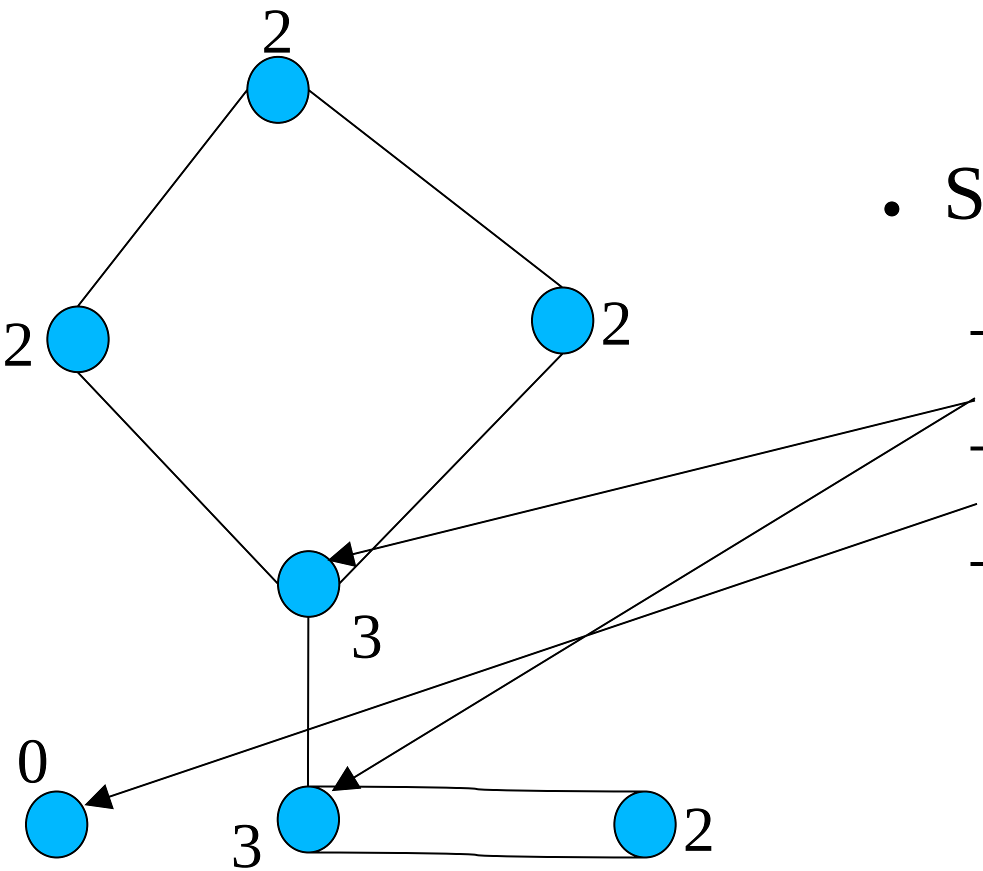
Lisää kertausta

Verkkoteoriaa



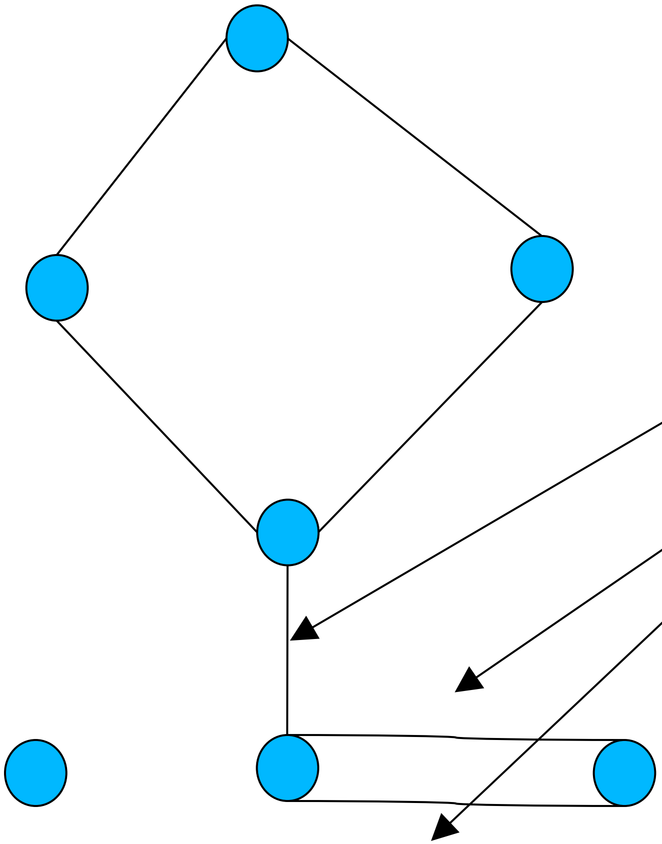
- Verkko
  - solmu
