

STRUVEN KETJULLA MAAPALLOA
MITTAAMAAN:
**MAAPALLON GEOMETRIA
JA SEN SELVITTÄMINEN**

Joonas Ilmavirta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto
3.10.2017

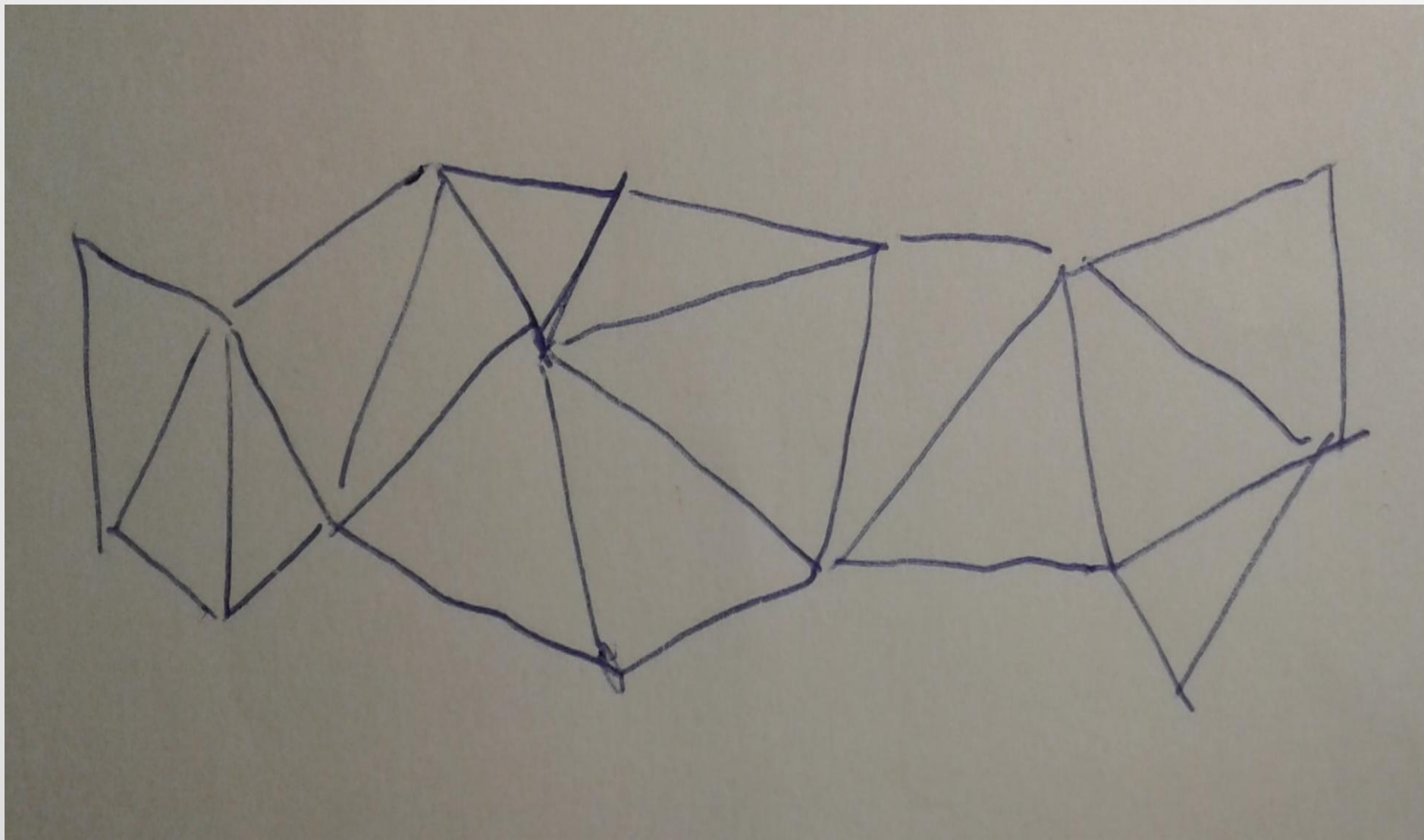
OSA I: MAAPALLON GEOMETRIA

MAAPALLON MUOTO

- Minkä muotoinen Maapallo on ja miten sen voisi mitata?
- Miten Maapallon muotoa voisi kuvailla?
- Mitä pinnan kaarevuus tarkoittaa pinnalta itseltään katsottuna?

KOLMIMITTAUKSEN IDEA

- Rakennetaan kolmioverkko.
- Mitataan perusviivan pituus.
- Mitataan kolmioiden kulmat.
- Yhdistetään kolmiot ja piirretään kartalle.



