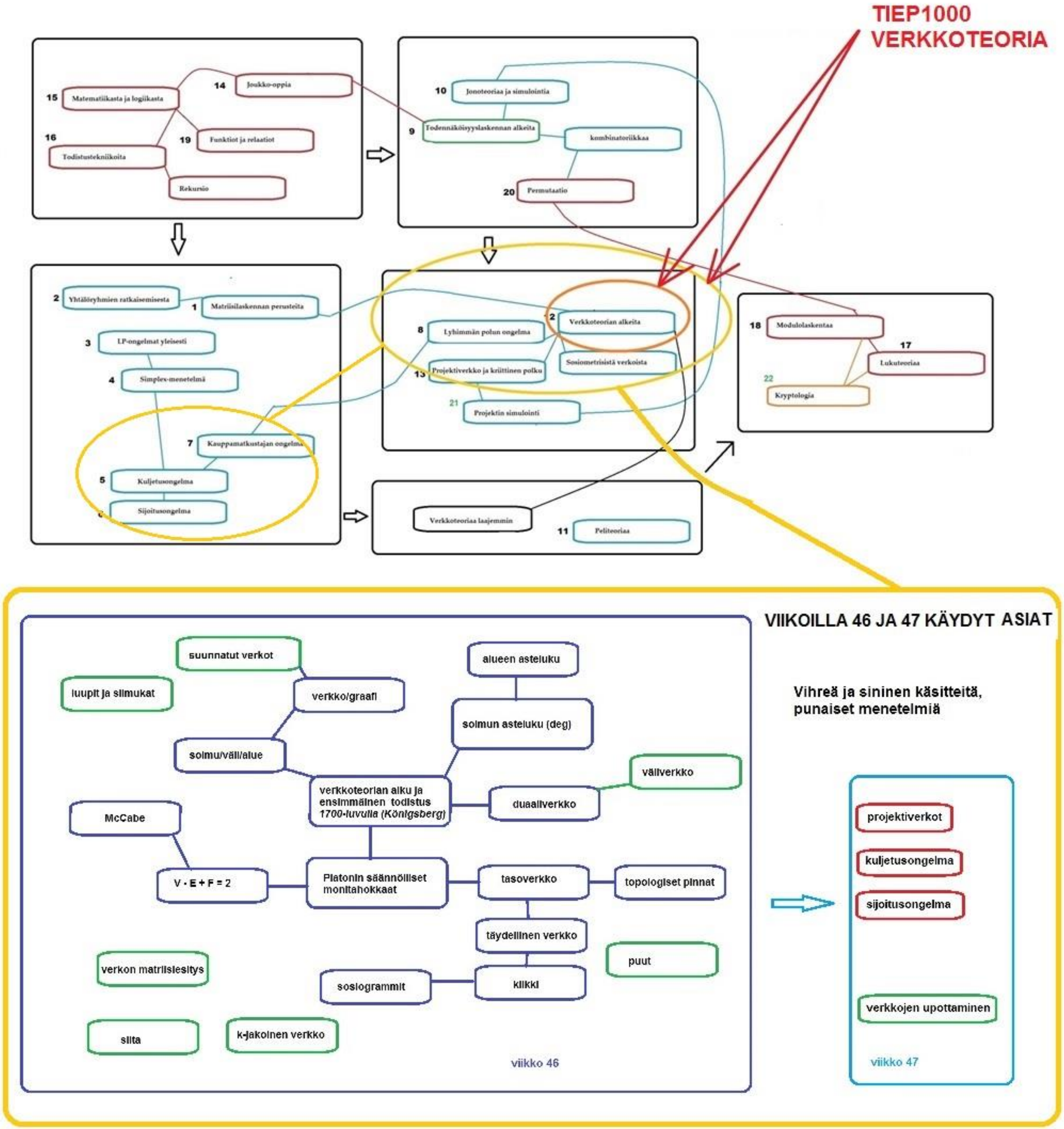
Johdatus verkkoteoriaan
4. luento
28.11.17


