

Matematiikalla näkee Maapallon läpi

Akatemiaklubi

26.11.2021

Joonas Ilmavirta

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Jyväskylän yliopisto

Suora ja käänteinen ongelma

Suora ongelma

- Tiedetään syy
(esim. rumpun muoto)
- Pitää löytää seuraus
(esim. rumpun ääni)

Käänteinen ongelma

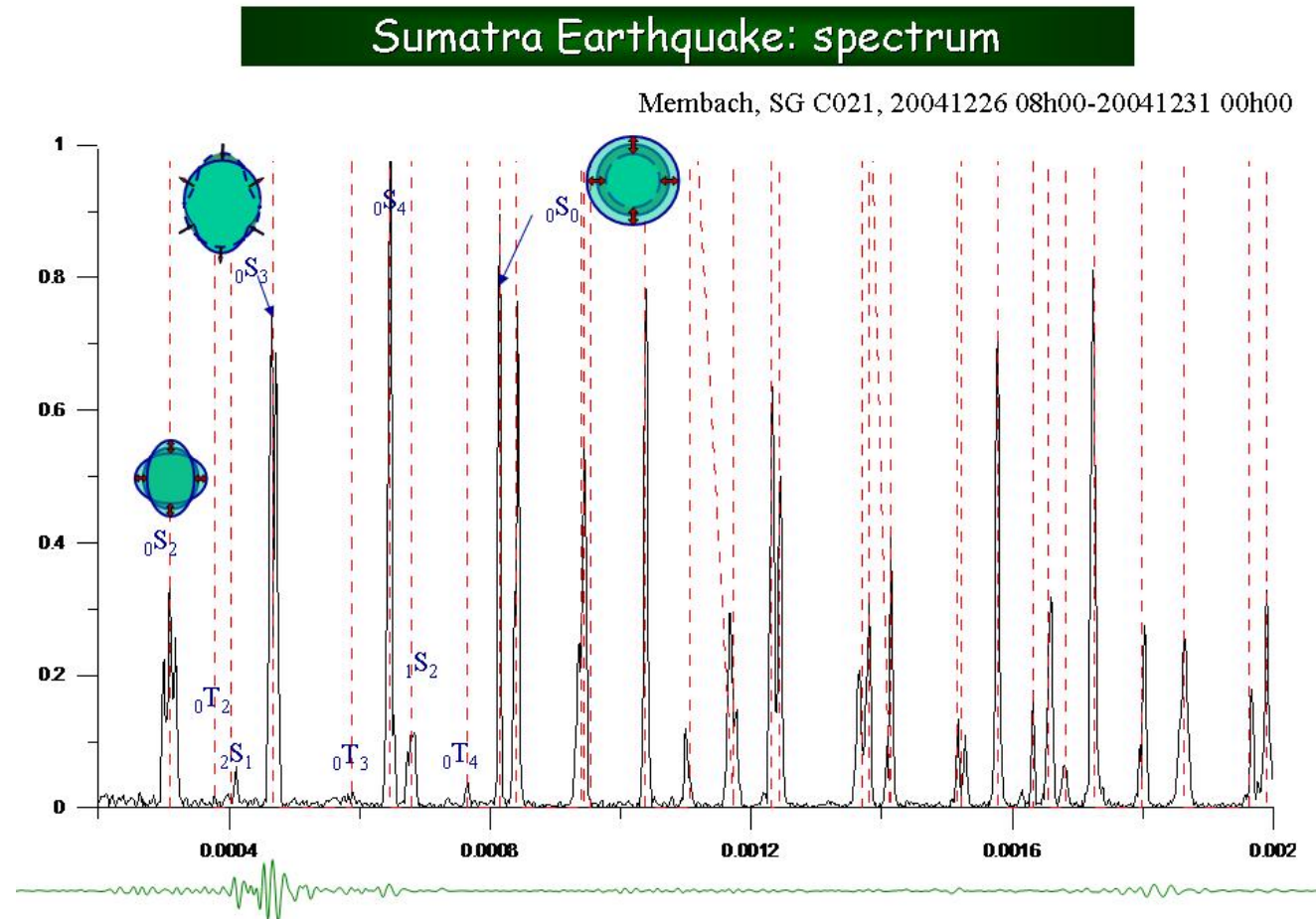
- Tiedetään seuraus
(esim. rumpun ääni)
- Pitää löytää syy
(esim. rumpun muoto)

Kacin inversio-ongelma:

Voiko rumpun äänen kuulla?