YHTEENSOPIVUUS

- Mitatuista kolmioista yritetään muodostaa kartta, jossa mittasuhteet ovat täysin oikein.
- Jos mittaus on riittävän tarkka tai alue riittävän suuri, se ei onnistu.
- Kartta menee ryppyyn!
- Syy epäonnistumiselle: Maapallo on kaareva.

ASKARTELUESIMERKKEJÄ

- Liimaa yhteen kolmioita, joissa on ”liian paljon kulmia”.
- Liimaa yhteen kolmioita, joissa on ”liian vähän kulmia”.
- Levitä paperi pallon ympärille.
- Levitä paperi banaanin ympärille.

KAHDENLAISTA KAAREVUUTTA

- Pinta voi olla kaareva kahdella tavalla.
- Positiivinen kaarevuus: kun paperin levittää pinnalle, paperi menee ryppyyn.
- Negatiivinen kaarevuus: kun paperin levittää pinnalle, paperi repeää.
- Maapallo on positiivisesti kaareva.

KAAREVUUDEN VAIHTELU

- Onko kaarevuus joka paikassa sama? Onko Maapallo täysin pyöreä?
- Onko kaarevuus suurempi päiväntasaajalla kuin navoilla? Onko Maapallo mandariini?
- Onko kaarevuus pienempi päiväntasaajalla kuin navoilla? Onko Maapallo sitruuna?
- Kaarevuus täytyy pystyä kvantifioimaan.

KAAREVIEN PINTOJEN TEORIA

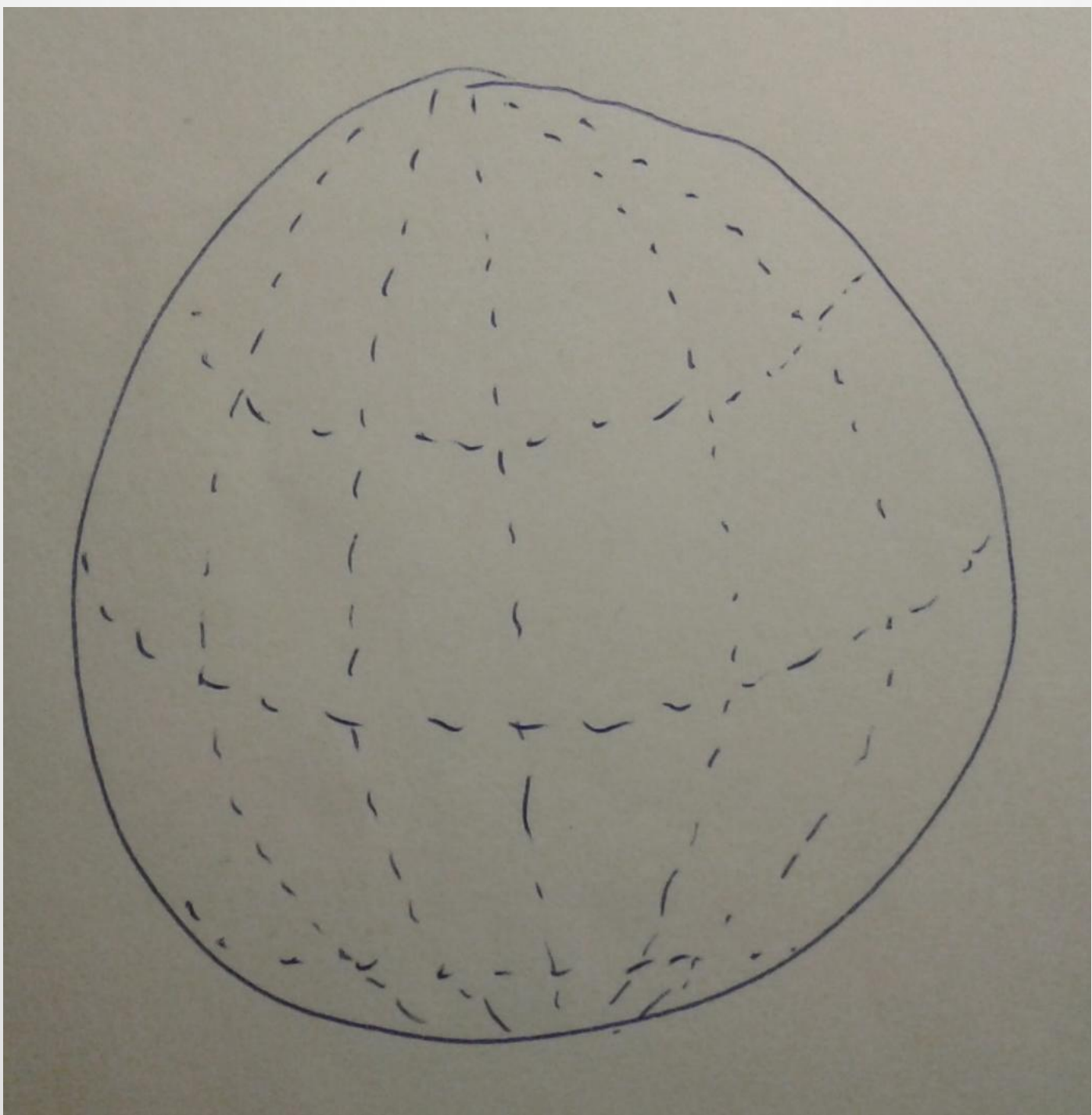
- Mikä on kaareva pinta?
- Miten pinnan voi nähdä "sisäisesti" tai "ulkoisesti"?
- Miten kaarevalla pinnalla mitataan etäisyyttä ja kulmia?
- Mikä on suora viiva kaarevalla pinnalla?