TIEP1000
VERKKOTEORIA
15 Matematiikasta ja logiikasta
14 Joukko-oppia
16 Todistustekniikoita
19 Funktiot ja relaatiot
Rekursio
10 Jonoteoriaa ja simulointia
9 Todennäköisyyslaskennan alkeita
kombinatoriikkaa
20 Permutaatio
2 Yhtälöryhmien ratkaisemisesta
1 Matriisilaskennan perusteita
3 LP-ongelmat yleisesti
4 Simplex-menetelmä
7 Kauppamatkustajan ongelma
5 Kuljetusongelma
Sijoitusongelma
8 Lyhimmän polun ongelma
12 Verkkoteorian alkeita
Sosiometrisistä verkoista
13 Projektiverkko ja kriittinen polku
21 Projektin simulointi
18 Modulolaskentaa
17 Lukuteoriaa
22 Kryptologia
Verkkoteoriaa laajemmin
11 Peliteoriaa
VIIKOILLA 46 JA 47 KÄYDYT ASIAT
suunnatut verkot
luupit ja silmukat
verkko/graafi
alueen asteluku
solmun asteluku (deg)
solmu/väli/alue
välverkko
verkkoteorian alku ja ensimmäinen todistus 1700-luvulla (Königsberg)
duaaliverkko
McCabe
V - E + F = 2
Platonin säännölliset monitahokkaat
tasoverkko
topologiset pinnat
täydellinen verkko
puut
verkon matriisiesitys
sosiogrammit
klikki
silta
k-jakoinen verkko
viikko 46
Vihreä ja sininen käsitteitä, punaiset menetelmiä
projektiverkot
kuljetusongelma
sijoitusongelma
verkkojen upottaminen
viikko 47

Viikolla 46 läpikäydyt käsitteet

Viikolla 47 läpikäydyt käsitteet

Verkko eli graafi, tasoverkko, solmut, välit, alueet, suunnatut verkot, isomorfiset verkot, verkon duaali, verkon upottaminen, verkon genus, verkon komplementti, aliverkko, täydellinen verkko, solmun ja alueen asteluku, väliverkko, säännöllinen verkko, Eulerin ja Hamiltonin verkot, kauppamatkustajan ongelma, verkon kromaattinen luku, kaksijakoinen verkko, erilaiset polut ja silmukat, verkon yhtenäisyys, puurakenteet, projektiverkko ja sen kriittinen polku …

Wikivertailua
(verkkoteoria)

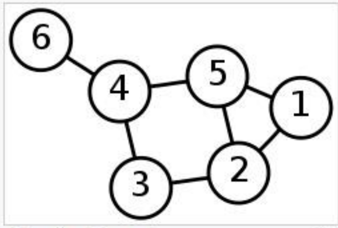
Contents [hide]

Sisällysluettelo [piilota]

Verkkoteoria eli **graafiteoria** on matematiikan osa-alue, joka tutkii kohteiden välisten suhteiden esittämiseen käytettäviä matemaattisia malleja eli verkkoja[1]. Verkkoja voidaan käyttää erilaisten suhteiden ja prosessien mallintamiseen niin fysikaalisissa[2], biologisissa[3], sosiaalisissa[4][5] kuin tietoteknisissäkin[6] systeemeissä. Verkkoteoriaa voidaankin soveltaa monilla eri tieteenaloilla[7].

Suomessa tästä matematiikan haarasta käytetään yliopistosta riippuen kahta eri nimitystä eli verkko- tai graafiteoria[kenen mukaan?]. Myös käsitteiden nimikirjo poikkeaa opetuspaikan mukaan. Samoin verkkoteoriasta on erotettava omana alueenaan vielä verkostojen teoria. Pohjimmiltaan verkko on verkkoteorian määrittämä solmujen eli pisteiden ja niitä yhdistävien välien eli kaarien kokonaisuus. Topologisessa verkkoteoriassa myös välien erottamat alueet huomioidaan. *Verkko* kuvaa verkkomaisen rakenteen riippumatta sen sisällöstä ja tulkinnasta ja esittää, mitä reittejä verkossa eri pisteiden välillä on. Verkkoja on myös lähes kaikkialla luonnossa ja ihmisen toiminnassa. Verkkoteoria on täten osa olemassaolon yleisempää ymmärtämistä.