Isompi rumpu

- Syy: Maapallon sisärakenne (tiheys, mineraalit, kiderakenne, olomuoto, elastiset ominaisuudet)
- Seuraus: Maapallon värähtelytaajuudet (vapaiden värähtelyiden spektri)



Inversio- eli käänteisongelmat

- Monia asioita ei voi mitata suoraan, joten on pakko mitata epäsuorasti: Maapallo, luu, betonipalkki...
- Tätä esiintyy kaikkialla: fysiikka, lääketiede, teollisuus...
- Mallintaminen muuttaa käytännön ongelmat matematiikan ongelmiksi.
- Nämä ongelmat ovat vaikeita – liian helposti ratkeavia ei yleensä lasketa mukaan.

Sama ongelma kahdella kielellä

Fysikaalinen ongelma

Jos tiedetään kaikkien vapaiden oskillaatioiden taajuus, voidaanko siitä päätellä aineen tiheys ja rakenne planeetan sisällä?

Matemaattinen ongelma

Määräytyykö reunallinen Riemannin monisto yksikäsitteisesti Laplace–Beltrami-operaattorinsa Neumann-spektristä?

(Leloversio!)

Matemaattisia työkaluja *tähän* ongelmaan

- Differentiaaligeometria: Riemann- tai Finsler-monistot.
- Osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja niiden spektraaliteoria.
- Distribuutioteoria (yleistetyt funktiot).
- Integraalimuunnoksia: Fourier-muunnos, Abel-muunnos, Röntgenmuunnos.
- Mikrolokaali analyysi: Singulariteettien eteneminen.
- Jatkuva-aikaiset dynaamiset systeemit.

Inversio-ongelmien teoria

- Vasta riittävän abstraktilla matematiikalla on kiinnostavia sovelluksia. Mitä tarkoittaa derivoida spektriä geometrian suhteen?
- Monet epäsuoran mittaamisen ongelmat (esim. Röntgen-tomografia, EIT-kuvantaminen ja seismologia) ovat fysikaalisesti hyvin erilaisia mutta matemaattisesti sukua toisilleen.
- Usein ongelmat on hyödyllistä nähdä geometrisesti, ja monet ei-geometriset ongelmat voi geometrisoida aalto–hiukkasdualismin (eli mikrolokaalin analyysin) avulla.

Kaksi geometrisaatiota

Gravitaatio

- Newton:
Planeetta kulkee käyrää reittiä.
Auringon vetovoima saa reitin kaartumaan.
- Einstein:
Planeetta kulkee suoraan.
Aurinko saa itse geometrian kaareutumaan.

Geofysiikka

- Vanha näkemys:
Maanjärstysaalto kulkee käyrää reittiä. Äänennopeuden vaihtelu saa reitin kaartumaan.
- Uusi näkemys:
Maanjärstysaalto kulkee suoraan. Äänennopeus määrittää (monimutkaisen!) geometrian.

Geometrisoitu geomatematiikka

- Maasta oppiminen Maata mittaamalla!
- Fysikaalinen ongelma: Selvitä materiaaliparametrit (tiheys, elastiset ominaisuudet, olomuoto...) planeetan sisällä.
- Matemaattinen ongelma: Selvitä Maapallon muoto – myös pisteittäin.
- Edestakainen mallinnus:
 - Ongelma geometrisoidaan, geometrinen ongelma ratkaistaan, ratkaisu tulkitaan alkuperäisessä kontekstissa.
 - Nämä kolme vaihetta näyttävät eriltä.

Näkökulmia geomatematiikkaan

- Erilaisia dataa: Värähtelytaajuuudet, seismiset aallot, kulkuajat...
- Mallien valintaperusteena fysikaalinen tarkkuus, ei matemaattinen mukavuus: sileys, isotropia, polarisaatio...
- Soveltuvaa matematiikkaa – puhtaasti muttei turhaan.

Kiitos!

Jos haluat jutella myöhemmin:
joonas.ilmavirta@jyu.fi