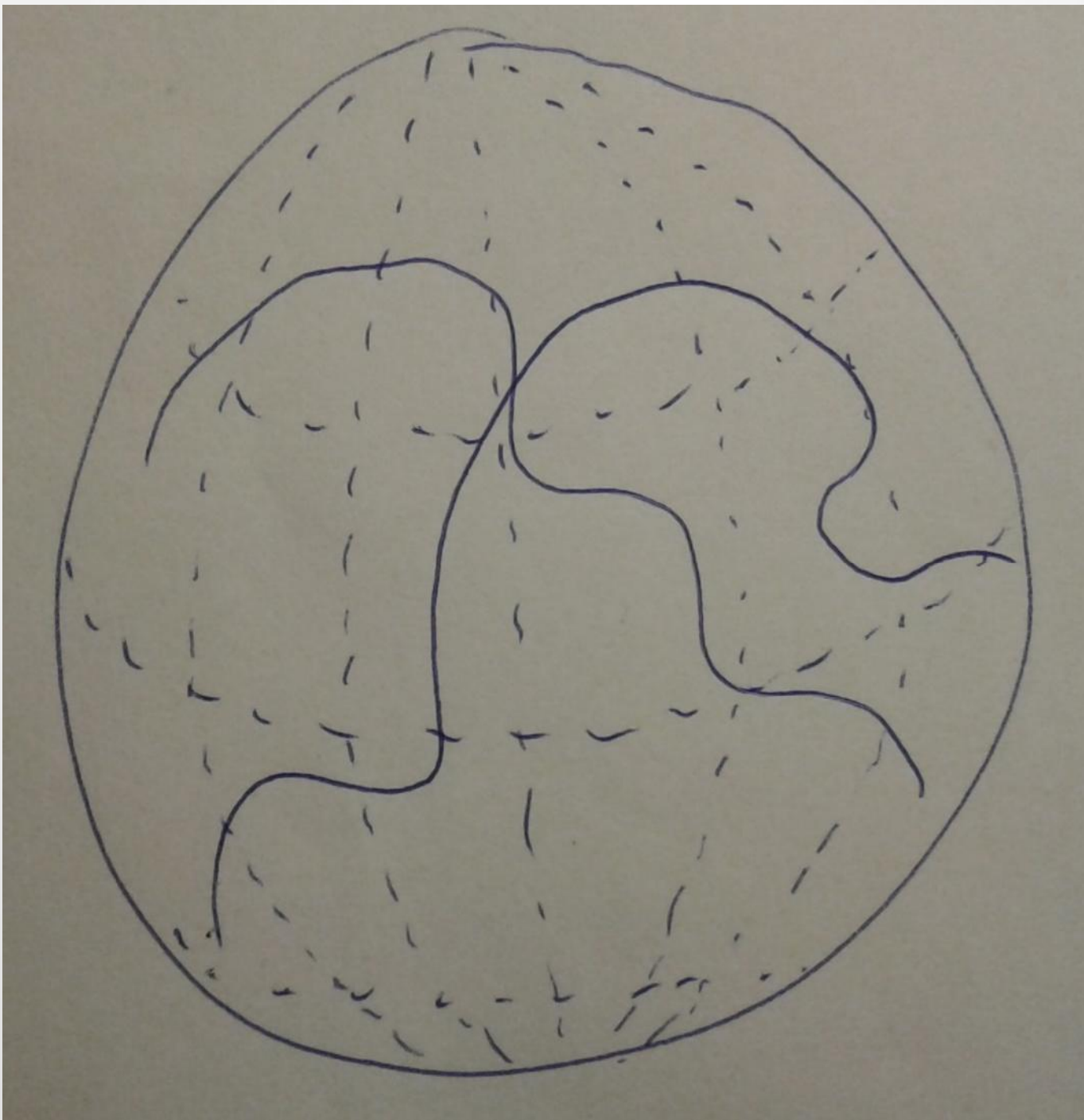
DIFFERENTIAALIGEOMETRIA

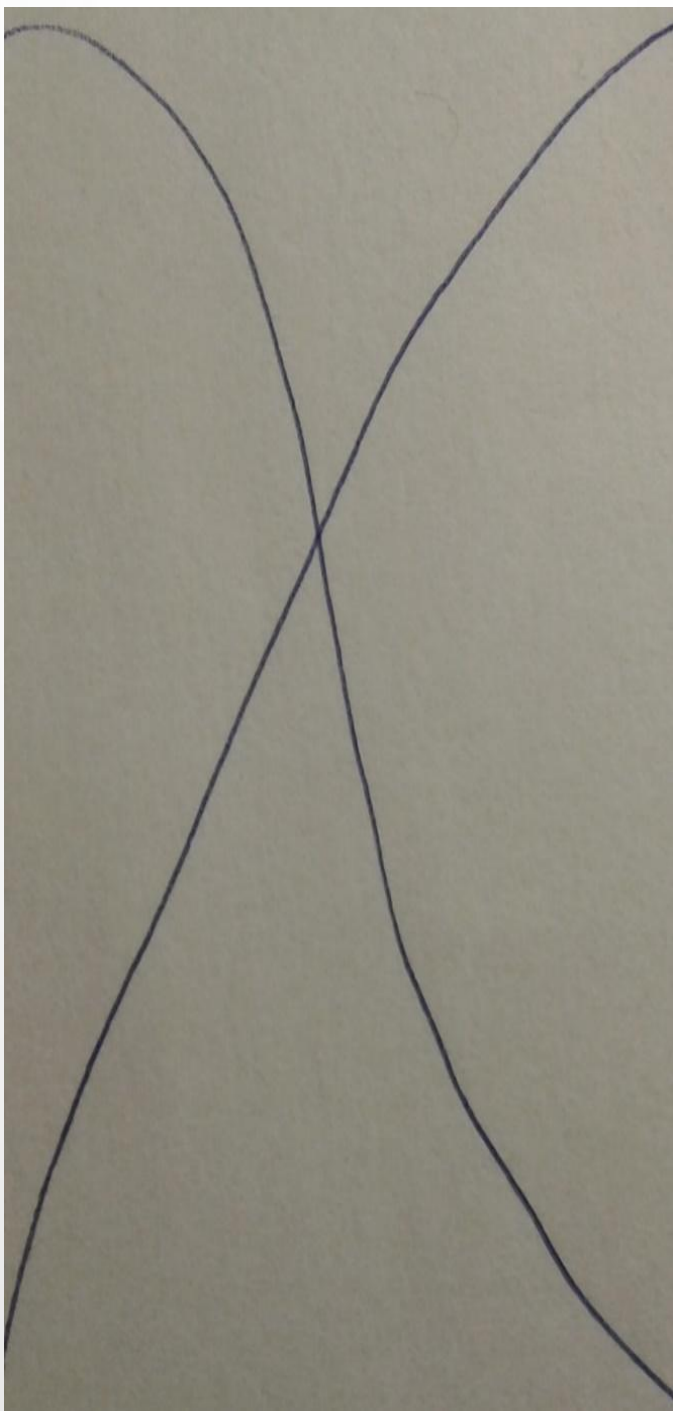
- Euklidinen tasogeometria on koulusta tuttua (unohdettua?), ja tasossa osataan laskea etäisyyksiä ja kulmia.
- Kun kaarevaa pintaa katsoo riittävän läheltä, se näyttää euklidiselta tasolta.
- Differentiaaligeometriassa voidaan tutkia mm. etäisyyksiä ja kulmia kaarevalla pinnalla katsomalla hyvin läheltä.
- Pintoja tutkitaan ”sisältä päin”.

