Metrisoituvuuden yleistämisestä

Joonas Ilmavirta

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2011

Sisältö

1. Johdanto 1
2. Järjestys ja metriikka 2
2.1. Järjestys 2
2.2. Ordinaaleista ja kardinaaleista 2
2.3. Metriikka 3
3. Metristen avaruuksien ominaisuuksia 4
3.1. Perusominaisuuksia topologisena avaruutena 4
3.2. Jonot ja kompaktisuus 8
3.3. Erilaisten metrisoituvuuksien vertailua 9
3.4. Jatkuvat kuvaukset 14
4. Metrisoituvuus 15
Viitteet 17

1. Johdanto

Minua on kummastuttanut se, että topologisista avaruuksista keskeiseksi erikoistapaukseksi nousevat metriset avaruudet. Kummalliselta tämä on vaikuttanut siksi, että metristen avaruuksien rakenne perustuu suurilta osin reaalilukujoukon rakenteeseen, kun taas topologiset avaruudet näyttävät määritelmänsä puolesta olevan täysin riippumattomia tästä rakenteesta. Siksi mieleeni johtui yrittää yleistää metriikan käsitettä korvaamalla metrisen avaruuden reaaliarvoinen etäisyys toisenlaisella etäisyydellä, joka toteuttaa joitakin etäisyydeltä luonnollisesti vaadittavia ominaisuuksia, kuten mahdollisuus vertailla ja laskea yhteen etäisyyksiä sekä näihin ominaisuuksiin liittyvä kolmioepäyhtälö.

Määrittelemällä sopivalla tavalla metriikan uudelleen onnistuin yleistämään monia metrisistä avaruuksista tuttuja tuloksia koskien topologian rakennetta, jatkuvia kuvauksia sekä topologisten avaruuksien metrisoituvuutta. Tietooni ei ole tullut, että tällaista teoriaa olisi kehitetty aiemmin, vaikka pidänkin todennäköisenä, etten ole ensimmäinen, jolle ajatus tällaisesta teoriasta on tullut mieleen. En ole myöskään keksinyt teorialle minkäänlaista sovellusta niin sovellusalojen kuin matematiikankaan sisältä.

Tavallisessa analyysissä numeroituvasti äärettömillä joukoilla on erityinen asema: metrisen avaruuden pisteillä on numeroituva ympäristökanta, jonossa on numeroituva määrä alkioita, kompaktin joukon jokaisella avoimella peitteellä on numeroituvaa pienempi (eli äärellinen) osapeite ja niin edelleen. Tämän numeroituvan äärettömyyden tilalle voidaan asettaa jokin suurempikin "äärettömyys" (suurempi kardinaali) ilman että teorian rakenne kovinkaan paljoa muuttuu. Keskeiseksi työkaluksi tällaisen teorian rakentamisessa osoittautuvat ordinaaliluvut, ja niiden tarvittavat ominaisuudet kuvaillaan lyhyesti ennen kuin metriikan yleistystä aletaan varsinaisesti käsitellä.

Tämä työ rajoittuu muutamien metristen avaruuksien keskeisiksi katsomieni ominaisuuksien yleistämiseen. Yleistettyjen metristen avaruuksien teoriaa voisi kehittää vielä enemmänkin ja kenties yrittää samankaltaista yleistystä johonkin muuhunkin reaalilukujen rakenteeseen perustuvaan teoriaan, vaikkei se tämän opinnäytetyön puitteissa mahdollista olekaan.

2. Järjestys ja metriikka

2.1. Järjestys.

MÄÄRITELMÄ 1. Joukon A järjestys $\leq$ on *täydellinen*, jos kaikilla $a, b \in A$ on $a \leq b$ tai $b \leq a$, ja jos molempien epäyhtälöiden ollessa voimassa on $a = b$.

Joukon A järjestys $\leq$ on *hyvä*, jos se on täydellinen ja jokaisella osajoukolla on pienin alkio.

MÄÄRITELMÄ 2. Kun joukolla A on täydellinen järjestys ja joukolla B hyvä järjestys, tehdään joukosta A^B täydellisesti järjestetty seuraavasti. Määritellään kahden eri alkion (eli joukolla B indeksoidun jonon) $x = (x_b)$ ja $y = (y_b)$ pienin eroava indeksi

$$n_{x-y} = \min\{b \in B : x_b \neq y_b\}.$$

Jos A on abelin ryhmä (tämä tulee olemaan jatkossa aina tilanne), voidaan joukon A^B nolla-alkioksi ottaa joukon A nolla-alkioista muodostuva jono. Tällöin määritellään nollasta poikkeavan alkion $x = (x_b)$ pienin nollasta eroava indeksi

$$n_x = \min\{b \in B : x_b \neq 0\}.$$

Joukon B hyvän järjestyksen takia nämä minimit ovat olemassa joukossa B. Määritellään järjestys asettamalla $x < y$ jos $x_{n_{x-y}} < y_{n_{x-y}}$. Jos $x_b = y_b$ kaikilla $b \in B$, asetetaan $x = y$.

Tällaista järjestystä kutsutaan *leksikografiseksi järjestykseksi.*

Tarkastelun kohteeksi otetaan erityisesti joukkojen $\mathbb{R}^\lambda$ järjestykset, missä λ on ordinaaliluku. Ordinaaliluvuista vain osa on tämän teorian kannalta kiinnostavia; asiaa käsitellään kappaleessa 3.3. Joukko $\mathbb{R}^\lambda$ on vektoriavaruus, ja sen yhteenlaskua ja nolla-alkiota merkitään tutulla tavalla.

2.2. Ordinaaleista ja kardinaaleista. Tässä työssä ei ole tarkoitus tehdä huolellista teoriaa ordinaali- ja kardinaaliluvuista. Niiden ominaisuuksia esitellään tässä vain sen verran, että niitä voidaan käyttää työkaluina tutkittaessa topologisten avaruuksien ominaisuuksia. Tarkempi käsittely on esitetty mm. kirjassa [**1**]. Seuraavissa tarkasteluissa valinta-aksiooman oletetaan olevan voimassa ilman eri mainintaa.

Jokainen hyvin järjestetty joukko voidaan samaistaa ordinaaliin. Koska määritelmän 2 joukolta B ei edellytetä muuta rakennetta kuin hyvä järjestys, otetaan jatkotarkasteluissa joukoksi B aina jokin ordinaali.

Kaksi hyvin järjestettyä joukkoa ovat järjestysisomorfiset, jos niiden välillä on bijektio, joka säilyttää järjestyksen. Ordinaaliluvut voidaan tulkita järjestysisomorfian määräämiksi ekvivalenssiluokiksi. Sen sijaan joukkoisomorfian – joukot ovat joukkoisomorfiset jos niiden välillä on bijektio – ekvivalenssiluokat ovat kardinaalilukuja. Joukon A kardinaalisuutta (eli ekvivalenssiluokkaa joukkoisomorfian mielessä) merkitään $|A|$.

Ordinaali α voidaan aina tulkita joukoksi, joka koostuu kaikista sitä pienemmistä ordinaaleista, joten merkinnät $\beta < \alpha$ ja $\beta \in \alpha$ tarkoittavat täsmälleen samaa kaikilla ordinaaleilla α ja β. Kaikkien ordinaalien kokoelmasta syntyy aito luokka, mutta jos ordinaaleista muodostetulla luokalla B on yläraja β, on $B \subset \beta+1$; näin B on joukko ja se perii ordinaalilta β hyvän järjestyksen. Edellä käytetty ordinaali $\beta+1$ on ordinaalin β seuraaja, joka voidaan tulkita siis joukoksi $\beta \cup \{\beta\}$.

Määritelmä 3. Olkoon α on mikä tahansa ääretön ordinaali. Asetetaan ordinaaleista muodostuva joukko A_α siten, että $\beta \in A_\alpha$ jos $\beta \leq \alpha$ ja on olemassa kuvaus $f : \beta \to \alpha$ siten, että kaikilla $\lambda \in \alpha$ on $f(\mu) \geq \lambda$ jollekin $\mu \in \beta$. Ordinaali $\operatorname{cf} \alpha := \min A_\alpha$ on ordinaalin α *kofinaalisuus*. Ordinaali α on *säännöllinen*, jos $\operatorname{cf} \alpha = \alpha$.

Tästä määritelmästä seuraa heti, ettei äärettömällä säännöllisellä ordinaalilla ole suurinta alkiota. Täten jokaisen ordinaalin $\lambda \in \alpha$ seuraaja $\lambda + 1$ kuuluu myös ordinaaliin α aina kun α on ääretön ja säännöllinen.

Valinta-aksiooma todeksi olettaen voidaan kaikki joukot järjestää hyvin. Kardinaali κ voidaan samaistaa ordinaaleista muodostetun joukon $\{\alpha : |\alpha| = \kappa\}$ pienimpään alkioon, jota kutsutaan kardinaalin ensimmäiseksi ordinaaliksi. Tällä samaistuksella kardinaali on säännöllinen jos ja vain jos sen ensimmäinen ordinaali on sitä. Äärellisten ordinaalien yhteydessä ei tavallisesti puhuta säännöllisyydestä.