In mathematics, **graph theory** is the study of *graphs*, which are mathematical structures used to model pairwise relations between objects. A graph in this context is made up of *vertices*, *nodes*, or *points* which are connected by *edges*, *arcs*, or *lines*. A graph may be *undirected*, meaning that there is no distinction between the two vertices associated with each edge, or its edges may be *directed* from one vertex to another; see Graph (discrete mathematics) for more detailed definitions and for other variations in the types of graph that are commonly considered. Graphs are one of the prime objects of study in discrete mathematics.



A drawing of a graph

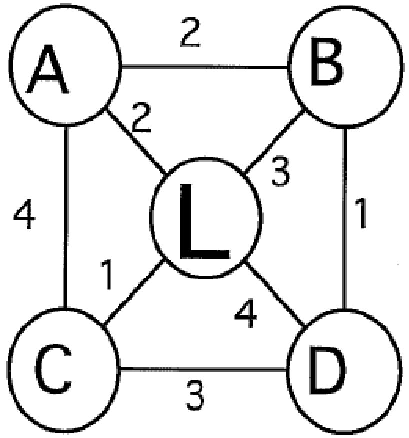
Back

Netspace

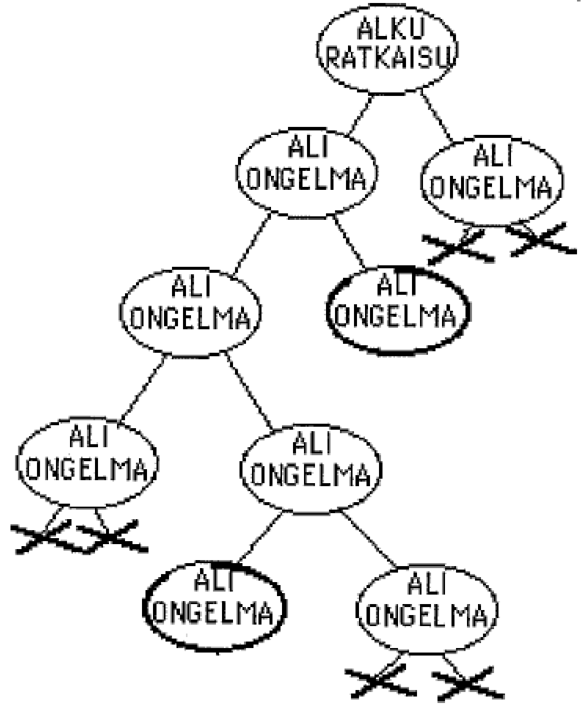
Kauppamatkustajan ongelma

Sijoitusongelma oli kuljetusongelman rajatapaus (joka oli tavallisen LP-ongelman rajatapaus) niin kauppamatkustajan ongelmaa voidaan puolestaan pitää sijoitteluongelman erikoismuotona. Tehtävänä on yksinkertaisesti hakea lyhin reitti joka kiertää verkon kaikkien solmujen kautta palaten lopuksi takaisin lähtösolmuun. Kyseessä voi olla esimerkiksi joukko firmoja, joista jokaisessa kauppamatkustajan on käytävä kertaalleen. Kauppamatkustajan ongelma on eräs matematiikan perinteellisiä "suuria ongelmia", jonka ratkaisemiseksi on kehitetty lukuisa määrä erilaisia algoritmeja. Ja säännöllisin väliajoin joku aina "keksii" sen parhaan menetelmän. Tyypillisesti mm. tätä ongelmaa ratkaistaan *branch-and-bound* menetelmää käyttäen. Branch-and-bound ("haaroitu ja rajoita") soveltuu monien muidenkin kokonaislukuoptimointitehtävien ratkaisuun (esim. *knapsack problem*) Ajatuksena on ajatella tehtävää ensin sijoitusongelmana, jolle haetaan ratkaisu (esim. unkarilaista menetelmää käyttäen). Ratkaisu ei kuitenkaan ole yleensä käypä (esimerkiksi koostuu useasta irrallisesta reitistä), jolloin jaetaan ongelma alitehtäviin poistamalla saadusta ratkaisusta kussakin alitehtävässä yksi alkio. Kukin alitehtävistä ratkaistaan jälleen sijoitusongelmana kunnes jossain haarassa saadaan käypä ratkaisu, minkä jälkeen muita haaroja jatketaan niin kauan kuin on mahdollista saavuttaa vielä parempi tulos.

