Johdatus verkkoteoriaan

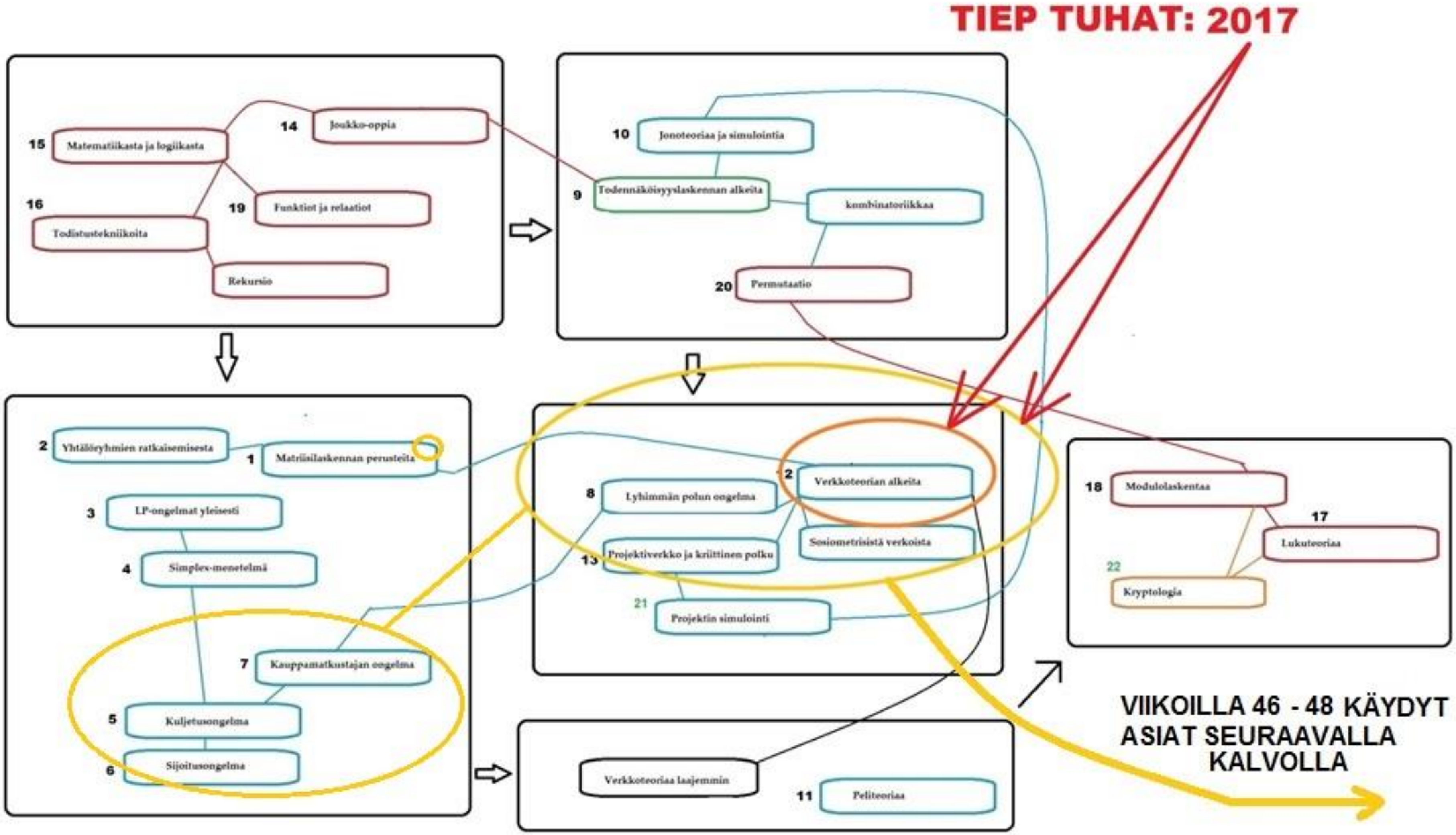
5. luento

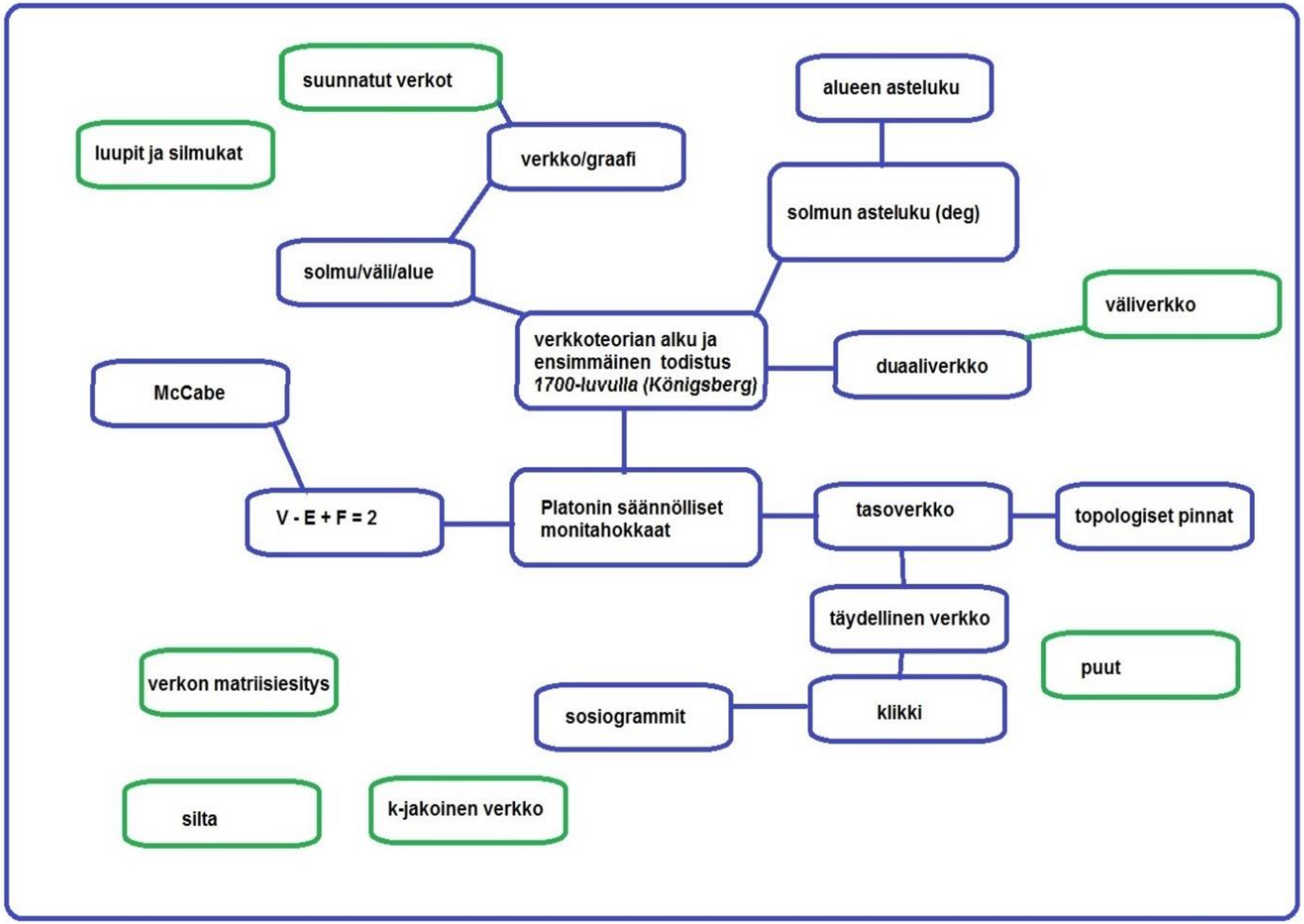
29.11.17

Läpikäydyt käsitteet tavoitelistalta 48. viikolla

Verkko eli graafi, tasoverkko, solmut, välit, alueet, suunnatut verkot, isomorfiset verkot, verkon duaali, verkon upottaminen, verkon genus, verkon komplementti, aliverkko, täydellinen verkko, solmun ja alueen asteluku, väliverkko, säännöllinen verkko, Eulerin ja Hamiltonin verkot, kauppamatkustajan ongelma, verkon kromaattinen luku, kaksijakoinen verkko, erilaiset polut ja silmukat, verkon yhtenäisyys, puurakenteet, projektiverkko ja sen kriittinen polku …

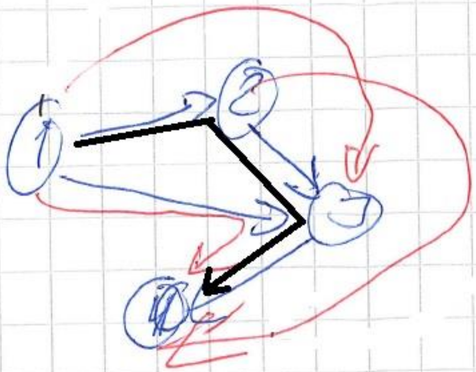
Mustalla vielä käsittelemättä olevat


TIEP TUHAT: 2017
15 Matematiikasta ja logiikasta
14 Joukko-oppia
16 Todistustekniikoita
19 Funktiot ja relaatiot
Rekursio
10 Jonoteoriaa ja simulointia
9 Todennäköisyyslaskennan alkeita
kombinatoriikkaa
20 Permutaatio
2 Yhtälöryhmien ratkaisemisesta
1 Matriisilaskennan perusteita
3 LP-ongelmat yleisesti
4 Simplex-menetelmä
7 Kauppamatkustajan ongelma
5 Kuljetusongelma
6 Sijoitusongelma
8 Lyhimmän polun ongelma
12 Verkkoteorian alkeita
13 Projektiverkko ja kriittinen polku
Sosiometrisistä verkoista
21 Projektin simulointi
Verkkoteoriaa laajemmin
11 Peliteoriaa
18 Modulolaskentaa
17 Lukuteoriaa
22 Kryptologia
VIIKOILLA 46 - 48 KÄYDYT ASIAT SEURAAVALLA KALVOLLA



Vihreä ja sininen käsitteitä, punaiset menetelmiä

MATRIISIOPERAATIO SUUNNATUSSA VERKOSSA



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2 ASKELEN POLUT: 1 -> 2 -> 3, 1 -> 3-> 4, 2 -> 3-> 4