  - väli
  - alue

Verkkoteoriaa



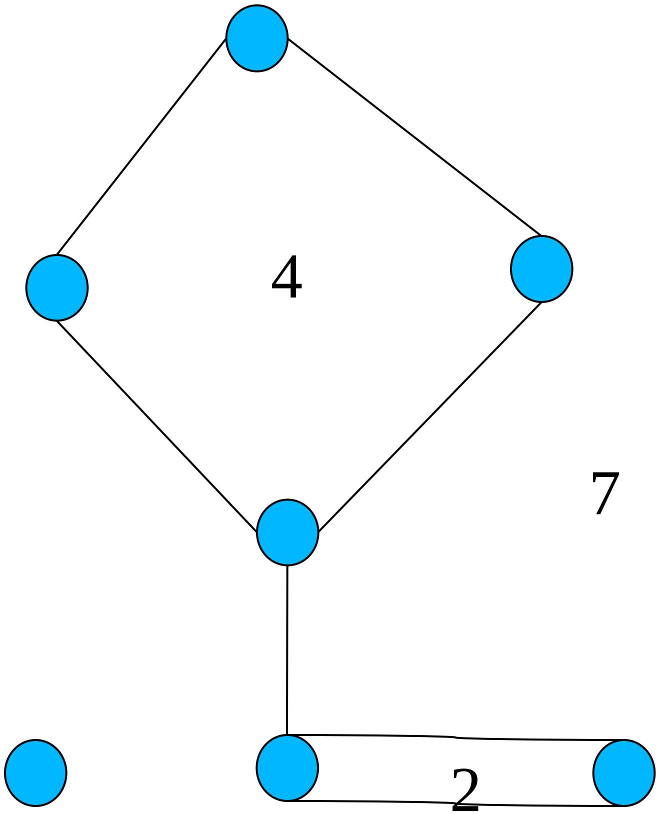
- Solmu
  - aste
  - leikkaussolmu
  - erillinen