•Käsin tehtäviä ratkaisuja varten on kehitetty menetelmän sovellus, joka eliminoi ratkaisuun johtamattomat sivuhaarat jo menetelmän kuluessa. On huomattava, että lopullinen ratkaisu on aina arvoltaan suurempi tai yhtäsuuri kuin ensimmäinen sijoitusmenetelmällä haettu ratkaisu. Kauppamatkustajan ongelma LP-ongelmaksi muotoiltuna on muutoin aivan samanlainen kuin edellä esitetty sijoitusongelma, mutta lisäksi sen on sisällettävä ns. *rengasehto* eli alkioista on muodostuttava verkossa yksi yhtenäinen rengas.



	L	A	B	C	D	Min
L	M	2	3	1	4	1
A	2	M	2	4	M	2
B	3	2	M	M	1	1
C	1	4	M	M	3	1
D	4	M	1	3	M	1



Vähennetään riviminimit ja sarakeminimit. Lasketaan kullekin riville ja sarakkeelle sakko, joka on toiseksi pienimmän alkion (pienin on aina 0) arvo. Kullekin 0-alkiolle annetaan sakko (yläindeksi), joka on Max {rivisakko, sarakesakko}. Suurimman sakon saanut alkio otetaan kantaan (tässä xCL) ja samalla poistetaan matriisista vastaava rivi ja sarake. Käänteisalkio (xLC) eliminoidaan antamalla sille arvoksi M. Näin estetään mahdollisuus palata samaa reittiä takaisin. Samalla tavalla estetään myös pidempien silmukoiden muodostuminen, siis antamalla M sellaisten välien arvoiksi, joita pitkin voitaisiin palata syntyvälle reitille takaisin “liian aikaisin”.

	L	A	B	C	D
L	M	1	2	0	3
A	0	M	0	2	M
B	2	1	M	M	0
C	0	3	M	M	2
D	3	M	0	2	M
Min:	0	1	0	0	0

M

	L	A	B	C	D	Sakko
L	M	0^0	2	0^2	3	0
A	0^0	M	0^0	2	M	0
B	2	0^0	M	M	0^2	0
C	$\boxed{0^2}$	2	M	M	2	2
D	3	M	0^2	2	M	2
Sakko:	0	0	0	2	2	$X_{CL} = 1$

Sarakkeelle C ei jäänyt yhtään nollaa, joten vähennetään sarakeminimi (2) ja jatketaan pienentyneessä matriisissa kuten edellä. Näin jatketaan lisää välejä kantaan ottaen kunnes matriisi on supistunut ollen kokoa 2x2. Otetaan kantaan viimeiset kaksi väliä ja saadaan kauppamatkustajalle reitti, joka on esitetty kuvassa alla. Reitin pituus on 9 ja se voidaan luonnollisesti kiertää kumpaankin suuntaan.