3 ASKELEN POLKU: 1 -> 2 -> 3 -> 4

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2 ASKELEN POLKU

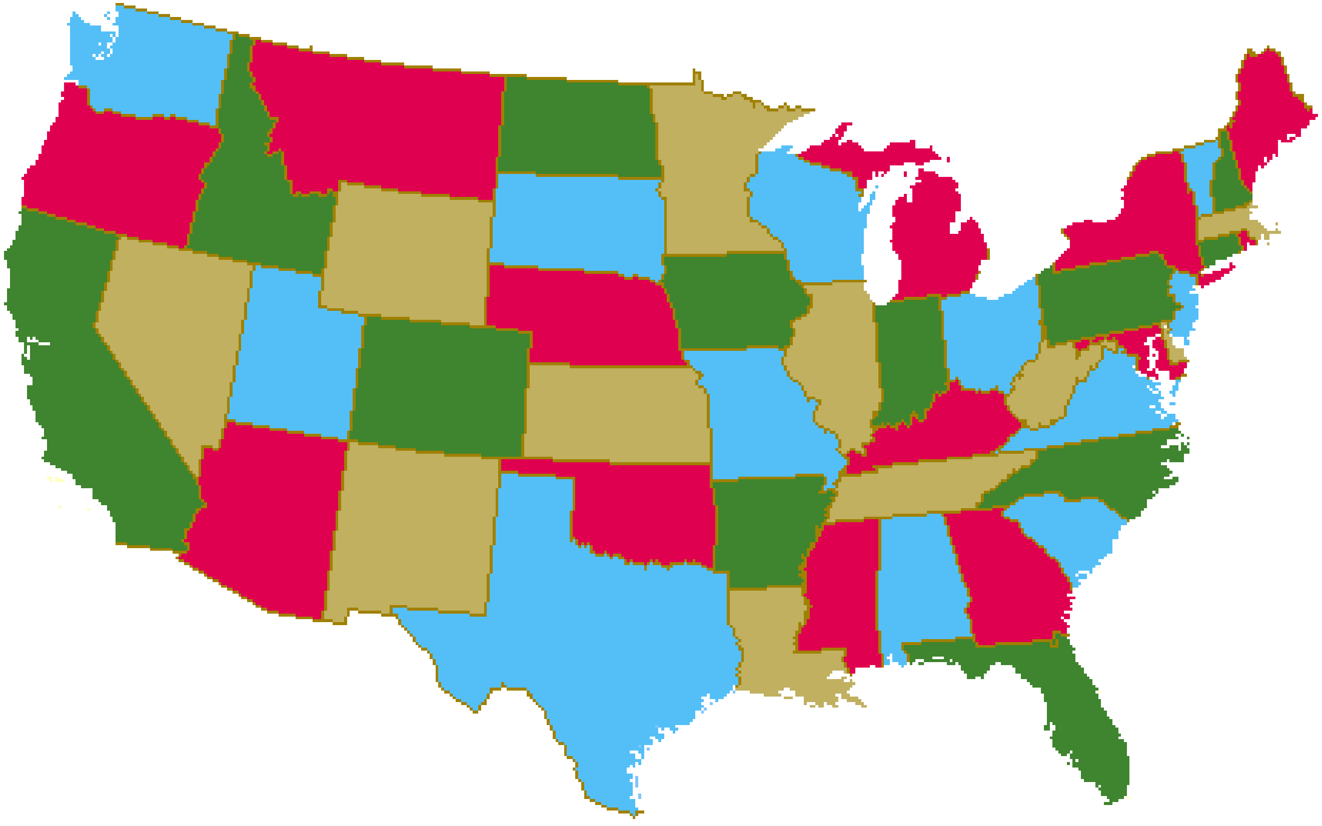
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3 ASKELEN POLKU

LASKETAAN:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0*1 + 1*1 + 1*0 + 0*0 = 1$$

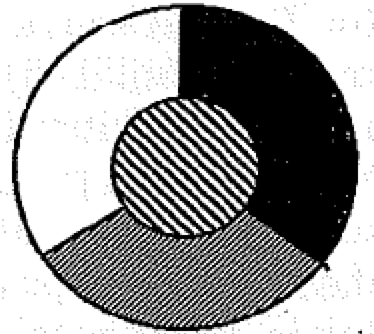
4CC



Karttojen neliväritysprobleema eli lyhyesti 4CC (four-colour conjecture) löydettiin jo lähe 160 vuotta sitten ja aina siitä lähtien se on ollut eräs keskeisiä ratkaisuaan odottavia ongel mia matematiikassa. Tai oikeastaan nykyään voidaan puhua Karttojen neliväriteoreemast (4CT), koska ongelma todistettiin 1976 ja todistus tarkistettiin toisen ryhmän toimesta 1994 Nämä todistukset tehtiin kuitenkin tietokoneita apuna käyttäen eivätkä tyydytä kaikki ongelmasta kiinnostuneita koska lyhyt matemaattinen todistus, jota voitasiin hyödyntä muuallakin, puuttuu edelleen.

Millaisesta ongelmasta on kyse?

Monet ovat varmasti huomanneet karttakirjoja selaillessaan, että karttojen värityksessä or eri maiden erottamiseksi toisistaan käytetty menetelmää, jossa viereiset maat on väritetty eri värillä. Sensijaan maihin, jotka eivät ole naapureita voidaan käyttää samaa väriä. Koska värejä tarvitaan siis vähemmän kuin kartassa on valtioita niin on ymmärrettävää, että tar vittavien värien määrälle on olemassa jokin yläraja. Näin onkin ja kokemus on osoittanut kartantekijöille, että tuo yläraja on neljä. Karttoja on siis iät ajat väritetty neljällä värillä asian teoreettista puolta turhia pohtimatta. Miksi olisikaan sillä tehtävä vaikutti sangen yk- sinkertaiselta, suorastaan petollisen helpolta. Mutta se osoittautui sittemmin kaikkea muuta kuin helpoksi. Alla pienin neljä väriä vaativa tasokartta.