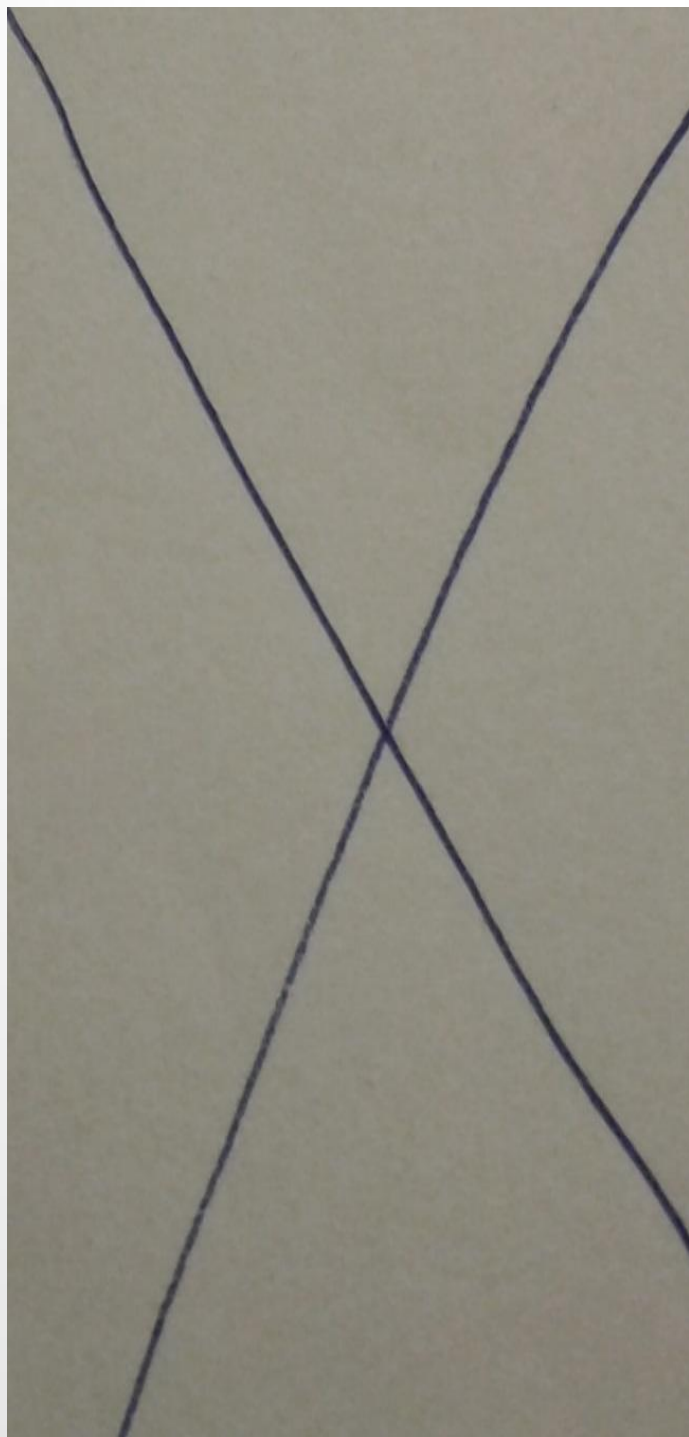
KAHDEN KÄYRÄN VÄLINEN KULMA

- Kuvittele kaksi pitkää tietä Maapallon pinnalla. Mikä on niiden välinen kulma?
- Kun katsoo riittävän läheltä, tiet näyttävät kahdelta suoralta tasossa.
- Kulma mitataan lopulta tasossa.