Verkkoteoriaa



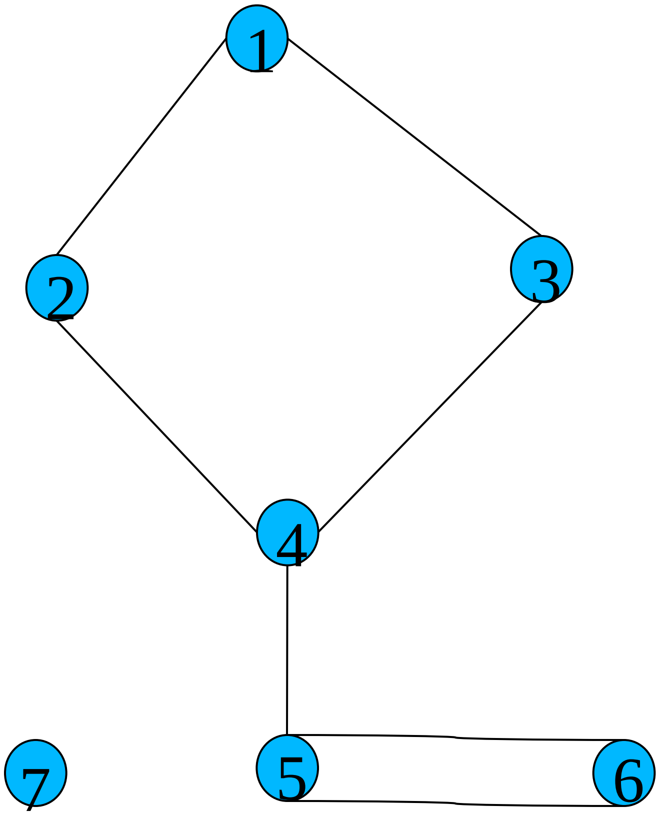
- Väli
  - silta
  - rinnakkainen

Verkkoteoriaa



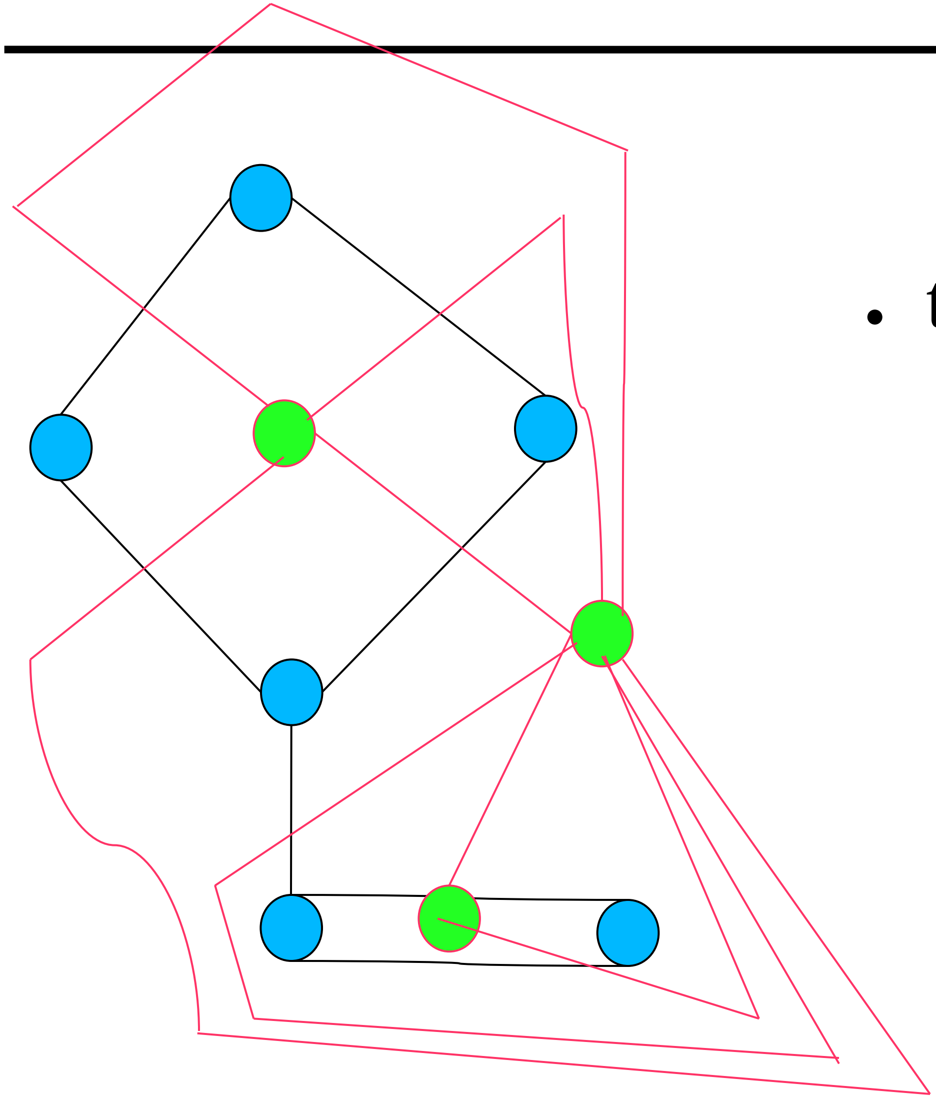
- Alue
  - aste
  - ulkopuoli!