Ensimmäisenä ongelman kanssa joutui tekemisiin nuori englantilainen opiskelija, Francis Guthrie. Tämän mieleen juolahti vuonna 1852 kysymys: *"Olisiko mahdollista kaikesta huolimatta piirtää monimutkainen kartta, jonka värityksessä viidennen värin käyttöönotto olisi välttämätöntä?"*
Tähän vaarallisen yksinkertaiseen ja naiivilta vaikuttavaan kysymykseen suhtauduttiin aluksi alentuvasti. Viidettä väriä ei tarvita ja asian todistaminen olisi triviaali toimenpide. Tehtävä lojui näin puoliunohduksissa toistakymmentä vuotta kunnes löytyi matemaatikko, Alfred Cayley, jolla oli ylimääräistä aikaa yrittää tuota "triviaalia" todistusta. Työ osoittautui odotettua vaikeammaksi ja turhautunut Cayley päätti julkistaa ongelman vuonna 1878. Tämän jälkeen matemaatikko ja maallikko toisensa jälkeen yritti ratkaisua. Monet luulivat välillä onnistuneensakin, mutta aina löytyi jostain ammottava aukko, jonka takaa paljastui entistä laajempi ongelmakenttä. Yhä useampi yrittäjä tarttui samaan "nyt-minä-sen-keksin"-koukkuun ja tempoili loppuelämänsä (jotkut jopa 60 vuotta) ongelman parissa. Ratkaisu tuntui aina odottavan jo seuraavan oven takana. Tärkeä vuosi oli 1879, jolloin ilmestyi Arthur Kempen virheellinen todistus, jota pidettiin yleisesti oikeana peräti 11 vuotta! Todistuksen kaatoi Percy John Heawood 1890, jonka työstä lähemmin II luvussa. Kempen työ lienee matematiikan historian kuuluisin "väärä" todistus. Vuosi Kempen todistuksen jälkeen julkaisi myös Peter Guthrie Tait omaperäisiä ideoita sisältäneen todistuksen, mutta sen sisältämät vuotokohdat havaittiin jo samana vuonna.

Vihdoin vuonna 1976 tämä etupäässä verkkoteorian, algebrallisen topologian ja kombinatoriikan alueille sijoittuva ongelma sai "lopullisen" ratkaisunsa Illinoisin yliopiston tutkijoiden K. Appelin ja W. Hakenin toimesta. Todistus tehtiin poikkeuksellisella tavalla käyttäen hyväksi tietokoneita (IBM:n mallit 360-75, 370-158 ja 370-168). Pelkästään ratkaisujoukon tuottaminen vei ajoaikaa 1200 tuntia.

Todistustapa oli sekä mielenkiintoinen, että epätyydyttävä. Mielenkiintoinen syystä, että nyt oli löydetty esimerkkitapaus perustavaa laatua olevasta matemaattisesta ongelmasta, jolle ei ehkä olisikaan olemassa lyhyttä ratkaisua vaan todistus olisi mahdollinen ainoastaan tietokoneen avulla! Epätyydyttävä todistus taas oli syystä, että Appel ja Haken, käyttivät tietokoneita apunaan niin laajassa mitassa, ettei heidän mammuttimaista todistustaan voi käytännössä tarkistaa kuin tietokoneella. Näin itseasiassa on tehtykin, Appelin ja Hakenin todistuksen rinnalle ilmestyi vuonna 1994 toinen, Robertsonin, Sandersin, Seymourin ja Thomasin, tekemä tietokonetodistus, joka perustui pitkälti samoihin algoritmeihin. Vaikka se selkeyttikin eräitä osia Appelin ja Hakenin todistuksesta niin perusrakenteeltaan se on samanlainen. Ainoastaan tietokoneet ovat tulleet parissa vuosikymmenessä tehokkaammiksi.

Edellisestä seuraa , että todistusten yleinen hyöty jää vähäiseksi. Eli siis mahdollisuudet soveltaa todistusta muihin vastaaviin ongelmiin jäävät pieniksi. Näiden läheisesti tai kaukaisesti sivuavien ongelmien joukko puolestaan on huomattavan suuri, mikä paljastaa tämän viattoman näköisen ongelman perustavan luonteen. Tällä hetkellä tilanne on siis se, että lyhyt matemaattinen ratkaisu, joka avaisi monta muutakin vastaavanlaista Gordionin solmua on edelleen tekemättä. Toisaalta kyseessä saattaa olla tieteenfilosofisesti kiintoisa ongelma, johon ei todellisuudessa ole olemassakaan lyhyttä ratkaisua. Jos matemaattinen ratkaisu joskus löytyy niin se ilmeisesti perustuu tunnettuun Eulerin kaavaan, josta Kempe johti sen kaavan, jolle Appelin ja Hakenin todistus perustui. Eulerin kaava puolestaan ratkaisi aikoinaan jo muinaisia kreikkalaisia (ja tiettävästi myös egyptiläisiä) askarruttaneen Platonin kappaleiden ongelman, jota Eukleides piti 'Alkeidensa' merkittävimpänä osana. Eukleideen 'Alkeita' puolestaan voidaan pitää länsimaisen matematiikan perusteoksena. Kirja on sikäli läheinen myös Jyväskylän yliopistolle, että sen suomennoksen laittoi alkuun yliopiston isä, Volmar Schildt-Kilpinen. Nämä vanhat historialliset juuret paljastavat sen, että neliväriongelma onkin vain ilmentymä niistä perusrakenteista, joista maailmamme rakentuu. Tässä piileekin sen vaikeus ja kiehtovuus. Samalla käy ymmärrettäväksi miksi tämä päällisin puolin vähäpätöinen ongelma on toiminut generaattorina valtavalle määrälle tutkimuksia, jotka ovat tuottaneet vastauksia moniin ongelmiin. Paitsi siihen alkuperäiseen, neliväriongelmaan.