C
M
2
M
2

Min=2

=>

C
M
0
M
0

=>

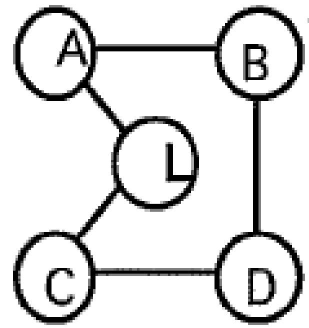
	A	B	C	D	Sakko
L	0^2	2	M	3	2
A	M	0^0	0^0	M	0
B	0^0	M	M	$\boxed{0^3}$	0
D	M	0^0	0^0	M	0
Sakko:	0	0	0	3	$X_{BD} = 1$

M

	A	B	C	Sakko
L	$\boxed{0^M}$	2	M	2
A	M	0^M	0^0	0
D	M	M	0^M	M
Sakko:	M	M	0	$X_{LA} = 1$

	B	C	Sakko
A	0^M	0^0	0
D	M	0^M	M
Sakko:	M	0	

$$X_{AB} = 1$$
$$X_{DC} = 1$$



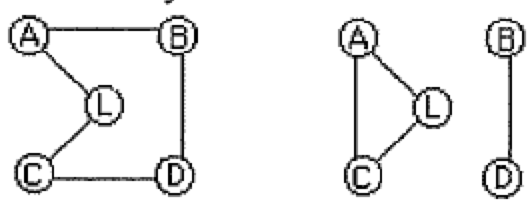
Jos samaa tehtävää lähdetään ratkaisemaan sijoitusongelmana niin saadaan neljä kantaratkaisua, joista kaksi on matriisin symmetrisyyden vuoksi samoja. Kummankin jäljelle jäävän ratkaisun arvo on 9, mutta toinen ei ole käypä ratkaisu koska reitti ei ole yhtenäinen (oikeanpuoleinen kuva alla). Branch-and-bound menetelmässä ratkaistaisiin seuraavaksi oikeanpuoleista verkkoa vastaava matriisi kolmena eri sijoitusongelmana, joista kussakin on yksi kolmion ACL väleistä eliminoitu antamalla sille matriisissa arvo M. Näin saaduista ratkaisuista jatkuu haarautuminen edelleen alitehtäviin kunnes on saatu rengasehdon täyttävä verkko tai kun ratkaisun (ei välttämättä käypä) arvo on suurempi kuin parhaan jo saadun käyvän ratkaisun. Tässä nimenomaisessa tapauksessa prosessi pysähtyy heti alussa sillä vasemmanpuoleinen verkko on ratkaisuna käypä ja sen arvo on jo vähintään yhtä hyvä kuin mikä menetelmää jatkamalla voitaisiin saavuttaa.