Verkkoteoriaa



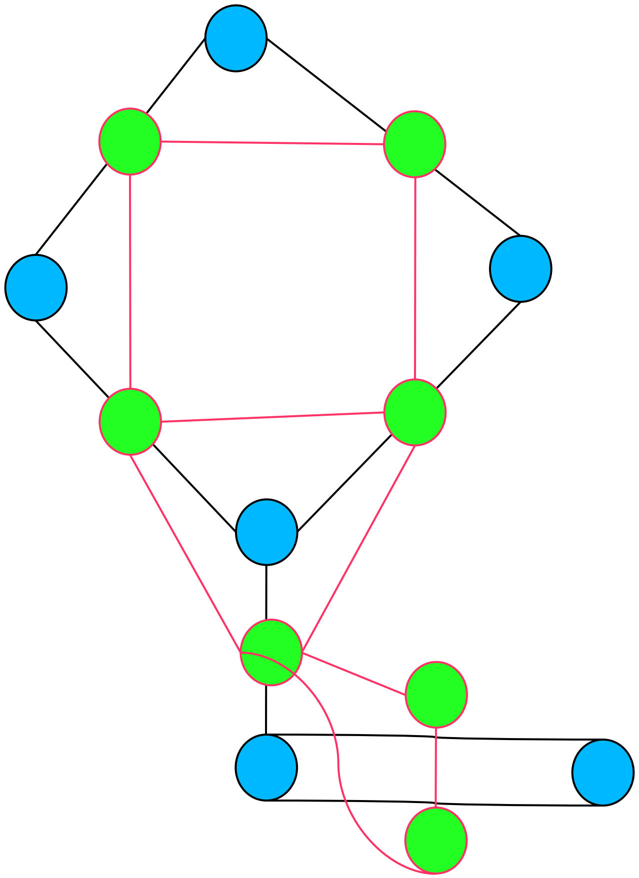
- Eulerin monitahokaskaava
  - e-v+f=2
    7-7+3=2
    3=2 ? miksi ?
- kolmioverkko
  - e=3v-6

Duaali



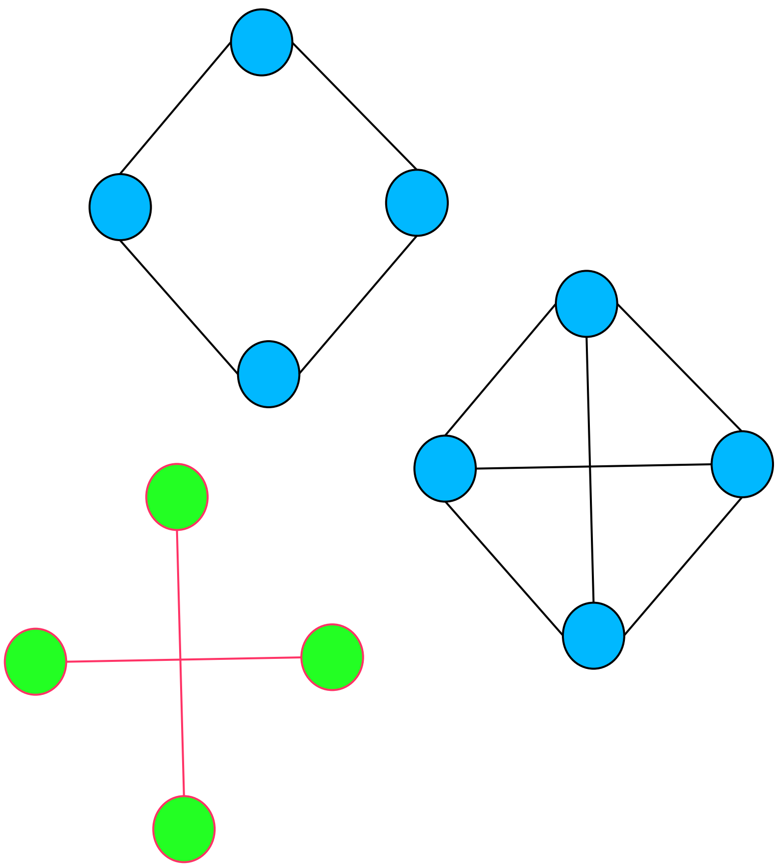
- tekeminen
  - alueet solmuiksi
  - ylitetään välit