Eulerin kaava: $V-E+F=2-2g$

Kempen kaava: $\sum_{k=2}^{n}(6-k)p_k=12$

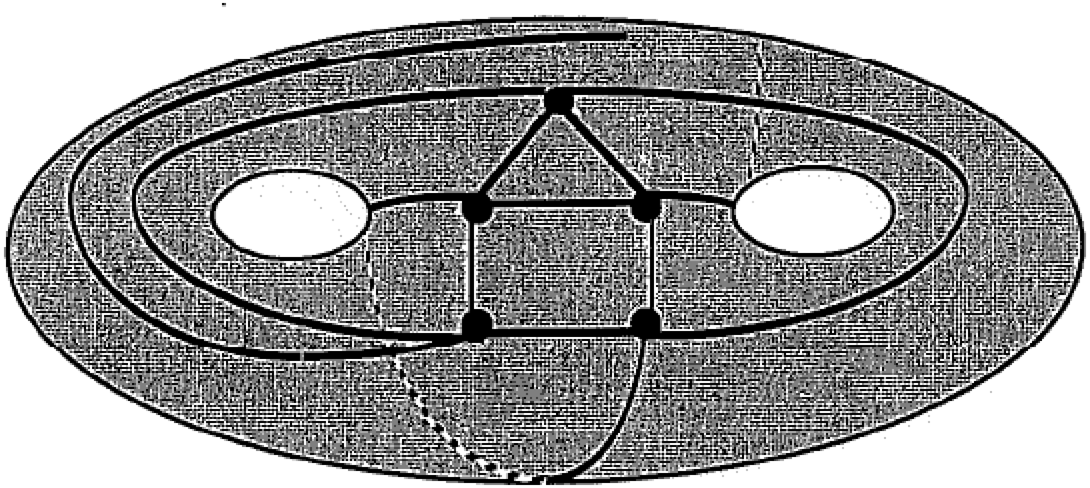
Kuva 2.

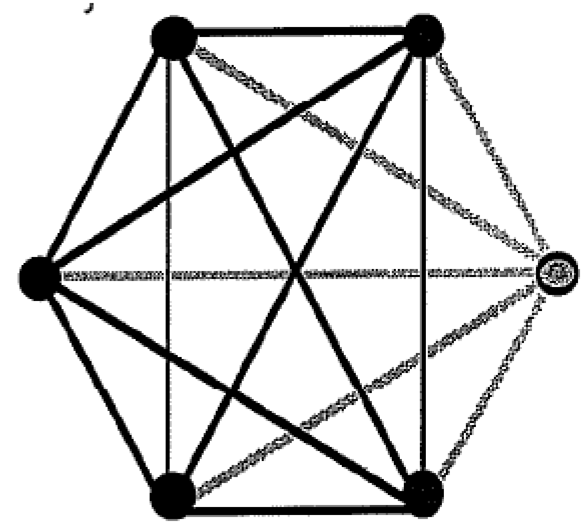
V	=	solmujen lukumäärä
E	=	välien lukumäärä
F	=	alueiden lukumäärä
g	=	suku, genus
p_k	=	k-asteisten alueiden tai solmujen lukumäärä k-asteinen = alue, jonka reunalla on k väliä tai solmu, johon liittyy k väliä (luuppi kasvattaa k:ta kahdella)

Heawoodin kartanväritysongelma

Heawoodin kartanväritysongelma ratkaistiin puolestaan lopullisesti vuonna 1968 kaikille muille pinnoille paitsi tavalliselle pallopinnalle. Siitä lähtien ongelmaa on kutsuttu kartanvärityslauseeksi. Ratkaisu pallopinnalla toisi ratkaisun myös neliväriongelmaan, jonka lopullinen, mutta matemaattiselta kannalta epätyydyttävä todistus tehtiin kahdeksan vuotta myöhemmin. Ongelman tausta on hyvä selvittää ennen siihen perehtymistä.

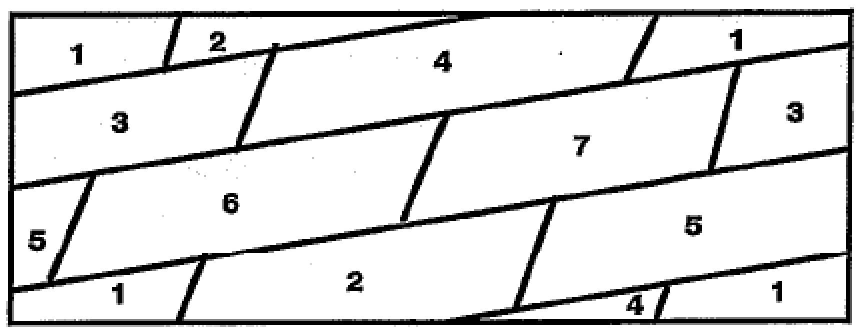
Täydellisten verkkojen genuksen määrittäminen oli pitkä ja työläs kamppailu. Duaalimuodossaan se tuli tunnetuksi Heawoodin kartanväritysongelmana, joka sai 1965 kunniapaikan Tietze'n kirjassa "Matematiikan Kuuluisia Ongelmia". Tämä erityisen värikkään taustan omaava ongelma säilyi todistamattomana vuodesta 1890 aina vuoteen 1968 eli kokonaisuudessaan 78 vuotta. Paradoksaalista on se, että karttojen neliväritysongelma ratkesi vasta 1976 saavuttaen näin 124 vuoden iän. Paradoksaalista asiassa on se, että neliväritysongelma sisältyy kartanväritysongelmaan sen osaongelmana sekä se, että toisaalta kartanväritysongelma syntyi juuri yrityksistä ratkaista neliväriongelma. Luodaan seuraavaksi lyhyt kertaus kartanväritysongelman taustoihin tavoitteena helpottaa seuraavien sivujen kaavojen asettamista niille kuuluville paikoille verkkoteorian alueella.