Säännöllisille ordinaaleille tullaan tarvitsemaan erityisesti seuraavaa karakterisaatiota:

Lause 4. *Ääretön ordinaali α on säännöllinen jos ja vain jos jokaiselle kokoelmalle $\{A_i \subset \alpha : i \in I\}$, jolle $|A_i| < |\alpha|$ kaikilla $i \in I$ ja $|I| < |\alpha|$, pätee*

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| < |\alpha| .$$

Todistus. Propositiot VII.6.10 ja VII.6.11 kirjassa [**1**]. □

2.3. Metriikka. Tavallinen metriikan käsite perustuu reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ rakenteeseen, kun taas topologisen avaruuden määrittelevissä ominaisuuksissa ei ole vastaavaa viittausta. Siksi tavoitteena on yleistää metriikan ja metrisoituvuuden käsitteitä niin, että ne vapautuvat yhteydestä reaalilukuihin. Lauseessa 25 todetaan, että tämä yleisyys saavutetaan seuraavalla määritelmällä, vaikka se asetetaan reaalilukujen avulla.

Yleistetyille metrisille avaruuksille saadaan monia samoja ominaisuuksia kuin perinteisille metrisille avaruuksille. Lauseesta 36 ja sitä seuraavista huomautuksista seuraa, että löytyy yleistetyllä tavalla metrisiä avaruuksia, jotka eivät ole tavallisessa mielessä metrisoituvia.

Määritelmä 5. Olkoon X joukko ja α ordinaali (hyvin järjestetty joukko). Kuvaus $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^\alpha$ on joukon X metriikka (*α-metriikka*), jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $d(x, y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$
(2) $d(x, y) = 0$ täsmälleen kun $x = y$
(3) $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$
(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Tämä määritelmä eroaa tavallisesta metriikasta vain siinä, että etäisyyttä mitataan ”muissa yksiköissä kuin reaaliluvuissa”. Kun $\alpha = 1$, on α-metriikka tavallisessa mielessä metriikka.

Määritellään luvut (joukolla α indeksoidut lukujonot) $r^\lambda \in \mathbb{R}^\alpha$ siten, että $r^\lambda_\mu = 1$ kun $\mu = \lambda$ ja $r^\lambda_\mu = 0$ muulloin – tämän muotoisia säteitä tullaan käyttämään toistuvasti. Jonoindeksi kirjoitetaan aina alaindeksiksi, kun taas yläindeksillä erotetaan toisistaan eri jonot. Näin siis luku r^λ_μ on jonon r^λ alkio kohdassa $\mu \in \alpha$.

Määritelmän 2 mukaista pienintä eroavaa indeksiä vastaavasti määritellään metrisen avaruuden eri alkioille x ja y pienin eroava indeksi asettamalla

$$n^d_{xy} = n_{d(x,y)},$$

missä yhtälön oikealla puolella oleva n on määritelmän 2 mukainen. Selvissä tilanteissa voidaan metriikka d jättää merkitsemättä.

Koska α on hyvin järjestetty, voidaan avaruuteen $X = \mathbb{R}^\alpha$ määritellä α-metriikka d määrittelemällä sen komponenttikuvaukset $d_\lambda : X \times X \to \mathbb{R}$ asettamalla $d_\lambda(x, y) = |x_\lambda - y_\lambda|$ kaikilla $\lambda \in \alpha$. On helppo tarkastaa, että tämä on metriikka. Ilman eri mainintaa käytetään tässä avaruudessa aina tätä metriikkaa. Kaikki keskeiset esimerkit muodostetaan näin valitsemalla ordinaali α sopivasti.

Metriikan avulla voidaan avaruuteen X määritellä avoimet ja suljetut pallot sekä topologia. Topologian kannaksi tulee kaikkien avointen pallojen kokoelma.

Määritelmä 6. Olkoon X topologinen avaruus[1] ja α ordinaali. Avaruus X on *α-metrisoituva* jos avaruudessa X on α-metriikka, joka antaa saman topologian.

Erityisesti 1-metrisoituva avaruus on perinteisessä mielessä metrisoituva.

3. Metristen avaruuksien ominaisuuksia

3.1. Perusominaisuuksia topologisena avaruutena.

Lause 7. *Kaikilla ordinaaleilla α on α-metrinen avaruus X sekä T_2 että T_5.*

Todistus. Olkoot x ja y eri pisteitä avaruudessa X. On helppo nähdä, että pallot $B(x, d(x, y)/2)$ ja $B(y, d(x, y)/2)$ ovat erilliset, joten X on T_2.

Olkoot A ja B avaruuden X epätyhjiä joukkoja siten, että $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, ja osoitetaan, että näillä joukoilla on erilliset ympäristöt. Koska $A \cap \overline{B} = \emptyset$, on jokaisella $a \in A$ palloympäristö $B(a, r_a)$, joka ei leikkaa joukkoa $\overline{B}$. Samoin jokaisella $b \in B$ on $r_b \in \mathbb{R}^\alpha$ siten, että $B(b, r_b) \cap \overline{A} = \emptyset$. Selvästi $V = \bigcup_{a\in A} B(a, r_a/2)$ ja $W = \bigcup_{b\in A} B(b, r_b/2)$ ovat joukkojen A ja B ympäristöt. Ne ovat lisäksi erilliset: Jos nimittäin olisi $x \in V \cap U$, niin joillekin $a \in A$ ja $b \in B$ olisi $x \in B(a, r_a/2) \cup B(b, r_b/2)$, jolloin $d(a, b) \le d(a, x) + d(x, b) < r_a/2 + r_b/2 \le \max\{r_a, r_b\}$, vaikka $a \notin B(b, r_b)$ ja $b \notin B(a, r_a)$. □

Lause 8. *Kaikilla ordinaaleilla $\alpha > 1$ on avaruudessa $\mathbb{R}^\alpha$ yhteenlasku jatkuva ja reaaliluvulla kertominen epäjatkuva kuvaus, joten $\mathbb{R}^\alpha$ ei ole topologinen vektoriavaruus.*

Todistus. Tutkitaan ensin yhteenlaskua. Topologian siirtoinvarianssin takia riittää osoittaa, että kaikille origon palloympäristöille $B(0, r)$, $r \in \mathbb{R}^\alpha$ ja $r > 0$, löytyy origon ympäristö A, jolle $A + A \subset B(0, r)$. Voidaan valita vaikkapa $A = (0, r/2)$.

[1] Seuraavissa tarkasteluissa vaaditaan, että topologinen avaruus on aina epätyhjä, ja että topologian kanta ei sisällä tyhjää joukkoa.

Jos kertolasku olisi jatkuva, niin kaikilla $a \in \mathbb{R}^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}^\alpha$, $\varepsilon > 0$, löytyisi sellaiset $r \in \mathbb{R}^\alpha$ ja $\delta \in \mathbb{R}$, että $B(x,\delta) \cdot B(a,r) \subset B(xa,\varepsilon)$. Kuitenkin, jos $a_1 = 1$ ja $\varepsilon_1 = 0$ (silti voidaan valita $\varepsilon > 0$ kunhan $\alpha > 1$), niin kaikilla $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on $d_1(xa,(x+\delta)a) = |\delta a_1| > 0 = \varepsilon_1$, joten $d(xa,(x+\delta)a) > \varepsilon$. □

Lause 9. *Kun α on ääretön ordinaali, niin jokaisella α-metrisoituvan avaruuden pisteellä on ympäristökanta, jonka mahtavuus on korkeintaan $|\alpha|$.*

Todistus. Jos joukossa α ei ole suurinta alkiota, niin pisteen x ympäristökannaksi kelpaa $\{B(x,r^\lambda) : \lambda \in \alpha\}$, sillä kaikilla $\delta \in \mathbb{R}^\alpha$, $\delta > 0$, on $r^{n_\delta+1} < \delta$. Jos taas $\lambda = \max\alpha$, niin löytyy numeroituva ympäristökanta $\{B(x,s^n) : n = 0,1,\dots\}$, kun asetetaan $s^n_\lambda = 1/n$ ja $s^n_\mu = 0$ kaikilla $\mu < \lambda$. □

Tavallisista metrisistä avaruuksista tuttu separoituvuuden, numeroituvan ympäristökannan ja Lindelöf-ominaisuuden yhteys yleistyy seuraavasti:

Lause 10. *Säännöllisillä äärettömillä ordinaaleilla α pätevät α-metrisoituvassa avaruudessa X seuraavat:*

(1) *Jos avaruuden X topologialla on kanta, jonka mahtavuus on $|\alpha|$, niin avaruudessa X on tiheä osajoukko, jonka mahtavuus on enintään $|\alpha|$.*
(2) *Jos avaruudessa X on tiheä osajoukko, jonka mahtavuus on $|\alpha|$, niin topologialla on kanta, jonka mahtavuus on enintään $|\alpha|$.*
(3) *Jos avaruuden X topologialla on kanta, jonka mahtavuus on $|\alpha|$, niin jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä on osapeite, jonka mahtavuus on enintään $|\alpha|$.*
(4) *Jos jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä on osapeite, jonka mahtavuus on enintään $|\alpha|$, niin topologialla on kanta, jonka mahtavuus on enintään $|\alpha|$.*

Todistus. Ensimmäinen ominaisuus pätee kaikissa topologisissa avaruuksissa. Olkoon B avaruuden X topologian kanta. Jokaiselle joukolle $A \in B$ löytyy alkio $x_A \in A$. Joukko $\{x_A : A \in B\}$ on selvästi tiheä ja korkeintaan yhtä mahtava kuin B.