Väliverkko



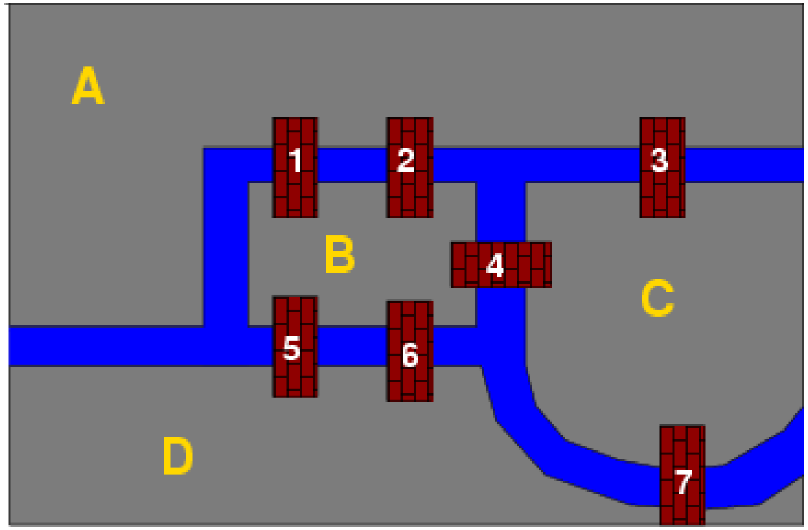
- tekeminen
  - alueet solmuiksi
  - ylitetään vierekkäiset välit
- välien määrä:
  - $e_L = -e + ½ \Sigma (d_i)^2$

Komplementti



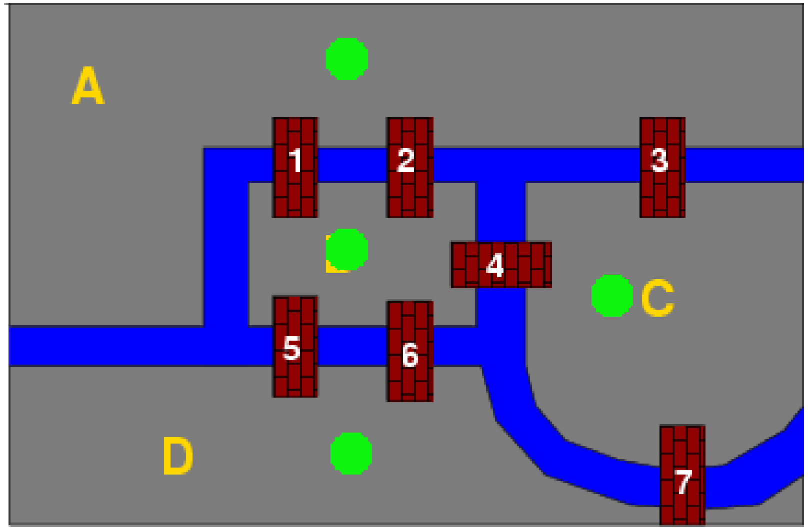
- vain yksinkertaisille verkoille
- tekeminen
  - tehdään vastaava täydellinen verkko
  - poistetaan ne välit, jotka ovat alkuperäisessä

Königsbergin sillat



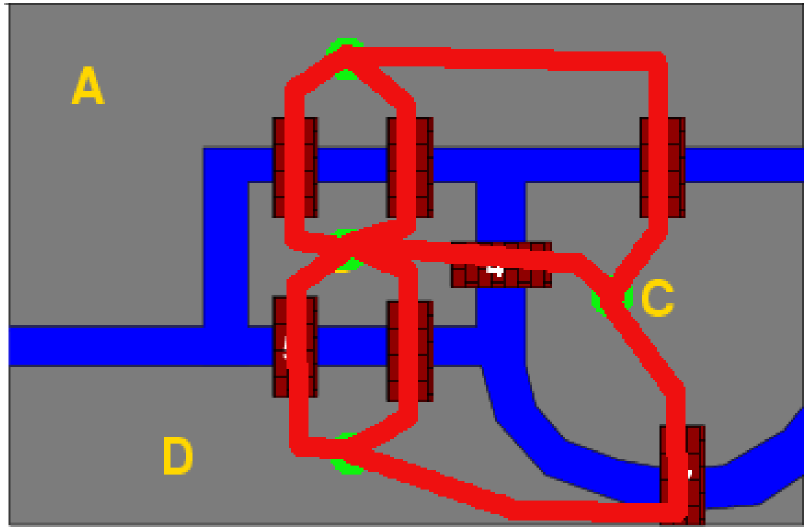
- Euler
- Köningsberg (Kaliningrad)
- ”kulje kaikki sillat ylittämättä mitään siltaa kahta kertaa”
- v. 1736