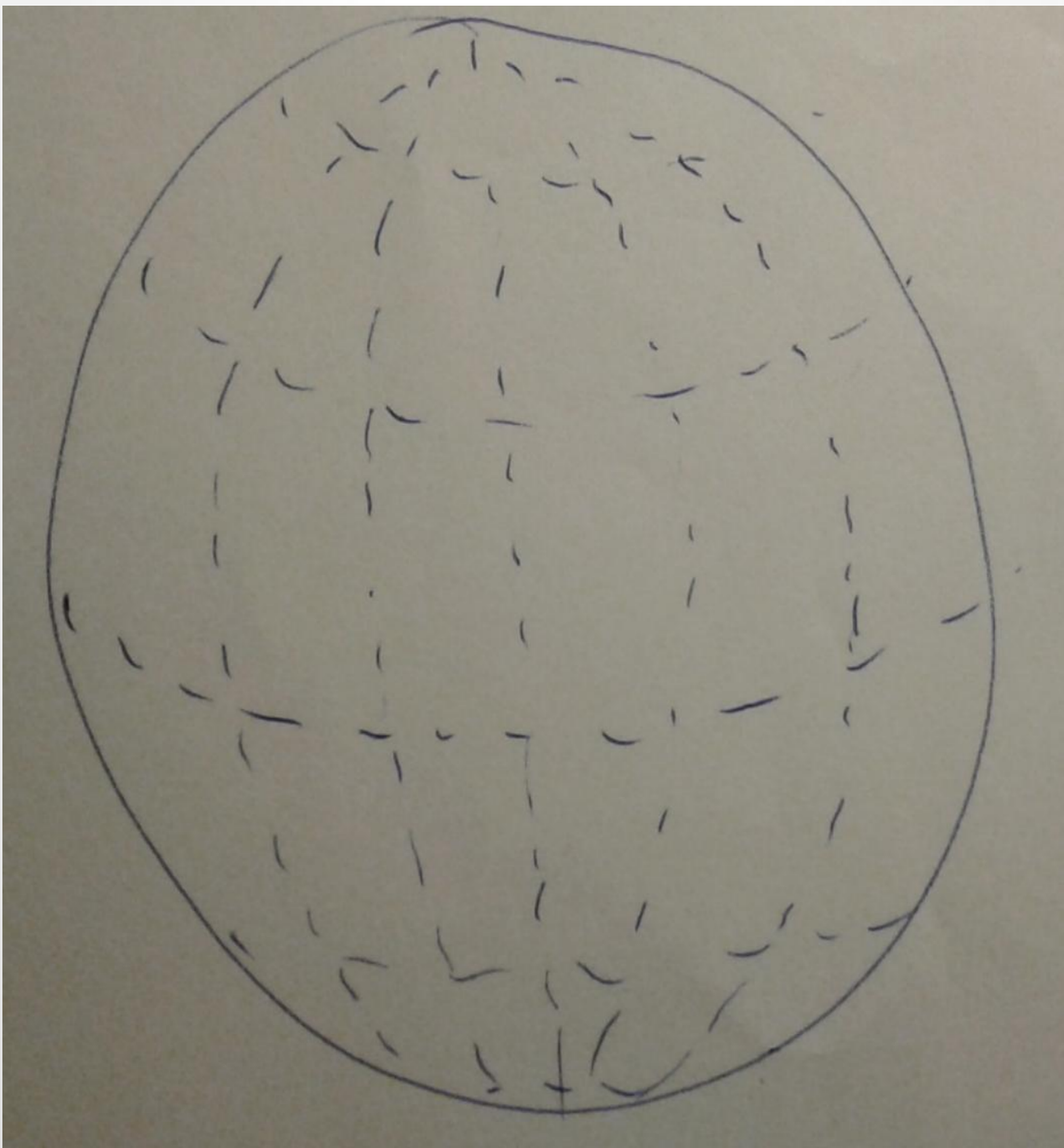