Toinen kohta: Olkoon $A \subset X$ tiheä joukko, jolle $|A| = |\alpha|$. Kokoelma $B = \{B(a,r^\lambda) : a \in A, \lambda \in \alpha\}$ on topologian kanta, sillä jokaisella avoimella joukolla $U \subset X$ on sisäpisteenään jokin $a \in A$ ja kaikilla $\varepsilon \in \mathbb{R}^\alpha$, $\varepsilon > 0$, löytyy $\lambda \in \alpha$ siten, että $r^\lambda < \varepsilon$, sillä äärettömässä säännöllisessä ordinaalissa α ei ole suurinta alkiota. Lisäksi kokoelman B mahtavuus on korkeintaan $|A \times \alpha| = |\alpha|$.

Myös kolmas kohta pätee kaikissa topologisissa avaruuksissa. Olkoon C avaruuden X avoin peite ja $\{B_\lambda : \lambda \in \alpha\}$ sen topologian kanta. Olkoon $I \subset \alpha$ niiden $\lambda \in \alpha$ joukko, joille $B_\lambda \subset U$ jollekin $U \in C$, ja valitaan kaikilla $\lambda \in I$ jokin U_λ siten, että $B_\lambda \subset U_\lambda \in C$. Riittää enää osoittaa, että $\{U_\lambda : \lambda \in I\}$ on avaruuden X peite. Olkoon $x \in X$ mikä tahansa piste. Se kuuluu sisäpisteenä johonkin $U \in C$, joten löytyy $\lambda \in \alpha$ siten, että $x \in B_\lambda \subset U$. Siispä $\lambda \in I$ ja $x \in U_\lambda \subset \bigcup_{\mu \in I} U_\mu$.

Lopuksi neljäs kohta: Lauseen 9 todistuksessa konstruoitiin joukko $\{r^i \in \mathbb{R}^\alpha : i \in I\}$, jolle $|I| \le |\alpha|$ ja kokoelma $\{B(x,r^i) : i \in I\}$ on pisteen $x \in X$ ympäristökanta. Kun kiinnitetään $i \in I$, niin $\{B(x,r^i) : x \in X\}$ on avaruuden X avoin peite. Tästä peitteestä löytyy oletuksen mukaan osapeite, jonka mahtavuus on enintään $|\alpha|$, eli löytyy $A_i \subset X$ siten, että $|A_i| \le |\alpha|$ ja $\{B(x,r^i) : x \in A_i\}$ on avaruuden X peite. Yhdiste $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ on korkeintaan yhtä mahtava kuin α, ja on myös helppo nähdä, että se on tiheä. Siispä väite seuraa toisesta kohdasta. □

Lause 11. *Olkoon X T_3-avaruus ja κ kardinaali. Oletetaan, että avointen joukkojen B_j, $j \in J$, leikkaus on avoin aina kun $|J| < \kappa$ ja jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä on osapeite, jonka mahtavuus on enintään κ. Tällöin X on T_4.*

Todistus. Olkoot E ja F erillisiä suljettuja joukkoja. Ne voidaan olettaa epätyhjiksi. Koska X on T_3, löytyy kaikilla $e \in E$ ympäristö U_e siten, että $F \subset (X \setminus \overline{U}_e)$. Samoin löytyy kaikille $f \in F$ ympäristö V_f, jonka sulkeuman komplementti sisältää joukon E. Koska

$$C = \{X \setminus (E \cup F)\} \cup \{U_e : e \in E\} \cup \{V_f : f \in F\}$$

on avaruuden X avoin peite, on sillä vaaditun peiteominaisuuden vuoksi alipeite

$$C' = \{X \setminus (E \cup F)\} \cup \{U_{e_\lambda} : \lambda \in \alpha\} \cup \{V_{f_\lambda} : \lambda \in \alpha\},$$

missä jokainen $e_\lambda \in E$ ja $f_\lambda \in F$, ja α on kardinaalin κ ensimmäinen ordinaali.

Jokaisella $\lambda \in \alpha$ määritellään joukot

$$A_\lambda = U_{e_\lambda} \setminus \bigcup_{\mu<\lambda} \overline{V}_{f_\mu} \quad \text{ja}$$

$$B_\lambda = V_{f_\lambda} \setminus \bigcup_{\mu<\lambda} \overline{U}_{e_\mu}.$$

Koska yllä olevien määritelmien yhdisteet sisältävät kardinaalia κ pienemmän määrän suljettuja joukkoja, ovat kyseiset yhdisteet vaaditun avointen joukkojen leikkausominaisuuden vuoksi suljettuja. Niinpä jokainen A_λ ja B_λ on avoin, joten joukot

$$A = \bigcup_{\lambda\in\alpha} A_\lambda \quad \text{ja} \quad B = \bigcup_{\lambda\in\alpha} B_\lambda$$

ovat joukkojen E ja F ympäristöjä. Nämä ympäristöt ovat lisäksi pistevieraita; jos nimittäin $\mu \leq \lambda$, niin $\overline{B}_\mu \subset X \setminus A_\lambda$, joten $A_\lambda \cap B_\mu = \emptyset$ ja samoin myös tilanteessa $\mu \geq \lambda$ saadaan $A_\lambda \cap B_\mu = \emptyset$. □

Lause 12. *Olkoon α ääretön säännöllinen ordinaali ja X α-metrinen avaruus. Kun $|I| < |\alpha|$ ja $\{B_i : i \in I\}$ on kokoelma avaruuden X avoimia joukkoja, niin $B = \bigcap_{i\in I} B_i$ on avoin.*

Todistus. Valitaan mielivaltainen $x \in B$ ja etsitään sen ympärille avoin pallo. Kaikilla $i \in I$ löytyy $s^i \in \mathbb{R}^\alpha$, $s^i > 0$, siten, että $B(x, s^i) \subset B_i$. Koska $n_{s^i} \in \alpha$ kaikilla $i \in I$, niin voidaan määritellä $n = \sup\{n_{s^i} : i \in I\} \leq \alpha$. Koska α on säännöllinen ja $|I| < |\alpha|$, niin $n < \alpha$ ja vieläpä $n + 1 < \alpha$. Nyt $B(x, r^{n+1})$ sisältyy kaikkiin palloihin $B(x, s^i)$. □

Lause 13. *Olkoon $x \in X$ piste topologisessa avaruudessa ja κ_x pienin sellainen kardinaali, jonka kokoinen ympäristökanta pisteellä x on. Jos kardinaali κ_x on säännöllinen ja ääretön sekä α sen ensimmäinen ordinaali, niin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Pisteellä x on ympäristökanta $\{U_\lambda : \lambda \in \alpha\}$, jolle $U_\lambda \subset U_\mu$ aina kun $\lambda \geq \mu$.*
(2) *Kun $\{V_j : j \in J\}$ on kokoelma pisteen x ympäristöjä ja $|J| < \kappa_x$, niin x on leikkauksen $\bigcap_{j\in J} V_j$ sisäpiste.*

Suunta (2)⇒(1) pätee myös ilman kardinaalin säännöllisyyttä.

Todistus. Olkoon A_x sellaisten kardinaalien κ joukko, että pisteellä x on ympäristökanta, jonka mahtavuus on κ. Koska jokaisella pisteellä on ympäristökanta, eikä se voi olla suurempi kuin koko avaruuden topologia, on A_x epätyhjä joukko. Kardinaalien hyvän järjestyksen takia voidaan määritellä kardinaali $\kappa_x = \min A_x$.

(2)⇒(1): Kardinaalin κ_x määritelmän perusteella on olemassa ympäristökanta $\{U_\lambda : \lambda \in \alpha\}$. Määritellään joukot $V_\lambda = \operatorname{int} \bigcap_{\mu<\lambda} U_\mu$. Koska $\lambda < \alpha$, on ominaisuuden (2) takia jokainen V_λ pisteen x ympäristö. Lisäksi joukot V_λ ovat selvästi vaaditulla tavalla sisäkkäin.

(1)⇒(2): Olkoon $\{U_\lambda : \lambda \in \alpha\}$ kohdassa (1) mainittu ympäristökanta ja $\{V_j : j \in J\}$, $|J| < |\alpha|$, kokoelma pisteen x ympäristöjä. Jokaisella $j \in J$ on $\lambda(j) \in \alpha$ siten, että $U_{\lambda(j)} \subset V_j$. Asetetaan $\mu = \sup\{\lambda(j) : j \in J\}$. Koska α on säännöllinen ordinaali, niin $\mu < \alpha$. Nyt selvästi U_μ sisältyy kaikkiin joukkoihin V_j, joten x on leikkauksen $\bigcap_{j\in J} V_j$ sisäpiste. □

Huomautus 14. Jos X on α-metrinen avaruus, niin molemmat lauseen 13 ehdot täyttyvät, mutta näin ei käy kaikissa topologisissa avaruuksissa. Ylinumeroituvan joukon X kofiniitti topologia tarjoaa vastaesimerkin: silloin $\kappa_x \geq \aleph_1$ kaikille $x \in X$ mutta avointen joukkojen numeroituvasti äärettömät leikkaukset eivät aina sisällä sisäpistettä.