ratkaisu



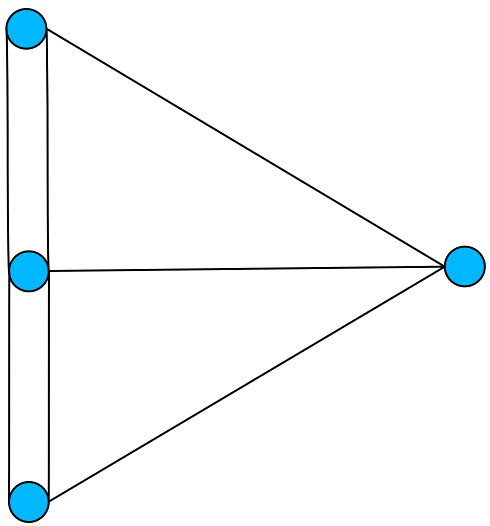
- merkitään kaikkia maa-alueita palloilla (solmuilla)

ratkaisu



- yhdistetään solmut viivoilla

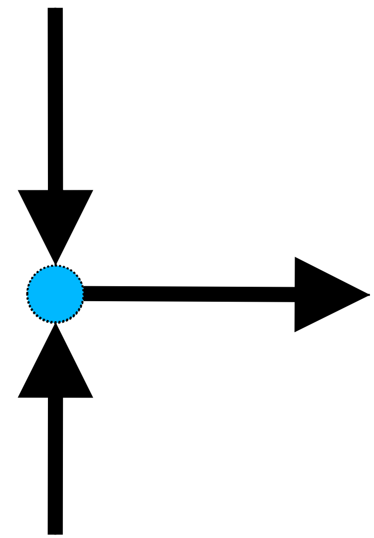
ratkaisu



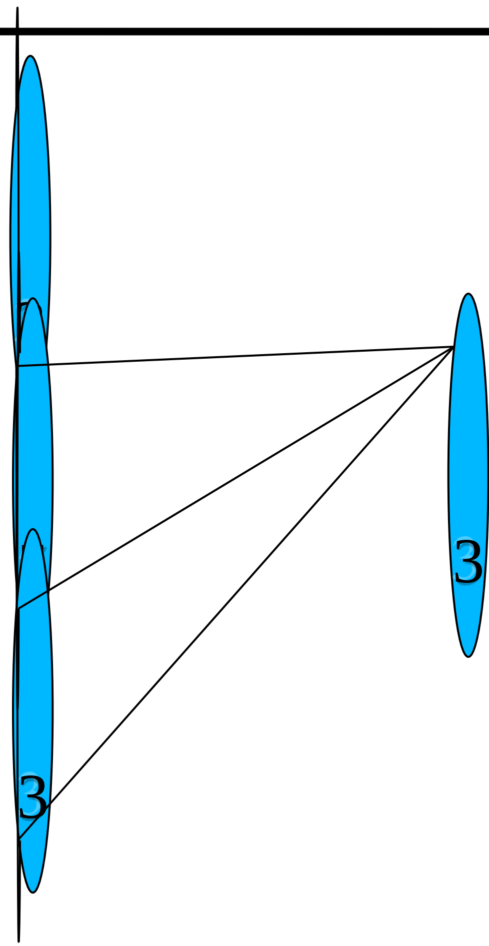
- piirretään toisin
- saadaan verkko :)
- sana verkko vasta 1878 (Sylvester)
- ”kaikkien verkkojen äiti”

ratkaisu

- solmulla pariton määrä välejä
  - 1. tullaan solmuun
  - 2. poistutaan solmusta
  - 3. tullaan takaisin
- joten solmuun, jolla on pariton määrä välejä pitää aloittaa tai lopettaa
- eli verkossa max. 2 ”paritonta solmua”, jotta ongelma ratkeaa



ratkaisu



- kaikki 4 solmua parittomia => ei ratkaisua
- Euler todista asian myös toisinpäin: ”jos verkossa on enintään kaksi paritonta solmua, niin k.o. polku löytyy”