Kautta verkkoteorian kehityshistorian on ollut havaittavissa mielenkiintoinen ilmiö, kuinka pieni puu on kasvattanut itseään suuremman oksan ja tullut näin tavallaan osaksi omaa versoaan. Königsbergin kaupungin sunnuntaikävelijöiden hauskana pohdiskelun aiheena ja aivopähkinänä oli ongelma siitä, miten voisi ylittää jokainen kaupungin läpi virtaavan joen, Pregelin, 7:stä sillasta joutumatta kertaakaan kahdesti samalle sillalle (*). Ongelman ratkaisi 1736 Leonhard Euler, joka pani samalla matematiikassa alulle uuden vehreän oksan, verkkoteorian, kasvun. Verkkoteoria puolestaan antoi lähtöalustan topologialle, matematiikan osa-alueelle, joka nopeasti kasvoi laajemmaksi kuin itse verkkoteoria. Tosin verkkoteoria on sittemmin, erityisesti tietokoneiden aikakaudella, levinnyt matematiikan ulkopuolella monille muille tieteen alueille, joille topologia ei yllä. Yksi verkkoteorian ja koko matematiikan vaikeimpia pulmakohtia on siis ollut karttojen neliväriongelma, johon suhtauduttiin alussa vähätellen. Tuon enemmänkin koulupoikien aivopähkinäksi uskotun ongelman todellinen laajuus ja salakavala luonne paljastui vasta myöhemmin vähin erin. Sen ratkaisuyritykset johtivat, monien muiden ongelmien ja teorioiden ohella, tutkimaan verkkoja monimutkaisilla topologisilla pinnoilla. Percy John Heawood oli tällaisen tutkimuksen uranuurtaja ja hänen työnsä tuloksena syntyi mainittu kartanväritysongelma, jonka ratkaisu suoritettiin toisen hyvin samanlaisen ongelman ns. väliongelman kautta. Väliongelman, joka liittyy edellä mainittuun täydellisten verkkojen genuksen määritykseen, isä oli puolestaan Alfred Möbius tai, mikäli halutaan olla historian suhteen aivan tarkkoja, filologian professori Weiske. Heawoodin kartanväritysongelmaan liittyvä kaava oli puolestaan johdettu edelleen Eulerin kaavasta $v-e+f=2$, jonka löytymisen 1750 voidaan sanoa synnyttäneen topologian. Eulerin kaavan taustalta taas paljastuu ikivanha ja tunnettu kreikkalaisen matematiikan ongelma, Platonin kappaleet, joiden tutkimisen pohjimmaisina virikkeinä toimivat toivottomiksi tuomitut yritykset neliöidä ympyrä. Yritysten tunnetuin hedelmä oli π:n löytyminen, tapahtuma, joka päätti yhden ajanjakson antiikin ajattelussa. Se oli silloisen, rationaalilukuihin perustuvan, matematiikan lapsuuden loppu. Varsinaisen kartanväritysongelman ratkaisun kehitys on yhtä kuin väliongelman todistushistoria, jota selvitetään seuraavassa.

Kun Heawood vuonna 1890 osoitti virheelliseksi Kempen 11 vuotta aiemmin julkaiseman neliväriongelman ratkaisun niin samalla hän toi esille kartanvärityslauseensa. Kartanvärityslauseessa arvioi Heawood pintoja, jotka ovat olennaisesti erilaisia kuin pallopinta osoittaakseen, että karttojen neliväriongelma on todellisuudessa vain osa vielä monimutkaisempaa ongelmaa. Tällainen pinta on mm. torus eli rengaspinta, jolle piirretyn kartan Heawood osoitti tarvitsevan 7 väriä (ks. kuva 3).



Kuva 3. Torukselle piirretty 7-kromaattinen kartta

Kromaattisen luvun määrittämistä varten Heawood johti omaa nimeään kantavan ns. Heawoodin luvun $H(\gamma)$ ja todisti yleisesti epäyhtälön $\chi(S_\gamma) \leq H(\gamma)$, mutta yhtäsuuruuden vain mainitulle arvolle 7. Nyt oli puolestaan Heawoodin vuoro erehtyä luulemaan, että koko ongelma oli tällä todistettu. Jatkotodistamisen hän kuittasi totemalla vain lyhyesti: "yleisesti tarvittavia yhteyksiä (välejä) on enemmän kuin kylliksi". Todistus toruksen pinnalla ei kuitenkaan ollut suoraan yleistettävissä muille pinnoille ja ongelma alkoi isänsä, neliväriongelman, tavoin vaivihkaa laajeta. Tutkimus kohdistui tämän jälkeen Lothar Heffterin toimesta kartanvärityksen duaaliongelmaan ja yhtälöön $\gamma(K_V)=\{(v-3)(v-4)/12\}$, joka antaa täydellisen verkon K_V genuksen arvon ja liittyy edellä mainittuun väliongelmaan. Yhtälön todistus johtaa siis suoraan myös kartanvärityslauseen todistukseen. Monet henkilöt vaikuttivat osaltaan tämän tutkimuksen etenemiseen ja lopullinen todistus tapahtui tärkeimmiltä osiltaan Ringelin ja Youngsin toimesta. Todistuksen helpompi osa, epäyhtälön $\gamma(K_V) \geq \{(v-3)(v-4)/12\}$ oikeaksi osoittaminen, seuraa suoraan Heawoodin todistuksesta. Sen todistaminen, että epäyhtälön oikea puoli on samalla myös genuksen yläraja suoritettiin siten, että K_V upotettiin annetun genuksen määräämälle suunnatulle pinnalle, minkä jälkeen haettiin verkon suurin kromaattinen luku.