Lause 15. *Olkoon $x \in X$ piste T_1-avaruudessa ja κ_x kuten lauseessa 13. Jos pisteellä x on lauseen 13 ominaisuus (2), niin κ_x on sama myös kaikissa avaruuden X aliavaruuksissa, joissa x ei ole isoloitu.*

Todistus. Olkoon $Y \subset X$ aliavaruus, joka sisältää pisteen x. Määritellään kardinaali η_x samoin kuin κ_x, mutta aliavaruudessa Y. Piste x avaruuden Y alkiona perii ympäristökannan avaruudesta X, joten $\eta_x \leq \kappa_x$. Oletetaan sitten, että $\eta_x < \kappa_x$, eli että pisteellä x on ympäristökanta B avaruudessa Y siten, että $|B| < \kappa_x$. Jokaista $U \in B$ vastaa avoin $V_U \subset X$ siten, että $V_U \cap Y = U$, ja koska leikkaus $\bigcap_{U\in B} V_U$ on avoin avaruudessa X, on leikkaus $\bigcap_{U\in B} U$ avoin avaruudessa Y. Koska T_1-avaruudessa pisteen x ympäristökannan leikkaus on $\{x\}$, on $x \in Y$ isoloitu. Siispä, jos $x \in Y$ ei ole isoloitu, on $\eta_x = \kappa_x$. □

Esitetään vielä joitakin α-metristen avaruuksien keskeisiä topologisia ominaisuuksia, jotka todistetaan myöhemmin:

Huomautus 16. Olkoon α säännöllinen ordinaali – lauseen 30 mukaan niin voidaan aina olettaa.

Lauseessa 32 todistetaan, että jokaiselle α-metriselle avaruudelle X voidaan valita seuraavassa mielessä sisäkkäinen topologian kanta $\mathcal{B}$: kaikille $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ pätee $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \subset B_2$ tai $B_2 \subset B_1$.

Lisäksi lauseessa 25 todistetaan, että α-metrisoituvan avaruuden X α-metriikka d voidaan aina valita siten, että $d_\lambda(x, y) \in \{0, 1\}$ kaikilla $x, y \in X$ ja $\lambda \in \alpha$. Tällöin jokainen avoin pallo $B(x, r^\lambda)$ on suljettu: jos nimittäin $y \in X \setminus B(x, r^\lambda)$, niin $B(y, r^\lambda) \cap B(x, r^\lambda) = \emptyset$. Koska pallot $B(x, r^\lambda)$, $x \in X$ ja $\lambda \in \alpha$, muodostavat avaruuden X topologian kannan, saadaan seuraava lause.

Lause 17. *Kun α on ääretön ordinaali, niin jokainen α-metrisoituva avaruus on nollaulotteinen.*

3.2. Jonot ja kompaktisuus. Tässä kappaleessa yleistetään jonon käsitettä ja tarkastellaan sen avulla Lebesguen peitelauseen, jonokompaktisuuden, kompaktisuuden ja Bolzano–Weierstrass-ominaisuuden yleistyksiä.

Määritelmä 18. Kun α on ordinaali ja X joukko, niin indeksoitu pistejoukko $\{x_\lambda \in X : \lambda \in \alpha\}$ on α-jono joukossa X. Tavallisten jonojen tapaan voidaan käyttää α-jonolle merkintää $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$.

Jos X on topologinen avaruus, niin α-jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, jos kaikilla pisteen x ympäristöillä U on indeksi μ_U siten, että $x_\lambda \in U$ aina kun $\lambda \geq \mu_U$.

Kun $J \subset \alpha$ on epätyhjä osajoukko, niin α-jonolle voidaan määritellä osajono $(x_j)_{j\in J}$. Koska ordinaalin osajoukko voidaan aina samaistaa johonkin ordinaaliin, on myös osajono edellä määritellyssä mielessä jono, joskin mahdollisesti eri indeksiordinaalilla. Jos osajoukkoa $J \subset \alpha$ vastaava ordinaali on α itse, on $(x_j)_{j\in J}$ *kofinaalinen osajono.*

Huomautus 19. Kun $\alpha = \omega$, niin edellinen määritelmä antaa tavallisen jonon ja sen suppenemisen käsitteet. Jos sen sijaan ordinaalilla α on suurin alkio, niin α-jono suppenee kohti viimeistä pistettään.

On myös helppo nähdä, että T_2-avaruudessa jono voi supeta vain yhtä pistettä kohti.

Lause 20. *Olkoon α ääretön säännöllinen ordinaali ja X α-metrinen avaruus. Jos $\beta < \alpha$, niin β-jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\beta}$ suppenee avaruudessa X vain jos se on vakiojono jostain indeksistä alkaen.*

Todistus. Oletetaan, että β-jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\beta}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$. Voidaan olettaa, ettei joukossa β ole suurinta alkiota; muuten β-jono on vakiojono viimeisestä indeksistä alkaen ja suppenee kohti viimeistä alkiotaan. Pisteelle x saadaan ympäristökanta $\{B(x, r^\lambda) : \lambda \in \alpha\}$.

Suppenemisen takia on jokaisella $\lambda \in \alpha$ indeksi $\mu(\lambda) \in \beta$ siten, että $x_\nu \in B(x, r^\lambda)$ kaikilla $\nu \geq \mu(\lambda)$. Näin tulee määritellyksi kuvaus $\mu : \alpha \to \beta$. Valitaan jokaiselle $\lambda \in \mu(\alpha)$ luku $\eta(\lambda) \in \alpha$ siten, että $\mu(\eta(\lambda)) = \lambda$. Määritellään sitten ordinaali $\gamma = \sup\{\eta(\lambda) \in \alpha : \lambda \in \mu(\alpha)\}$. Koska $\mu(\alpha) \subset \beta < \alpha$, niin $|\mu(\alpha)| < |\alpha|$. Täten ordinaalin α säännöllisyyden takia on $\gamma < \alpha$.

Ordinaalin γ määritelmästä on selvää, että $x_\lambda \in B(x, r^\nu)$ kaikilla $\lambda \geq \mu(\gamma)$, olipa $\nu \in \alpha$ mikä tahansa. Koska $\{B(x, r^\nu) : \nu \in \alpha, \nu \geq \mu(\gamma)\}$ on pisteen x ympäristökanta ja sen leikkaus siis $\{x\}$, niin $x_\lambda \in \bigcap_{\nu\in\alpha,\nu\geq\mu(\gamma)} B(x, r^\nu) = \{x\}$ kaikilla $\lambda \geq \mu(\gamma)$, eli tarkasteltava β-jono on vakio indeksistä $\mu(\gamma)$ alkaen. □

Lause 21. *Olkoon α ääretön säännöllinen ordinaali ja X sellainen α-metrinen avaruus, että jokaisella sen α-jonolla $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ on suppeneva kofinaalinen osajono. Olkoon $\{U_j \subset X : j \in J\}$ mikä tahansa avaruuden X avoin peite. Silloin on olemassa $\theta \in \alpha$ siten, että kaikilla $x \in X$ löytyy $j_x \in J$ siten, että $B(x, r^\theta) \subset U_{j_x}$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että mikään θ ei toteuta vaadittua ehtoa. Siispä jokaisella $\lambda \in \alpha$ löytyy $x_\lambda \in X$ siten, että $B(x_\lambda, r^\lambda) \nsubseteq U_j$ kaikilla $j \in J$. Oletuksen mukaan jonolla $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ on suppeneva osajono. Supetkoon tämä osajono kohti pistettä $x \in X$. Koska joukot U_j peittävät koko avaruuden, löytyy $i \in J$ siten, että $x \in U_i$, ja

koska U_i on avoin, löytyy $\mu \in \alpha$ siten, että $B(x, 2r^\mu) \subset U_i$. Koska on olemassa pisteeseen x suppeneva osajono eikä sen osajonon indeksijoukon mahtavuus voi lauseen 20 nojalla olla alle $|\alpha|$, löytyy osajonon piste x_ν, $\nu > \mu$ siten, että $x_\nu \in B(x, r^\mu)$. Tällöin

$$B(x_\nu, r^\nu) \subset B(x_\nu, r^\mu) \subset B(x, 2r^\mu) \subset U_i$$

vastoin vastaoletusta. □

Lause 22. *Olkoon α ääretön säännöllinen ordinaali ja X α-metrinen avaruus. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Jokaisella avaruuden X α-jonolla $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ on suppeneva kofinaalinen osajono.*
(2) *Jokaisella avaruuden X avoimella peitteellä on alipeite, jonka koko on aidosti vähemmän kuin $|\alpha|$.*
(3) *Jokaisella avaruuden X osajoukolla A, jolle pätee $|A| \geq |\alpha|$, on kasautumispiste avaruudessa X.*

Todistus. (1)⇒(2): Olkoon $\{U_j \subset X : j \in J\}$ mikä tahansa avaruuden X avoin peite. Tehdään vastaoletus, ettei vaadittua alipeitettä ole olemassa. Olkoon $\theta \in \alpha$ lauseen 21 mukainen ordinaali. Muodostetaan seuraavaksi α-jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$. Jokaisella $\lambda \in \alpha$ on $j_\lambda \in J$ siten, että $B(x_\lambda, r^\theta) \in U_{j_\lambda}$. Valitaan mikä tahansa $x_1 \in X$ ja kaikilla $\lambda > 1$ valitaan jokin $x_\lambda \in X \setminus \bigcup_{\mu<\lambda} U_{j_\mu}$ – yhdiste $\bigcup_{\mu<\lambda} U_{j_\mu}$ ei ole vastaoletuksen mukaan koko X. Näin saadun jonon kahden eri pisteen etäisyys on vähintään $2r^\theta$, joten on selvää, ettei jonolla voi olla suppenevaa kofinaalista osajonoa. Tämä on ristiriita.

