1.) a) Osoita totuustaululla, että $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
T	T	T	E	T	T
T	E	E	E	E	T
E	T	T	T	T	T
E	E	T	T	T	T

=> Tautologia

b) Osoita totuustaululla, että $(A \wedge B) \vee C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	E	T	T	T	T	T
T	E	T	E	T	T	T	T
T	E	E	E	E	E	E	T
E	T	T	E	T	T	E	E
E	T	E	E	E	T	E	T
E	E	T	E	T	T	E	E
E	E	E	E	E	E	E	T

=> Ei tautologia

2. a) $syt(130208, 1402)$:

$$130208 = 92 \cdot 1402 + 1224$$
$$1402 = 1 \cdot 1224 + 178$$
$$1224 = 6 \cdot 178 + 156$$
$$178 = 1 \cdot 156 + 22$$
$$156 = 7 \cdot 22 + \underline{\underline{2}} \quad \Rightarrow \quad syt(130208, 1402) = 2$$
$$22 = 11 \cdot 2 + 0$$

b) Etsitään muotoa $d = am + bn$, missä $d = 2$, $m = 130208$ ja $n = 1402$

1° $2 = 156 - 7 \cdot 22$

2° $2 = 156 - 7 \cdot (178 - 156) = 8 \cdot 156 - 7 \cdot 178$

3° $2 = 8 \cdot (1224 - 6 \cdot 178) - 7 \cdot 178 = 8 \cdot 1224 - 55 \cdot 178$

4° $2 = 8 \cdot 1224 - 55 \cdot (1402 - 1224) = 63 \cdot 1224 - 55 \cdot 1402$

5° $2 = 63 \cdot (130208 - 92 \cdot 1402) - 55 \cdot 1402 = \underline{63} \cdot 130208 - \underline{\underline{5851}} \cdot 1402$

$\Rightarrow$ $a = 63$ ja $b = -5851$

c) $pyj(130208, 1402) = \dfrac{130208 \cdot 1402}{syt(130208, 1402)} = \dfrac{130208 \cdot 1402}{2} = 91\,275\,808$

3) $\mathbb{Z}_{15}$: Kääntyvät alkiot:

$syt(2,15)=1 \Rightarrow syt(13,15)=1$

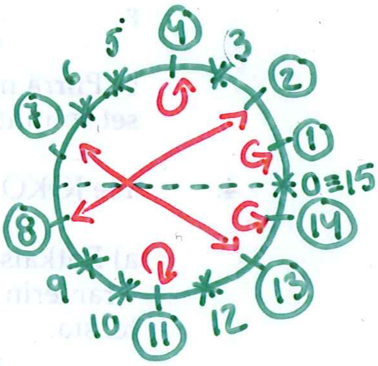
$syt(3,15)=3\neq 1 \Rightarrow$ mikään kolmella jaollinen ei ole kääntyvä

$syt(4,15)=1 \Rightarrow syt(11,15)=1$

$syt(5,15)=5\neq 1 \Rightarrow$ mikään viidellä jaollinen ei ole kääntyvä

$syt(7,15)=1 \Rightarrow syt(8,15)=1$

$\Rightarrow$ Kääntyvät alkiot: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 ja 14.



Kääntéisalkioparit:

$2\cdot 8=16\equiv 1 \pmod{15}$

$4\cdot 4=16\equiv 1 \pmod{15}$

$7\cdot 13=91\equiv 1 \pmod{15}$

$11\cdot 11=121\equiv 1 \pmod{15}$

$\Rightarrow$ Kääntéisalkioparit ovat: (1,1) (2,8) (4,4) (7,13) (11,11) ja (14,14

$2x\equiv 5 \pmod{15}$

Yhtälön $ax\equiv b \pmod{15} \Leftrightarrow x\equiv a^{-1}b \pmod{n}$ avulla, missä $a=2$, $b=5$, $n=15$, $a^{-1}=8$ (kakkosen käänteisalkio on 8), joten

$x\equiv 8\cdot 5=40\equiv 10 \pmod{15}$

$\Rightarrow$ $x=10$.

4.) Todista induktiolla: $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

Alkuaskel: $n = 1$: vp: $1\cdot 3 = 3$

op: $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 9}{6} = \frac{18}{6} = 3$ OK

Induktio-oletus: Väite pätee kun $n = k$:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \dots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

Induktioväite: Väite pätee kun $n = k+1$:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

HUOM:

$$\left[(k+1)(k+2)(2k+9) = (k^2+3k+2)(2k+9) = 2k^3 + 15k^2 + 31k + 18\right]$$

Todistus: $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3)$

$$\overset{\text{ol.}}{=} \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + \frac{6(k+1)(k}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+7) + 6(k+1)(k+3)}{6}$$

$$= \frac{k(2k^2+9k+7) + 6(k^2+4k+3)}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 7k + 6k^2 + 24k + 18}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 15k^2 + 31k + 18}{6} \overset{\text{HUOM}}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

$\square$