Kronologisesti todistus eteni seuraavassa järjestyksessä: Vuonna 1891 Heffter todisti yhtälön solmujen määrille 8 $\rightarrow$ 12 eli $v \leq 12$ ja omituisen näköiselle sarjalle v=19,31,55,67,139, 175,199,... Luvut muodostuvat siten, että $v=12s+7$ kun $q= 4s+3$ on alkuluku. Lisäksi on vielä asetettu ehto, joka poistaa näistä arvoista eräitä jakojäännösluokan mod q lukuja. Vieläkään ole selvitetty, onko k.o. lukujen luokka äärellinen vai ei (nykyään tämän selvittämisellä ei enää ole merkitystä itse päätodistuksen kannalta). Seuraavaa edistysaskelta saatiinkin odottaa sitten aina vuoteen 1952, jolloin Ringel todisti yhtälön kun $v=13$. Kehityksen tässä vaiheessa ymmärrettiin, että oli luonnollista yrittää ratkaisua yhdelle v modulo 12 jäännösluokalle samalla kertaa. Kirjoittamalla $v=12s+r$, Ringel todisti 1954 lauseen kaikille täydellisille verkoille K_v, joille $r=5$ eli $\forall\ v \equiv 5 \pmod{12}$. Vuonna 1961 (-1965) Ringel onnistui selvittämään jäännösluokat $v \equiv 7$, 10 ja 3(mod 12). Gustin esitteli 1963 uuden ns. *virtausverkkoihin* perustuvan menetelmän, joka yhdisti verkkoteorian, ryhmäteorian ja topologian. Hän ratkaisi omalla tahollaan itsenäisesti tapaukset $v \equiv 3$, 4 ja 7(mod 12) tietämättä, että Ringel oli jo todistanut näistä ensimmäisen ja viimeisen. Gustin ei kuitenkaan vienyt todistustaan aivan loppuun saakka ja hänen esittämästään kolmesta esimerkistä 3, 4 ja 7 (yksi jokaisesta tapauksesta) oli tapauksen 4 esimerkki lisäksi virheellinen. Terry, Welch ja Youngs ratkaisivat 1963 yhdessä luokan $v \equiv 0 \pmod{12}$. Vuosina 1963-65 Gustin ja Youngs todistivat $v \equiv 1 \pmod{12}$ ja $v \equiv 9 \pmod{12}$. Youngs ratkaisi 1966 tapauksen 6. Näin oli siis ennen vuoden 1966 loppuun mennessä ratkaistu jakojäännösluokat 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 ja 10. Seuraavana vuonna Ringel ja Youngs yhdistivät voimansa Kalifornian yliopistossa, Santa Cruzissa, ja ratkaisivat Richard Guyn avustaessa kolme jäljelle jäänyttä tapausta 2, 8 ja 11 vuoden loppuun mennessä mainitussa järjestyksessä. Joitakin todistusten osia paranneltiin vielä keväällä 1968.

Mutta todistushistoria ei päättynyt vielä tähän. Yleiset menetelmät eivät toimineet joillakin pienillä v:n arvoilla ja niinpä todistuksen ulkopuolelle jäivät erilliset tapaukset v= 18, 20, 23, 30, 35, 47 ja 59 (nämä eivät siis ole jakojäännösluokkia). Tilanteesta tietämättömänä Jean Mayer, ranskalaisen kirjallisuuden professori Montpellierin yliopistosta, todisti vuoden 1967 aikana yhtälön kaikille $v \leq 23$. Näin jäi jäljelle enää neljä erillistapausta. Helmikuussa 1968 Ringel ja Youngs pitivät luennon verkkoteoreetikkojen kokouksessa Michiganissa ja selostivat mitkä yksityiskohtaiset tapaukset vielä puuttuivat, esimerkkinä tapaus $v = 59$. Eräs kuulijoista, Richard Guy, työskenteli läpi yön selvittäen tapauksen seuraavaan aamuun mennessä.

Tämän jälkeen Ringel ja Youngs ratkaisivat tapaukset v= 35 ja 47. Viimeisen tapauksen, v=30, ratkaisi Mayer helmikuun lopulla ja hänen työstään tietämättä Youngs vielä erikseen saman vuoden maaliskuussa. Vaikka todistus näin olikin saatu päätökseen niin on huomattava, että todistamatta jäi vieläkin kuitenkin merkittävä tapaus $\gamma = 0$ ($v = 4$) eli neliväriongelma. Merkittävä seikka on myös, että todistus koski vain suunnistuvia pintoja. Suunnistumattomilla pinnoilla, joilla γ ei saa kokonaislukuarvoja ja joiden sukua (genusta) merkitään q:lla, todistus kulki aivan omia latujaan. Yksinkertaisimman tapauksen ja parhaiten tunnetun suunnistumattoman pinnan, ns. Möbiuksen nauhan, joka samalla on myös yksipuolinen, eli unilateraali, pinta jolle q=1, selvitti Tietze jo 1910. Hänen ratkaisunsa, $\chi(M_1)=6$, merkitsi sitä, että Möbiuspinnalle piirretty kartta vaatii enimmillään kuusi väriä. Vuonna 1934 Franklin ratkaisi tapauksen q=2, jolloin $\chi(M_2)=6$ eli värimäärä oli sama kuin tavallisella Möbiuksella. Kagno selvitti 1935 tapaukset q=3, 4 ja 6, Bose 1939 tapauksen q=7 ja Coxeter vielä 1943 väliin jääneen tapauksen q=5.
Yleisen ratkaisun esitti Ringel vuonna 1954 ja 1967 ilmestyi vielä huomattavasti Ringelin todistusta lyhyempi versio 1967, tekijänä oli Youngs.

Neliväriongelmaa yritettiin ratkaista näiden samojen vuosien aikana myös kehittämällä jatkuvasti suurempia nelivärittyviä karttoja. Kun Birkhoff aloitti tämän kehityssuunnan vuonna 1913 kartalle, jossa oli 21 maata, niin Heawoodin ongelman ratkeamisvuonna 1968 oltiin päästy jo 40 maahan. Tulosta parantelivat vuorollaan ja vuorotellen Franklin, Reynolds, Winn ja Ore. Vielä vuonna 1975 Stromquist ehti vielä julkaista 52 maata käsittävän kartan ennenkuin seuraavana vuonna Appel ja Haken onnistuivat tuottamaan tietokoneella 1482 karttavariaatiotaan. Näin oli myös ratkaistu tapaus $\chi(S_0) = 4$.