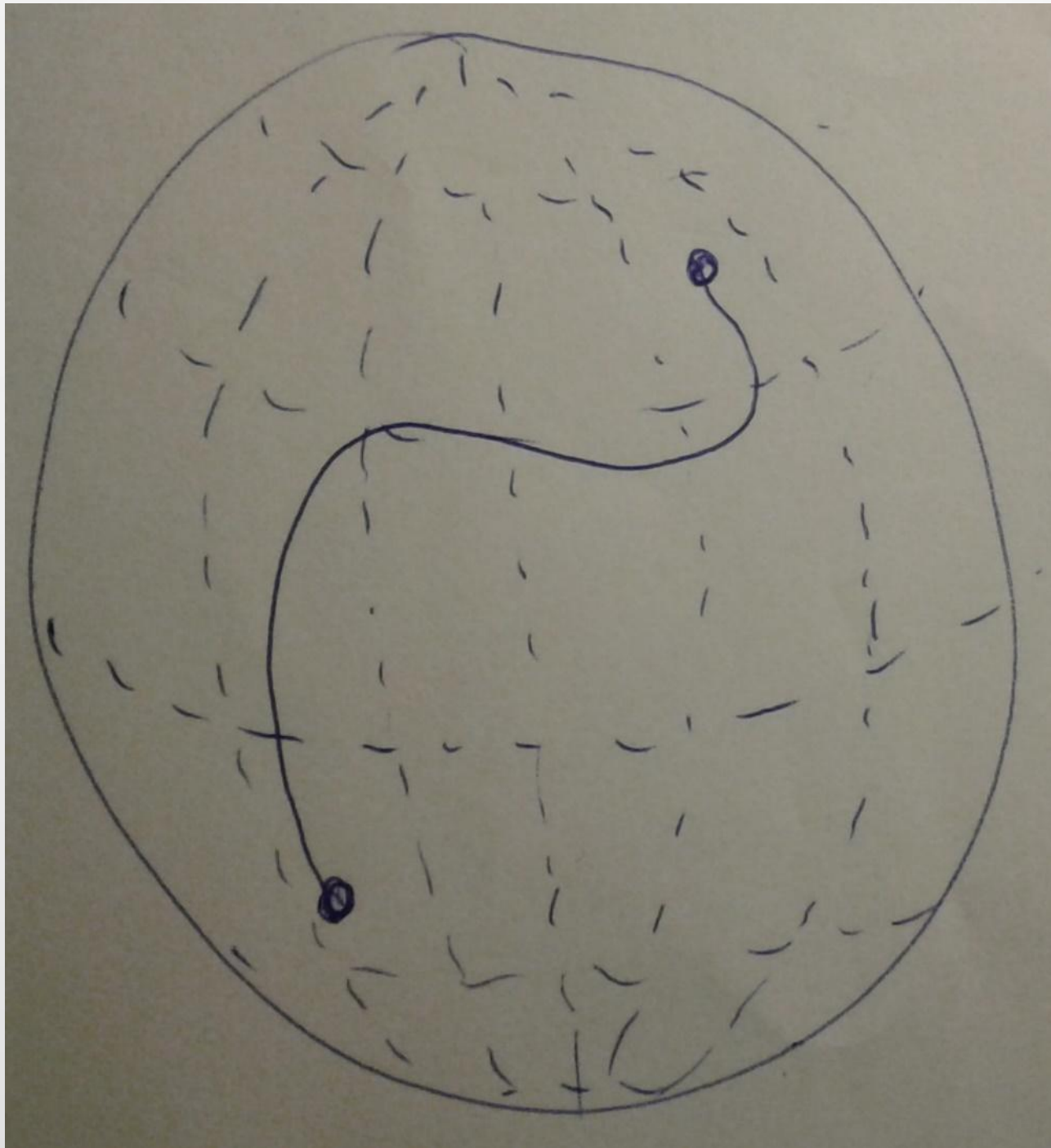


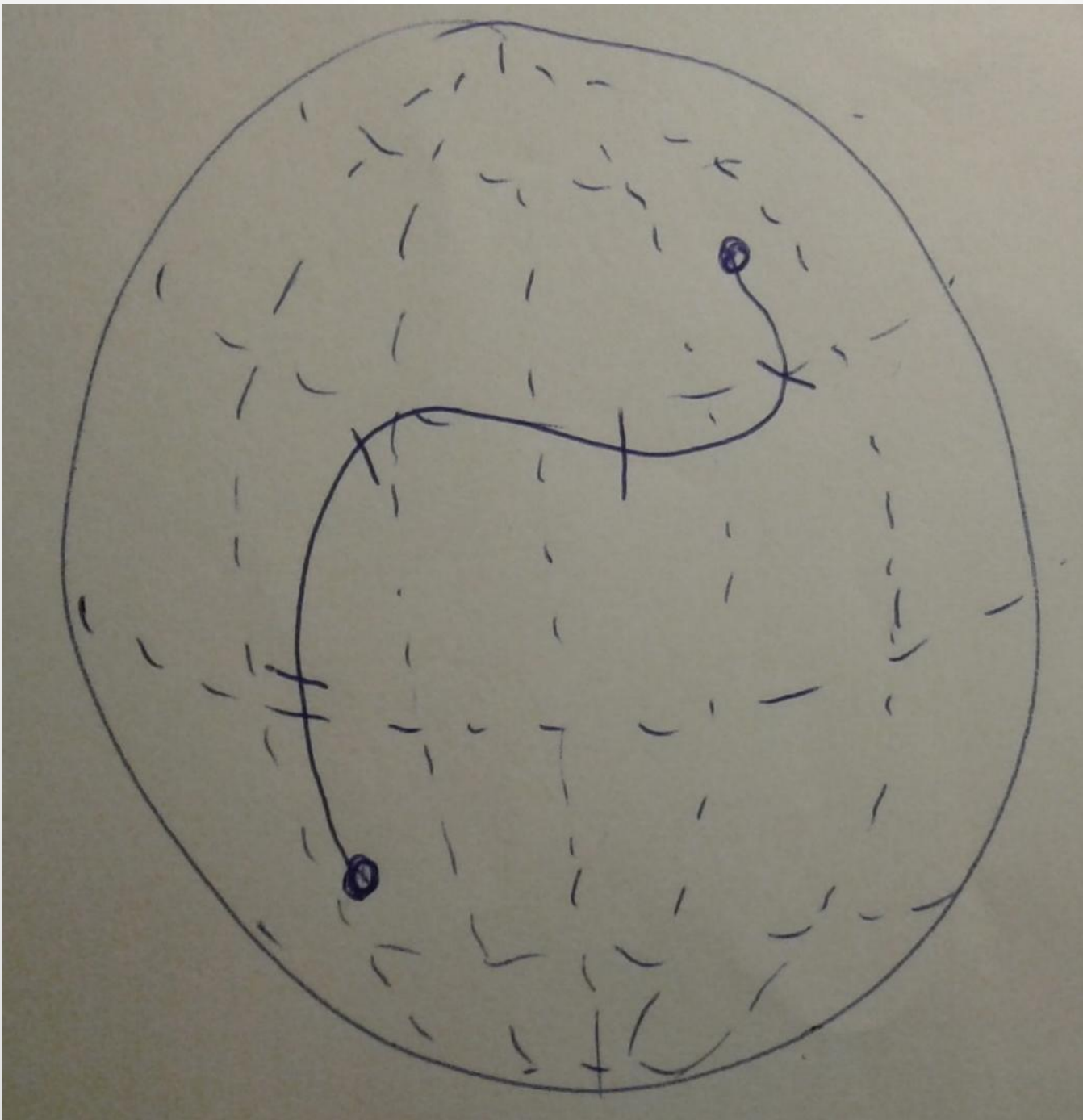