(2)⇒(3): Olkoon $A \subset X$ osajoukko, jolle pätee $|A| \geq |\alpha|$. Tehdään vastaoletus, ettei sillä ole kasautumispisteitä. Tällöin kaikilla $x \in X$ on säde $\mu_x \in \alpha$, jolle $A \cap B(x, r^{\mu_x}) \setminus \{x\} = \emptyset$. Nämä pallot muodostavat avaruuden X avoimen peitteen, joten voidaan valita $L \subset X$ siten, että $|L| < |\alpha|$ ja $X = \bigcup_{x\in L} B(x, r^{\mu_x})$. Nyt kuitenkin $|A \setminus L| \geq |\alpha|$, joten jollain $x \in L$ onkin $B(x, r^{\mu_x}) \cap (A \setminus L) \neq \emptyset$, mikä on ristiriidassa säteen r^{μ_x} valinnan kanssa.

(3)⇒(1): Olkoon $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ jokin α-jono avaruudessa X. Jos joukolle $A = \{x_\lambda : \lambda \in \alpha\}$ pätee $|A| < |\alpha|$, niin löytyy osajono, joka on vakio. Jos $|A| = |\alpha|$, niin on olemassa joukon A kasautumispiste $x \in X$. Muodostetaan jono $(y_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ asettamalla aluksi $y_1 = x_\gamma$, missä $\gamma = \min\{\lambda : x_\lambda \neq x\}$. Määritellään kaikilla $\lambda \in \alpha$, $\lambda > 1$, säde $\rho^\lambda = \min\left\{r^\lambda, \inf\{d(x, y_\mu) : \mu < \lambda\}\right\}$ – lauseen 12 nojalla tämä säde eroaa nollasta, kunhan $y_\mu \neq x$ kaikilla $\mu < \lambda$. Valitaan sitten kullakin λ piste $y_\lambda \in B(x, \rho^\lambda) \setminus \{x\}$, jollainen löytyy, koska x on kasautumispiste. Jono $(y_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ on selvästi suppeneva kofinaalinen osajono. □

3.3. Erilaisten metrisoituvuuksien vertailua. Tässä kappaleessa tutkitaan, millä ehdoin kaksi eri metriikkaa antavat saman topologian eli ovat ekvivalentit. Koska metrisoituvan topologian kanta voidaan muodostaa kaikista palloista, voidaan topologioiden ekvivalenssi todistaa näyttämällä, että kummankin metriikan jokaisen pallon sisältä löytyy toisen metriikan (samankeskinen) pallo.

Lemma 23. *Avaruuden X mille tahansa α-metriikalle d löytyy ekvivalentti α-metriikka δ, jolle $\delta_\lambda \geq 0$ kaikilla $\lambda \in \alpha$.*

Todistus. Käyttäen annettua metriikkaa d määritellään metriikka δ siten, että $\delta_\lambda(x,y) = d_\lambda(x,y)$ kaikilla $\lambda \leq n^d_{xy}$ ja $\delta_\lambda(x,y) = 1 + \max\{d_\lambda(x,y), 0\}$ kaikilla $\lambda > n^d_{xy}$, kunhan $x \neq y$. Selvästikin näin määrittelemällä saadaan $n^d_{xy} = n^\delta_{xy}$ kaikille $x \neq y$.

Osoitetaan, että δ toteuttaa kolmioepäyhtälön; muut metriikalta vaaditut ominaisuudet sillä on triviaalisti. Olkoot $x, y, z \in X$ kolme eri pistettä. Jos $\min\{n_{xz}, n_{yz}\} < n_{xy}$, niin selvästi $\delta(x,y) < \delta(x,z) + \delta(z,y)$. Toisaalta on helppo todeta, että aina on $\min\{n_{xz}, n_{yz}\} \leq n_{xy}$, sillä d toteuttaa kolmioepäyhtälön. Jos $n := n_{xy} = n_{xz} = n_{yz}$, niin metriikan d kolmioepäyhtälöstä seuraa

$$\delta_n(x,y) \leq \delta_n(x,z) + \delta_n(z,y).$$

Jos tässä pätee yhtälö ja n ei ole joukon α viimeinen alkio, täytyy tarkastella metriikan komponenttia $n+1$. Tälle saadaan

$$\begin{aligned}
&d_{n+1}(x,y) \leq d_{n+1}(x,z) + d_{n+1}(z,y)\\
\Rightarrow &\max\{d_{n+1}(x,y), 0\} \leq \max\{d_{n+1}(x,z), 0\} + \max\{d_{n+1}(z,y), 0\}\\
\Rightarrow &\delta_{n+1}(x,y) < \delta_{n+1}(x,z) + \delta_{n+1}(z,y)\\
\Rightarrow &\delta(x,y) < \delta(x,z) + \delta(z,y).
\end{aligned}$$

Tarkasteltavaksi jää vielä tilanne $n := n_{xy} = n_{xz} < n_{yz} =: m$. Tällöin taas n:s ja sitä aiemmat komponentit hoituvat metriikan d kolmioepäyhtälöllä ja yhtäsuuruuden vallitessa komponentissa n ja kun $n+1 \in \alpha$ saadaan kaikilla k, $n < k < m$,

$$\begin{aligned}
&d_k(x,y) \leq d_k(x,z) + d_k(z,y)\\
\Rightarrow &\max\{d_k(x,y), 0\} \leq \max\{d_k(x,z), 0\} + \delta_k(z,y)\\
\Rightarrow &\delta_k(x,y) \leq \delta_k(x,z) + \delta_k(z,y),
\end{aligned}$$

sillä $\delta_k(z,y) = d_k(z,y) = 0$, ja komponentille m

$$\begin{aligned}
&d_m(x,y) \leq d_m(x,z) + d_m(z,y)\\
\Rightarrow &\max\{d_m(x,y), 0\} \leq \max\{d_m(x,z), 0\} + \max\{d_m(z,y), 0\}\\
\Rightarrow &\delta_m(x,y) < \delta_m(x,z) + \delta_m(z,y),
\end{aligned}$$

joten $\delta(x,y) < \delta(x,z) + \delta(z,y)$.

Näytetään sitten metriikkojen ekvivalenssi. Metriikan d pallon $B_d(x,r)$ sisään mahtuu pallo $B_\delta(x, r/2)$; pallo $B_\delta(x, r/2)$ on toki hyvin määritelty, vaikkei etäisyyden $r/2$ jokainen komponentti olisikaan positiivinen. Samoin saadaan säde puolittamalla pallojen inkluusio toiseen suuntaan. □

Lemma 24. *Avaruuden X mille tahansa α-metriikalle d löytyy ekvivalentti α-metriikka δ, jolle $\delta_\lambda \leq 1$ kaikilla $\lambda \in \alpha$.*

Todistus. Lemman 23 nojalla voidaan olettaa, että $d_\lambda \geq 0$ kaikilla $\lambda \in \alpha$. Asetetaan metriikan δ komponentit siten, että $\delta_\lambda(x,y) = \min\{d_\lambda(x,y), 1\}$. Kolmioepäyhtälö metriikalle δ saadaan komponenteittain, sillä reaaliluvuille $a, b, c \in [0, \infty)$ pätee

$$a \leq b + c \Rightarrow \min\{a, 1\} \leq \min\{b, 1\} + \min\{c, 1\}.$$

Muut metriikalle esitetyt vaatimukset δ täyttää triviaalisti, joten se on todella metriikka.

Metriikkojen ekvivalenssi on helppo nähdä: kaikilla $x \in X$ ja positiivisilla $r \in \mathbb{R}^\alpha$ pätee $B_d(x,r) \subset B_\delta(x,r)$ ja $B_\delta(x,\rho) \subset B_d(x,r)$, kun asetetaan $\rho_\lambda = \min\{r_\lambda, 1\}$. □

Lause 25. *Olkoon α säännöllinen ääretön ordinaali ja d jokin α-metriikka avaruudessa X. Tällöin on olemassa ekvivalentti α-metriikka δ, jolle $\delta_\lambda(x,y) \in \{0,1\}$ kaikilla $x, y \in X$ ja $\lambda \in \alpha$.*

Todistus. Asetetaan $\delta(x,x) = 0$ ja $\delta(x,y) = r^{n^d_{xy}}$ kun $x \neq y$. Tarkastetaan, että δ toteuttaa kolmioepäyhtälön; muut metriikan ominaisuudet sillä on selvästi. Olkoot $x, y, z \in X$ eri pisteitä. Koska d toteuttaa kolmioepäyhtälön, on $\min\{n^d_{xz}, n^d_{yz}\} \leq n^d_{xy}$. Tästä päätellään kolmioepäyhtälö δ:lle:

$$\begin{aligned}
&\min\{n^d_{xz}, n^d_{yz}\} \leq n^d_{xy} \\
\Rightarrow &\max\{r^{n^d_{xz}}, r^{n^d_{yz}}\} \geq r^{n^d_{xy}} \\
\Rightarrow &\max\{\delta(x,z), \delta(y,z)\} \geq \delta(x,y) \\
\Rightarrow &\delta(x,z) + \delta(y,z) \geq \delta(x,y).
\end{aligned}$$

Tarkastetaan vielä α-metriikkojen d ja δ ekvivalenssi. Koska α on säännöllinen, niin $\lambda + 1 \in \alpha$ kaikilla $\lambda \in \alpha$. Koska selvästi $B_\delta(x, r^\lambda) \supset B_d(x, r^{\lambda+1})$ ja $B_d(x, r^\lambda) \supset B_\delta(x, r^{\lambda+1})$ kaikilla $x \in X$ ja $\lambda \in \alpha$, ovat metriikat ekvivalentit. □

Huomautus 26. Seuraavaksi todistettavan lauseen 30 perusteella riittää tarkastella α-metrisoituvuutta tilanteessa, jossa α on säännöllinen. Tällöin lause 25 antaa suoraan lemmat 23 ja 24.