	L	A	B	C	D
L	M	0	2	0	3
A	0	M	0	2	M
B	2	0	M	M	0
C	0	2	M	M	2
D	3	M	0	2	M

	L	A	B	C	D
L	M	0	2	0	3
A	0	M	0	2	M
B	2	0	M	M	0
C	0	2	M	M	2
D	3	M	0	2	M

	L	A	B	C	D
L	M	0	3	0	3
A	0	M	0	0	M
B	3	0	M	M	0
C	0	0	M	M	0
D	3	M	0	0	M

Viivoja on 4 < 5 => väh/lis L=2

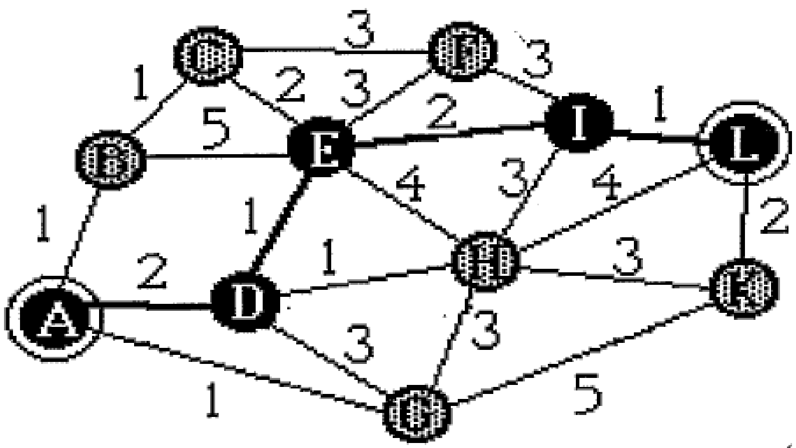


Lyhimmän polun ongelma

Kauppamatkustajan ongelmassa oli tavoitteena löytää verkossa lyhin sellainen polku, joka käy verkon jokaisessa solmussa ainakin kerran ja palaa sitten lähtösolmuun. Tällainen suljettu polku muodostaa siis verkossa silmukan.
Lyhimmän polun ongelmassa ei palata takaisin lähtöpisteeseen vaan tavoitteena on löytää lyhin polku kahden eri solmun välillä. Toinen ero kauppamatkustajan ongelmaan on se että verkon kaikissa solmuissa ei ole tarpeen käydä.

Eräs paljon käytetty tapa hakea verkosta lyhin polku on käyttää **Dijkstran algoritmia**. Ratkaistaan lyhin polku yllä olevasta verkosta käyttäen Dijkstran algoritmin avulla.

Aloitetaan solmusta A merkitsemällä sille pysyvä tunnus (alleviivattu luku), joka on 0. Etäisyysmatriisista katsotaan matka naapurisolmuihin. Vaihtuvista tunnuksista valitaan pienin pysyväksi ja katsotaan jälleen matka etäisyysmatriisista. Jos summa pysyvän tunnuksen arvo ja matka on pienempi kuin vastaavalla solmulla aiemmin ollut vaihtuva tunnus niin summa sijoitetaan vaihtuvaksi tunnukseksi. Valitaan jälleen pienin pysyväksi tunnukseksi ja jatketaan näin loppuun saakka. Täten saadaan lyhimmän polun pituus. Mitä kautta lyhin polku kulkee selviää takaperin laskemalla. Verrataan ensin loppusolmun etäisyyksiä vastaavien pysyvien tunnuksien erotuksiin. Jos ne ovat samat niin solmu kuuluu lyhinpään polkuun. Esimerkiksi loppusolmun L etäisyydet naapurisolmujen joukkoon {H,I,K} ovat {4,1,2} ja vastaavat pysyvien tunnusten erotukset ovat 6-{3,5,6}= {3,1,0}. Vertaamalla joukkoja nähdään että erotus = etäisyys solmun I kohdalla (=1). Tästä seuraa että solmu I kuuluu lyhinpään polkuun. Seuraavaksi tarkastellaan aivan samoin I:n naapurisolmuja ja näin jatketaan solmu solmulta takaisin alkuun. On syytä muistaa että lyhyimpiä polkuja voi olla myös useampia.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
A	∞	1	∞	2	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
B	1	∞	1	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
C	∞	1	∞	∞	2	3	∞	∞	∞	∞	∞
D	2	∞	∞	∞	1	∞	3	1	∞	∞	∞
E	∞	5	2	1	∞	3	∞	4	2	∞	∞
F	∞	∞	3	∞	3	∞	∞	∞	3	∞	∞
G	1	∞	∞	3	∞	∞	∞	3	∞	5	∞
H	∞	∞	∞	1	4	∞	3	∞	3	3	4
I	∞	∞	∞	∞	2	3	∞	3	∞	∞	1
K	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5	3	∞	∞	2
L	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4	1	2	∞

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
$\underline{0}$	1	∞	2	∞	∞	1	∞	∞	∞	∞
	$\underline{1}$	2	2	6	∞	1	∞	∞	∞	∞
		2	2	6	∞	$\underline{1}$	4	∞	6	∞
		2	$\underline{2}$	3	∞		3	∞	6	∞
		$\underline{2}$		3	5		3	∞	6	∞
				3	5		$\underline{3}$	6	6	7
				$\underline{3}$	5			5	6	7
					$\underline{5}$			5	6	7
								$\underline{5}$	6	6
									$\underline{6}$	6
										$\underline{6}$