Lyhyesti sanottuna Appelin ja Hakenin todistus perustui Heeschin 50-luvulla kehittämiin algoritmeihin, joiden pohjana oli Kempen epäonnistuneessa todistuksessaan esittelemä kaava. Kempen todistuksen kaatoi aikanaan Heawood, joka yrittäessään kehittää parempaa todistusta saikin aikaiseksi kartanväritysongelman, jonka täydellisen ja lopullisen (ehkä) todistuksen mahdollisti vasta Kempen luoman kaavan uudelleen käyttöönotto. Ympyrä oli sulkeutunut. Alla on tiivistelmä todistuksen kulusta. Todistushistoriaa havainnollistava kaavio löytyy seuraavalta sivulta.

K_7	Heawood, 1890
K_v, kun $v \leq 12$	Heffter, 1891 (sekä v=19,31,55,...)
K_{13}	Ringel, 1952
K_v, kun $v \equiv 5 \bmod 12$	Ringel, 1954
K_v, kun $v \equiv 3, 7$ t. $10 \bmod 12$	Ringel, 1961
K_v, kun $v \equiv 4 \bmod 12$	Gustin, 1963
K_v, kun $v \equiv 0 \bmod 12$	Youngs, Terry ja Welch, 1963
K_v, kun $v \equiv 1$ t. $9 \bmod 12$	Youngs ja Gustin, 1965
K_v, kun $v \int 6 \bmod 12$	Youngs, 1966
K_v, kun $v \equiv 2, 8$ t. $11 \bmod 12$	Ringel ja Youngs, 1967
K_v, kun $v \leq 23$	Mayer, 1967
K_{59}	Guy, 1968
K_{35} ja K_{47}	Ringel ja Youngs, 1968
K_{30}	Mayer, 1968

K_v, kun v= r mod 12 eli v=12s+r

Heawood 1890

Neliväriongelma

Heffter 1891 (sekä joukko: 19,31,55,67,139,...)

Mayer 1967: 18, 20 ja 23

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	13	14	15	16	17	**18**	19*	**20**	21	22	**23**	24
2	25	26	27	28	29	**30**	31*	32	33	34	**35**	36
3	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	**47**	48
4	49	50	51	52	53	54	55*	56	57	58	**59**	60
5	61	62	63	64	65	66	67*	68	69	70	71	72
6	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
7	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
8	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
9	109	110	111	112	113	114	115	116	117	...	...	...
	Youngs & co	Ringel & Youn gs	Ringel	Gustin	Ringel	Youngs	Ringel	Ringel & Youn gs	Youngs & co	Ringel	Ringel & Youn gs	Youngs & co

Ringel

Ringel & Youngs 35 ja 47

Guy

Todistuksen viimeinen osa (v=30): Mayer helmikuussa 1968

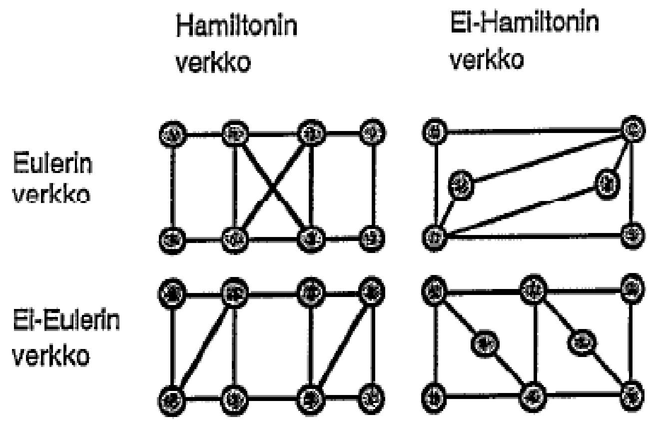
Mitä seuraavaksi?

Appelin ja Hakenin todistuksen aiheuttamasta lamaannuksesta selviäminen kesti aikansa, lähes sukupolvi myöhemmin saatiin siis edellä mainittu Robertson, Sanders, Seymour ja Thomas - tutkimusryhmän tekemä "parannus", parannus lainausmerkeissä siksi, että ajallinen säästö johtui etupäässä parantuneista tietokoneista. Toki konfiguraatioiden (633) määräkin oli tuntuvasti pienempi mitä se ei ole olennaista ja johtuu pitkälti vain laskumetodeista. Lyhyt matemaattinen todistus odottaa siis edelleen löytäjäänsä, jos sellaista ylipäätään onkaan.

Ja mikäli 4CC jonain päivänä on ratkaistu odottaa nurkan takana jo Maa-Mars (Maa-Kuu) kartanväritysongelma (jokaisella maan valtiolla on Marsissa siirtomaa, joka on saman värinen) ja vastaavat yleistykset, esim. Maa-Mars-Venus-Etc....

Aika ei tule käymään pitkäksi...

* *Hamiltonin silmukka* on suljettu polku, joka kulkee verkon kaikkien solmujen kautta siten, että kussakin solmussa käydään vain kerran. Hamiltonin silmukka on siis verkon kaikki solmut käsittävä suljettu polku eli useimmissa tapauksissa verkon kaikkien solmujen kautta kulkeva kehä. Tunnettu *kauppamatkustajan ongelma* (-> aiheesta erillinen luku) on tyypillinen esimerkki tehtävästä, jossa haetaan Hamiltonin silmukkaa. *Hamiltonin verkko* on verkko, joka sisältää Hamiltonin silmukan eli siis verkko, joka sisältää virittävän kehän (kuva 15).



Kuva 15. Hamiltonin ja Eulerin verkkoja