Lemma 27. *Olkoon α ordinaali ja β kardinaalin $|\alpha|$ ensimmäinen ordinaali sekä X α-metrinen avaruus. Tällöin on ordinaali $\gamma \leq \beta$ siten, että X on γ-metrisoituva.*

Todistus. Koska $|\alpha| = |\beta|$, niin on olemassa bijektio $f : \beta \to \alpha$. Määritellään epätyhjä osajoukko $K \subset \beta$ seuraavasti:

$$K := \{\lambda \in \beta : f(\mu) \leq f(\lambda) \text{ kaikilla } \mu \leq \lambda\}.$$

Kuvauksella f on sellainen ominaisuus, että kaikilla $\lambda \in \alpha$ on $\mu \in K$ siten, että $f(\mu) \geq \lambda$. Todistetaan tämä: Olkoon $\lambda \in \alpha$. Määritellään sitten $A = \{\nu \in \beta : f(\nu) \geq \lambda\}$. Koska f on surjektio, on A epätyhjä. Hyvää järjestystä käyttäen voidaan asettaa $\mu = \min A$. Selvästikin $\mu \in K$ ja $f(\mu) \geq \lambda$.

Koska K on ordinaalin β osajoukko, se voidaan samaistaa johonkin ordinaaliin $\gamma \leq \beta$. Injektiolla f voidaan K puolestaan samaistaa joukon α osajoukkoon $L = f(K)$.

Olkoon sitten d avaruuden X α-metriikka. Osoitetaan, että metriikan d ne λ-komponentit d_λ, joilla $\lambda \in L$, määräävät topologian täysin.

Olkoon $x \in X$ ja olkoon $\rho \in \mathbb{R}^\alpha$ positiivinen. Kuvaukselle f todistetun ehdon mukaan löytyy $\lambda \in L$, jolle $\lambda \geq n_\rho$. Tällöin $B(x, \rho_{n_\rho} \cdot r^\lambda) \subset B(x, \rho)$. Näin ollen avaruuden X topologian määräämiseen riittävät sellaiset etäisyydet $\rho \in \mathbb{R}^\alpha$, joilla vain L-komponentit eroavat nollasta.

Näin voidaan α-metriikka korvata topologiaa muuttamatta L-metriikalla. Koska L voidaan samaistaa ordinaaliin γ, on X γ-metrisoituva. □

Lemma 28. *Olkoon α äärettömän epäsäännöllisen kardinaalin ensimmäinen ordinaali. Jos X on α-metrisoituva, se on β-metrisoituva jollain $\beta < \alpha$.*

Todistus. Ordinaalin α kofinaalisuus $k = \operatorname{cf} \alpha$ on epäsäännöllisyyden takia aidosti pienempi kuin α. Tällöin on olemassa ordinaali $\beta = \operatorname{cf} \alpha < \alpha$ ja funktio $f : \beta \to \alpha$ siten, että kaikilla $\lambda \in \alpha$ on olemassa $\mu \in \beta$ jolle $f(\mu) > \lambda$. Toistamalla lemman 27

päättely – funktiolla f on siihen tarpeelliset ominaisuudet – nähdään, että X on β-metrisoituva. $\square$

Huomautus 29. Edelliset tulokset voi myös yhdistää toteamalla, että jokainen α-metrisoituva avaruus on cf α-metrisoituva.

Lause 30. *Olkoon α ordinaali ja X α-metrinen avaruus. Tällöin pienin ordinaali β, jolla X on β-metrisoituva, on säännöllinen.*

Todistus. Olkoon K niiden ordinaalien $\gamma \leq \alpha$ joukko, joilla X on γ-metrisoituva. Koska K on hyvin järjestetty, voidaan asettaa $\beta = \min K$. Lemman 27 nojalla on β välttämättä kardinaalinsa ensimmäinen, ja lemma 28 taas takaa sen, että β on säännöllinen. $\square$

Seuraus 31. *Jos ordinaalissa α on suurin alkio λ, niin α-metrisoituva avaruus X on 1-metrisoituva. Erityisesti näin käy kaikilla äärellisillä ordinaaleilla α.*

Todistus. Lemman 27 joukoksi $L \subset \alpha$ voidaan valita $\{\lambda\}$. α-metriikan d komponentti d_λ antaa siis yksin 1-metriikan, joka on ekvivalentti metriikan d kanssa. $\square$

Todistetaan seuraavaksi huomautuksen 16 väite:

Lause 32. *Olkoon α ääretön ordinaali ja X α-metrinen avaruus. Tällöin avaruuden X topologialla on sellainen kanta $\mathcal{B}$, että kaikille $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ pätee $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \subset B_2$ tai $B_2 \subset B_1$.*

Todistus. Lauseen 30 nojalla voidaan olettaa, että α on säännöllinen. Lauseen 25 nojalla taas voidaan olettaa, avaruuden X topologian antaa α-metriikka d, jolle $d_\lambda(x, y) \in \{0, 1\}$ kaikilla $x, y \in X$ ja $\lambda \in \alpha$. Topologian kannaksi kelpaa

$$\mathcal{B} := \{B(x, r^\lambda) : x \in X, \lambda \in \alpha\}.$$

Olkoot $B_1 = B(x_1, r^{\lambda_1})$ ja $B_2 = B(x_2, r^{\lambda_2})$ tämän kannan joukkoja. Vaihtamalla tarvittaessa indeksit 1 ja 2 voidaan olettaa, että $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Väite on selvä, jos $x_1 = x_2$, joten oletetaan, että $x_1 \neq x_2$.

Tutkitaan tilannetta $x1 \notin B_2$; tällöin $n_{x_1x_2} \leq \lambda_2$. Olkoon $y \in X$ mikä tahansa piste. Tällöin kolmioepäyhtälöstä $r^{n_{x_1x_2}} \leq d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(x_2, y)$ seuraa $\max\{d(x_1, y), d(x_2, y)\} \geq r^{n_{x_1x_2}} \geq r^{\lambda_2}$. Koska $r^{\lambda_2} \geq r^{\lambda_1}$. Täten $d(x_1, y) \geq r^{\lambda_1}$ tai $d(x_2, y) \geq r^{\lambda_2}$, joten ei voi olla $y \in B_1 \cap B_2$. Siispä $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Tutkitaan sitten tilannetta $x1 \in B_2$. Kaikilla $y \in B_1$ pätee

$$d(y, x_2) \leq \underbrace{d(x_1, x_2)}_{<r^{\lambda_2}} + \underbrace{d(x_1, y)}_{<r^{\lambda_1} \leq r^{\lambda_2}} < r^{\lambda_2},$$

joten $B_1 \subset B_2$. $\square$

Lause 33. *Jokainen ω-metrisoituva avaruus X on 1-metrisoituva.*

Todistus. Olkoon d avaruuden X ω-metriikka. Lemmojen 23 ja 24 nojalla voidaan olettaa, että $0 \leq d_i(x, y) \leq 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$; ordinaali ω voidaan samaistaa luonnollisten lukujen joukkoon $\mathbb{N}$ (valitaan tässä $0 \in \mathbb{N}$). Määritellään avaruuteen X 1-metriikka δ asettamalla kaikilla $x \neq y$

$$\delta(x, y) = 2^{-n_{xy}-1}(d_{n_{xy}} + 1)$$

ja $\delta(x,x) = 0$. Osoitetaan, että δ toteuttaa kolmioepäyhtälön; muut metriikan ominaisuudet sillä on selvästi.

Olkoot $x, y, z \in X$ eri pisteitä. Selvästi $\min\{n_{xz}, n_{yz}\} \geq n_{xy}$, sillä d toteuttaa kolmioepäyhtälön. Jos $n_{xz} < n_{xy}$, niin havainnon $\delta(x,y) \in (2^{-n_{xy}-1}, 2^{-n_{xy}}]$ avulla saadaan

$$\delta(x,z) + \delta(z,y) > 2^{-n_{xz}-1} + 0 \geq 2^{-n_{xy}} \geq \delta(x,y).$$

Olkoon sitten $n := n_{xy} = n_{xz} \leq n_{yz} =: m$. Jos $m < n$, niin $d_n(x,y) = d_n(x,z)$, ja siten

$$\delta(x,z) + \delta(z,y) - \delta(x,y) = 2^{-m-1}(d_m(y,z) + 1) + 2^{-n-1}(d_n(x,z) - d_n(x,y)) > 0.$$

Jos taas $m = n$, niin

$$\delta(x,z) + \delta(z,y) - \delta(x,y) = 2^{-n-1}(d_n(y,z) + d_n(x,z) + \underbrace{1 - d_n(x,y)}_{\geq 0}) > 0,$$

joten joka tapauksessa $\delta(x,z) + \delta(z,y) - \delta(x,y) > 0$.

Näytetään sitten metriikoiden ekvivalenssi. Olkoon $x \in X$. Kaikille positiivisille $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on $B_\delta(x, 2^{-n_s-1}) \subset B_d(x,s)$. Myös kaikille positiivisille $\varepsilon \in \mathbb{R}$ löytyy n siten, että $2^{-n} < \varepsilon$, jolloin $B_d(x, r^n) \subset B_\delta(x, \varepsilon)$. Näin saatiin avaruuteen X ekvivalentti 1-metriikka δ. □

Seuraus 34. *Jos avaruus X on α-metrisoituva jollain numeroituvalla ordinaalilla α, niin se on 1-metrisoituva.*

Todistus. Tämä seuraa lauseista 30 ja 33, sillä ω on numeroituvista ordinaaleista ensimmäinen. □

Huomautus 35. Lauseen 17 nojalla lauseen 33 tulos ei päde kääntäen. Mikään yhtenäinen 1-metrisoituva avaruus ei nimittäin voi olla nollaulotteinen eikä siten α-metrisoituva millään äärettömällä ordinaalilla α.