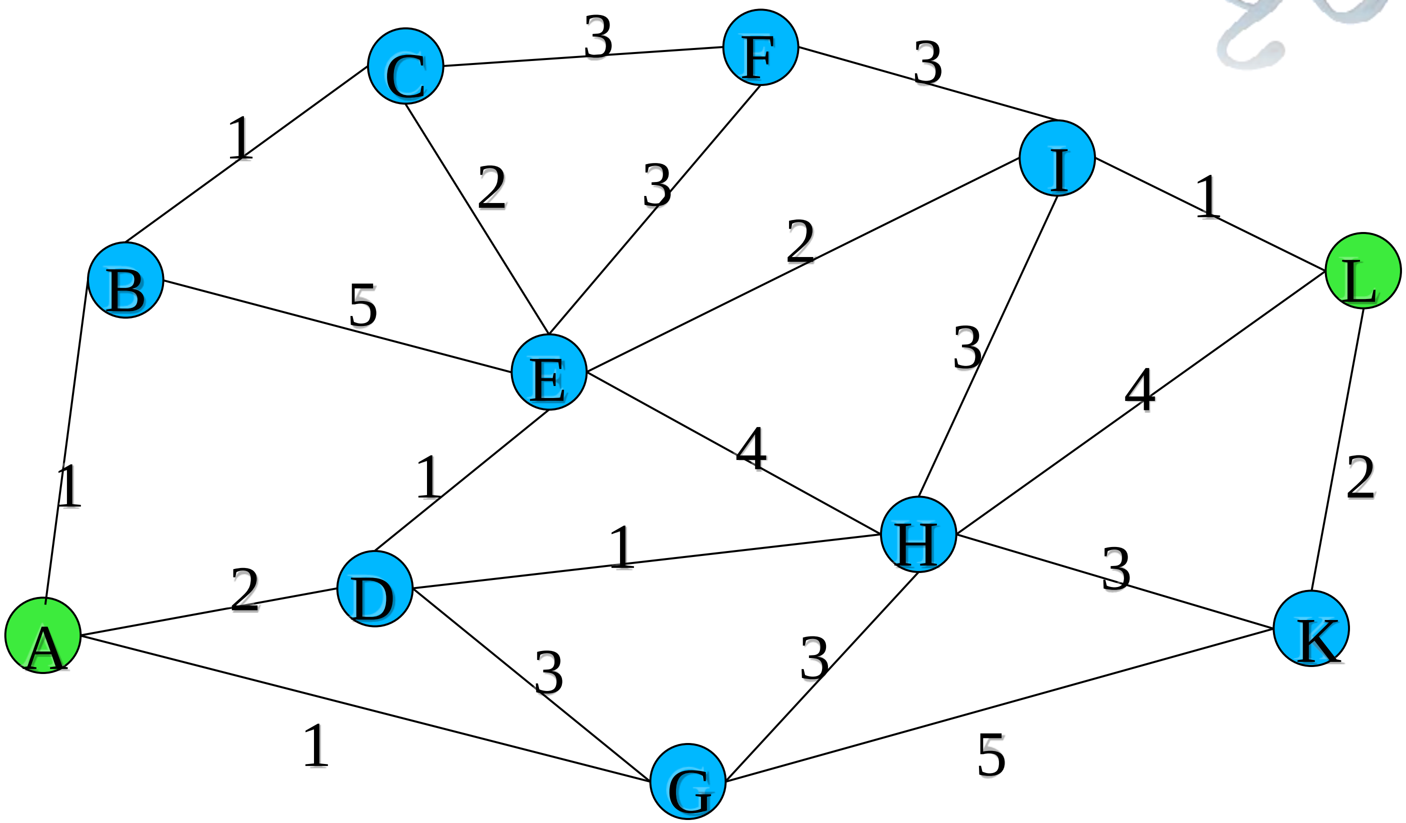
Lyhin polku

Kauppamatkustajan ongelma

eli

Lyhyimmän polun ongelma

Verkko



Matriisi

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
A	∞	1	∞	2	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
B	1	∞	1	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	1	∞	∞	2	3	∞	∞	∞	∞	∞
D	2	∞	∞	∞	1	∞	3	1	∞	∞	∞
E	∞	5	2	1	∞	3	∞	4	2	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	3	∞	∞	∞	3	∞	∞
G	1	∞	∞	3	∞	∞	∞	3	∞	5	∞
H	∞	∞	∞	1	4	∞	3	∞	3	3	4
I	∞	∞	∞	∞	2	3	∞	3	∞	∞	1
K	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	3	∞	∞	2
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4	1	2	∞

Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
0	1	∞	2	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
	1	2	2	6	∞	1	∞	∞	∞	∞
		2	2	6	∞	1	4	∞	6	∞
		2	2	3	∞		3	∞	6	∞
		2		3	5		3	∞	6	∞
				3	5		3	6	6	7
				3	5			5	6	7
					5			5	6	7
								5	6	6
									6	6
										6

ratkaisu