Lause 36. *Olkoot α ja β äärettömiä ordinaaleja siten, että $\alpha > \beta$ ja α on säännöllisen kardinaalin ensimmäinen ordinaali. Jos X on β-metrisoituva avaruus ja sen topologia ei ole diskreetti, niin X ei ole α-metrisoituva.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että X onkin α-metrisoituva. Avaruuden X jokaisella pisteellä x on kuitenkin lauseen 9 mukaan ympäristökanta, jonka mahtavuus on $|\beta|$. Lauseen 12 mukaan tämän ympäristökannan leikkaus on avoin, mutta kuitenkin T_2-avaruudessa X on ympäristökannan leikkaus yksiö. Siispä X on diskreetti. □

Seuraus 37. *Jos avaruus X ei ole diskreetti ja se on α-metrisoituva jollain ylinumeroituvalla ordinaalilla α, niin se on β-metrisoituva täsmälleen yhdelle kardinaalinsa ensimmäiselle ordinaalille β.*

Todistus. Lauseen 30 mukaan X on β-metrisoituva jollekin kardinaalinsa ensimmäiselle ordinaalille β eikä millekään tätä pienemmälle ordinaalille. Lause 36 yleistyy helposti myös tilanteeseen, jossa kardinaalien $|\beta|$ ja $|\alpha|$ välissä on säännöllinen kardinaali. Jos $\gamma > \beta$ on kardinaalinsa ensimmäinen ordinaali, pätee kardinaalin $|\beta|$ seuraajakardinaalille $|\beta|^+$ selvästikin $|\beta| < |\beta|^+ \leq |\gamma|$, joten X ei ole γ-metrisoituva. □

Huomautus 38. Diskreetti topologinen avaruus X voidaan α-metrisoida kaikilla ordinaaleilla α, kun valitaan jokin positiivinen vakio $r \in \mathbb{R}^\alpha$ ja asetetaan eri pisteiden etäisyydeksi r.

Huomautus 39. Kun α on säännöllinen ordinaali ja $\beta < \alpha$, ei $\mathbb{R}^\alpha$ ole β-metrisoituva, sillä $\mathbb{R}^\alpha$ ei ole diskreetti. Erityisesti $\mathbb{R}^{\omega_1}$ ei ole 1-metrisoituva.

Yhteenvetona voidaan todeta, että metrisoituvuuden yhteydessä riittää tarkastella säännöllisiä äärettömiä ordinaaleja α (sekä diskreetissä tapauksessa ordinaalia 1) ja rajoittaa metriikan komponentit joukkoon $\{0, 1\}$. Jotta etäisyyksiä voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan, voidaan α-metrisoituvan avaruuden metriikka määritellä kuvauksena $d : X \times X \to \mathbb{Z}^\alpha$. Koska alussa esityssä α-metriikan määritelmässä voidaan täten korvata joukko $\mathbb{R}$ joukolla $\mathbb{Z}$ metrisoituvuuden siitä muuttumatta, saatu α-metriikan käsite ei siis perustu reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ rakenteeseen.

3.4. Jatkuvat kuvaukset. Seuraavassa oletetaan, että α ja β ovat äärettömiä säännöllisiä ordinaaleja.

Lause 40. *Jos avaruus X on α-metrisoituva ja avaruus Y on β-metrisoituva ja jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ ei ole lokaalisti vakio, niin $\alpha \leq \beta$.*

Todistus. Oletuksen mukaan on olemassa piste $x \in X$ siten, ettei kuvaus f ole vakio missään pisteen x ympäristössä. Koska kuvaus f on jatkuva, löytyy jokaiselle $\lambda \in \beta$ jokin $\mu \in \alpha$ siten, että $f(B(x, r^\mu)) \subset B(f(x), r^\lambda)$. Näin siis saadaan kuvaus $\varphi : \beta \to \alpha$, jolle $\mu = \varphi(\lambda)$ – voidaan lisäksi olettaa, että $\varphi(\lambda)$ on pienin ordinaali, jolla $f(B(x, r^{\varphi(\lambda)})) \subset B(f(x), r^\lambda)$.

Koska kuvaus f ei ole vakio missään pisteen x ympäristössä, on oltava

$$\bigcap_{\lambda \in \beta} B(x, r^{\varphi(\lambda)}) = \{x\},$$

sillä muuten joukolla $\varphi(\beta) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \beta\}$ olisi joukossa α jokin yläraja ν ja kuvaus f olisi vakio pallossa $B(x, r^\nu)$. Osoitetaan sitten, että pallot $B(x, r^{\varphi(\lambda)})$, $\lambda \in \beta$, muodostavat pisteen x ympäristökannan.

Jokainen pisteen x ympäristö U sisältää jonkin pallon $B(x, r^\nu)$, $\nu \in \alpha$. Koska joukolla $\varphi(\beta)$ ei ole ylärajaa joukossa α, on olemassa $\lambda \in \beta$ siten, että $\varphi(\lambda) > \nu$, jolloin $B(x, r^{\varphi(\lambda)}) \subset B(x, r^\nu)$. Koska jokainen pisteen x ympäristö U siis sisältää jonkin pallon $B(x, r^{\varphi(\lambda)})$, $\lambda \in \beta$, on näiden pallojen kokoelma ympäristökanta.

Tämän ympäristökannan koko on $|\varphi(\beta)|$. Koska kuvaus f ei ole vakio missään pisteen x ympäristössä, ei x ole isoloitu piste. Lauseiden 9 ja 12 nojalla pisteen x jokaisen ympäristökannan koko on $|\alpha|$. Täten $|\alpha| = |\varphi(\beta)| \leq |\beta|$, joten $\alpha \leq \beta$. $\square$

Lause 41. *Oletetaan, että avaruus X on α-metrisoituva ja avaruus Y on β-metrisoituva. Jos $\alpha < \beta$, niin jokainen jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ on lokaalisti vakio.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että tällainen kuvaus f löytyy ja valitaan piste $x \in X$, jonka missään ympäristössä tämä kuvaus ei ole vakio. Kuvauksen f jatkuvuuden takia voidaan muodostaa lauseen 40 tapaan kuvaus $\varphi : \beta \to \alpha$.

Lauseen 40 tapaan nähdään, ettei joukolla $\varphi(\beta)$ ole ylärajaa joukossa α. Määritellään joukko

$$I = \{\min \varphi^{-1}(\mu) : \mu \in \alpha, \varphi^{-1}(\mu) \neq \emptyset\} \subset \beta.$$

Tästä määritelmästä näkyy suoraan, että $\varphi(I) = \varphi(\beta)$ ja $|I| \leq |\alpha|$.

Kuten lauseessa 40, päätellään, että

$$\bigcap_{\lambda\in I} B(x, r^{\varphi(\lambda)}) = \{x\}.$$

Koska $|I| \leq |\alpha| < |\beta|$ ja ordinaali β on säännöllinen, niin joukolla I on olemassa jokin yläraja $\nu \in \beta$. Tällöin

$$\bigcap_{\lambda\in I} B(f(x), r^{\lambda}) \supset B(f(x), r^{\nu}).$$

Merkitään $U := B(f(x), r^{\nu}) \subset Y$. Koska x on avoimen joukon $f^{-1}(U)$ sisäpiste, on olemassa $\mu \in \alpha$ siten, että $B(x, r^{\mu}) \subset f^{-1}(U)$. Koska joukolla $\varphi(I)$ ei ole ylärajaa joukossa α, on jokin $\lambda \in I$, jolle $\varphi(\lambda) > \mu$. Kuitenkin $\varphi(\lambda)$ on määritelty siten, ettei joukon $B(f(x), r^{\lambda})$ alkukuva sisällä yhtään sellaista palloa $B(x, r^{\nu})$, jolla $\nu < \varphi(\lambda)$, joten $B(x, r^{\mu})$ ei sisälly alkukuvaan $f^{-1}(B(f(x), r^{\lambda}))$. Koska $U \subset B(f(x), r^{\lambda})$, ei $B(x, r^{\mu})$ voi myöskään sisältyä alkukuvaan $f^{-1}(U)$, mikä on ristiriita. □

Seuraus 42. *Olkoon avaruus X α-metrisoituva ja avaruus Y β-metrisoituva sekä kuvaus $f : X \to Y$ jatkuva. Jos f ei ole lokaalisti vakio, on $\alpha = \beta$.*

Todistus. Lause 41 estää tilanteen $\alpha < \beta$ ja lauseesta 40 seuraa $\alpha \leq \beta$. Siispä on oltava $\alpha = \beta$. □

Lause 43. *Olkoot X ja Y α-metrisiä avaruuksia sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Kuvaus f on jatkuva.*
(2) *Kuvaus f on jonojatkuva: kun jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, niin jono $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\alpha}$ suppenee kohti pistettä $f(x)$.*

Todistus. (1)⇒(2): Olkoon $\mu \in \alpha$ mielivaltainen. Osoitetaan, että on olemassa sellainen $\nu \in \alpha$, että $f(x_\lambda) \in B(f(x), r^{\mu})$ kaikilla $\lambda > \nu$, jolloin $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\alpha}$ suppenee kohti pistettä $f(x)$.

Koska piste x kuuluu avoimeen joukkoon $f^{-1}(B(f(x), r^{\mu}))$, niin on olemassa $\gamma \in \alpha$ siten, että $B(x, r^{\gamma}) \subset f^{-1}(B(f(x), r^{\mu}))$. Jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ suppenee kohti pistettä x, joten on olemassa $\nu \in \alpha$, jolle $x_\lambda \in B(x, r^{\gamma})$ kaikilla $\lambda > \nu$. Tällöin myös $f(x_\lambda) \in B(f(x), r^{\mu})$ kaikilla $\lambda > \nu$.

(2)⇒(1): Tehdään vastaoletus, ettei kuvaus f olekaan jatkuva jossain pisteessä $x \in X$. Tällöin on olemassa $\mu \in \alpha$ siten, että kaikilla $\lambda \in \alpha$ pallosta $B(x, r^{\lambda})$ löytyy piste x_λ, jolle $f(x_\lambda) \notin B(f(x), r^{\mu})$. Selvästi jono $(x_\lambda)_{\lambda\in\alpha}$ suppenee kohti pistettä x, mutta jonon $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\alpha}$ kaikki alkiot ovat pallon $B(f(x), r^{\mu})$ ulkopuolella, joten se ei suppene kohti pistettä $f(x)$. □

4. Metrisoituvuus

Seuraavaksi tutkitaan, millä ehdoin topologinen avaruus on metrisoituva. Tähän todistetaan osittaiseksi vastaukseksi Urysonin metrisointilauseen yleistykseksi lause 48.

Määritelmä 44. Olkoon α ylinumeroituvan kardinaalin ensimmäinen ordinaali. Merkitään $I = [0, 1]$. Määritellään α-kuutio I^{α} periyttämällä sinne metriikka avaruudesta $\mathbb{R}^{\alpha}$. Kuution kantaympäristöiksi voidaan valita tulot $\prod_{\lambda\in\alpha} U_\lambda$, missä on $\mu \in \alpha$

siten, että $U_\lambda = \{t\}$ jollekin $t \in I$ kun $\lambda < \mu$ ja $U_\lambda = I$ kun $\lambda \geq \mu$ – tämän kannan mahtavuus on $|\alpha|$.

LEMMA 45. *Olkoon avaruus X T_4 ja siellä erilliset suljetut joukot E ja F. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to I$ siten, että $f(E) = \{0\}$ ja $f(F) = \{1\}$.*

TODISTUS. Tämä perustulos on esitetty mm. kirjassa [**2**]. □

LAUSE 46. *Olkoon avaruus X T_2 ja T_4 ja sen kanta $\{B_j \subset X : j \in J\}$, ja olkoon α ylinumeroituvan kardinaalin $|J|$ ensimmäinen ordinaali. Oletetaan lisäksi, että jokainen leikkaus avoimia joukkoja, jonka mahtavuus on alle $|J|$, on avoin. Tällöin X voidaan upottaa kuutioon I^α.*

TODISTUS. Olkoon P niiden parien $(i, j) \in J \times J$ joukko, joilla $\overline{B_i} \subset B_j$. Selvästi $|P| \leq |J|$, joten joukon P alkiot voidaan indeksoida siten, että $P = \{(i_\lambda, j_\lambda) : \lambda \in \alpha\}$.

Kaikilla $\lambda \in \alpha$ astetaan jatkuva kuvaus $f_\lambda : X \to I$ siten, että $f_\lambda(\overline{B_{i_\lambda}}) = \{1\}$ ja $f_\lambda(X \setminus B_{j_\lambda}) = \{0\}$ – Urysonin lemman 45 mukaan tällainen on olemassa koska X on T_4. Ottamalla nämä komponenttikuvauksiksi saadaan kuvaus $f : X \to I^\alpha$.

Kuvaus f on jatkuva: Olkoon $x \in X$ ja U mikä tahansa pisteen $f(x)$ ympäristö. Tällöin on $\mu \in \alpha$ ja joukot $U_\lambda \subset I$, $U_\lambda = I$ kun $\lambda \geq \mu$, siten, että joukko U sisältää tulojoukon $\prod_{\lambda \in \alpha} U_\lambda$. Koska jokainen f_λ on jatkuva, löytyy kullekin $\lambda < \mu$ avoin joukko $V_\lambda \subset X$ siten, että $f_\lambda(V_\lambda) \subset U_\lambda$. Leikkaus $V = \bigcap_{\lambda < \mu} V_\lambda$ on pisteen x ympäristö ja selvästi $f(V) \subset \prod_{\lambda \in \alpha} U_\lambda$.

Olkoot $x, y \in X$ kaksi eri pistettä. Tällöin on T_2-ominaisuuden vuoksi $j \in J$, jolle $x \in B_j$ ja $y \notin B_j$. Säännöllisyyden nojalla taas löytyy $i \in J$ siten, että $\overline{B_i} \subset B_j$ ja $x \in B_i$, joten $(i, j) = (i_\lambda, j_\lambda)$ jollekin $\lambda \in \alpha$. Nyt $f_\lambda(x) = 1$ ja $f_\lambda(y) = 0$, joten f on injektio.

Olkoon $g : f(X) \to X$ kuvauksen f käänteiskuvaus. Olkoon $x \in X$ ja U sen ympäristö; osoitetaan, että löytyy $V \subset I^\alpha$, jolle $g(V \cap f(X)) \subset U$. T_4-ominaisuuden takia löytyy $\lambda \in \alpha$, jolle $x \in B_{i_\lambda}$ ja $B_{j_\lambda} \subset U$. Tällöin $f_\lambda(x) = 1$ ja joukko $V = \prod_{\mu \in \alpha} V_\mu$, missä $V_\lambda = (0, 1]$ ja $V_\mu = I$ muille μ, on pisteen $f(x)$ ympäristö avaruudessa I^α. Koska kaikille $y \in g(V \cap f(X))$ selvästi $f(y) \in V$, niin $f_\lambda(y) \in (0, 1]$, joten $y \in B_{j_\lambda} \subset U$. Siispä $g(V \cap f(X)) \subset U$ ja g on jatkuva. □

HUOMAUTUS 47. Kardinaalin $\aleph_0$ tapaus lauseeseen 46 saadaan Urysonin upotuslauseesta, kun käytetään Hilbertin kuutiota I^ω tulotopologialla.

LAUSE 48. *Olkoon α ylinumeroituvan kardinaalin ensimmäinen ordinaali. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(1) *X on T_1- ja T_3-avaruus, jolla on kanta, jonka mahtavuus on $|\alpha|$, ja jokainen leikkaus avoimia joukkoja, jonka mahtavuus on alle $|\alpha|$, on avoin.*
(2) *X on α-metrisoituva ja sillä on kanta, jonka mahtavuus on $|\alpha|$.*
(3) *X voidaan upottaa avaruuteen I^α.*

TODISTUS. Implikaatio (1)⇒(3) on todistettu pääosin lauseessa 46 – T_4-ominaisuus seuraa vaadituista ominaisuuksista lauseiden 10 ja 11 perusteella. Koska I^α on määritelmän mukaan metrisoituva ja sen kannan mahtavuudeksi todettiin $|\alpha|$, niin (3)⇒(2). Seuraus (2)⇒(1) on taas α-metriikan yleinen ominaisuus. □

HUOMAUTUS 49. Tarkastellaan lopuksi yleisemmän topologisen avaruuden X metrisoituvuutta. Avaruudessa X voi olla ei-isoloitu piste y, jolla on ympäristökanta

$\{U_j : j \in J_y\}$ ja sellainen ominaisuus, että kaikki kardinaalia $|J_y|$ pienemmät ympäristöjen leikkaukset sisältävät ympäristön, ja toinen piste x, jolla on samat ominaisuudet mutta eri joukolla J_x. Jos $|J_x| \neq |J_y|$ ja molemmat kardinaalit sattuvat olemaan säännöllisiä, ei lauseiden 9 ja 12 perusteella voi olla mitään ordinaalia α, jolle koko avaruus X olisi α-metrisoituva.

Määritellään sitten κ_x kullakin $x \in X$ kuten lauseessa 13. Tällöin X jakautuu pistevieraisiin aliavaruuksiin $X_\kappa = \{x \in X : \kappa_x = \kappa\}$, joiden metrisoituvuudelle ei enää ole edellä kuvatun kaltaista estettä. Oletetaan sitten, että kukin X_κ on $\alpha(\kappa)$-metrisoituva, kun $\alpha(\kappa)$ on kardinaalin κ ensimmäinen ordinaali. Kiinnostavaa olisi tarkastella, miten aliavaruuksien X_κ metriikat suhtautuvat koko avaruuden topologiaan ja voidaanko nämä metriikat jatkaa koko avaruuden metriikoiksi tai luultavammin semimetriikoiksi siten, että koko avaruuden X topologian voisi tuottaa niiden avulla. Tai kenties aliavaruus $\bigcup_{\eta \leq \kappa} X_\eta$ on avoin avaruudessa X kaikilla säännöllisillä κ – näiden asioiden selvittäminen jää ikävä kyllä tämän työn ulkopuolelle.

Viitteet

[1] G. J. Tourlakis. *Lectures in Logic and Set Theory, Volume 2 : Set Theory.* Cambridge University Press, 2003.

[2] J. Väisälä. *Topologia II.* Limes ry., 2005.