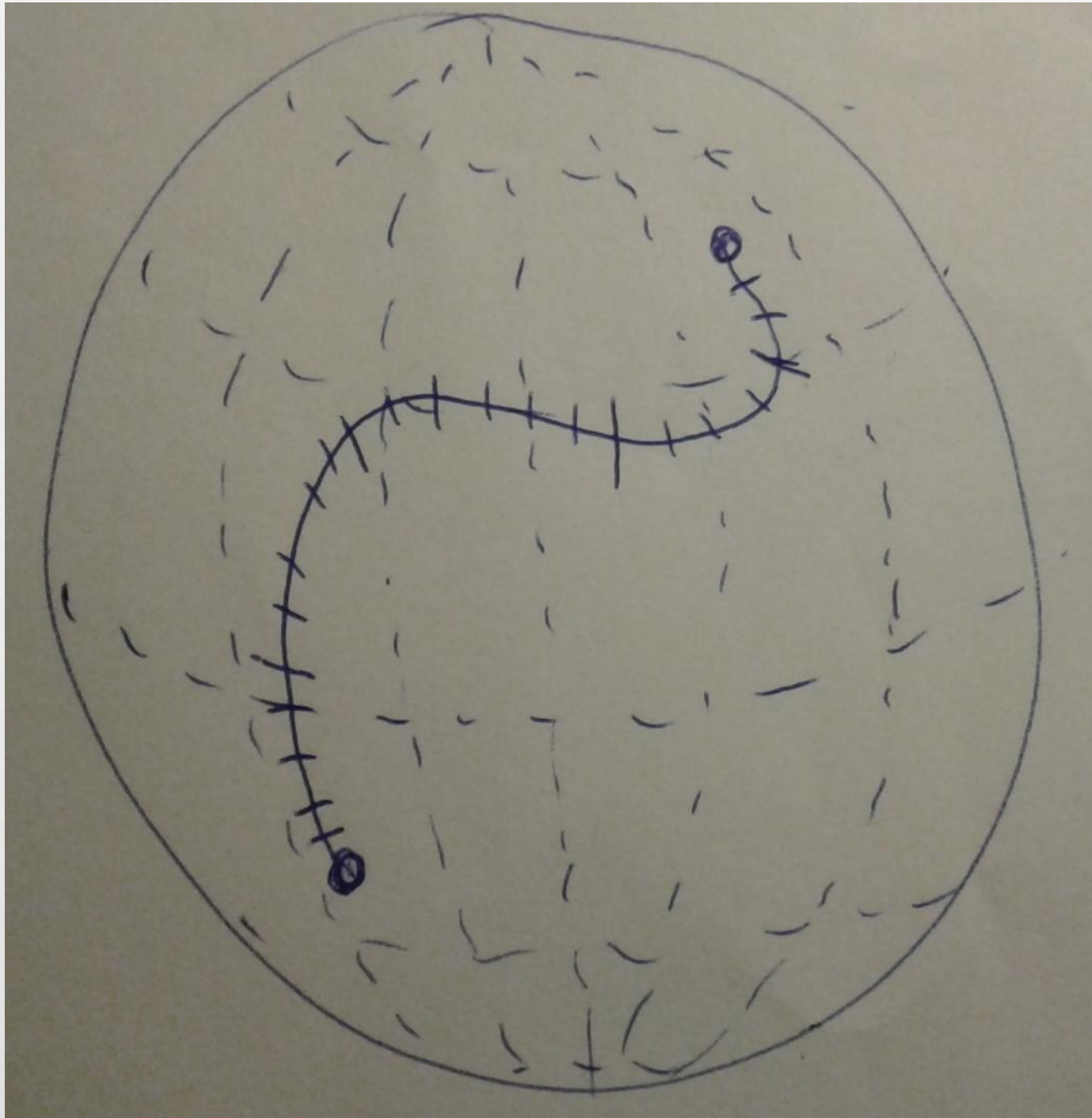
KÄYRÄN PITUUS

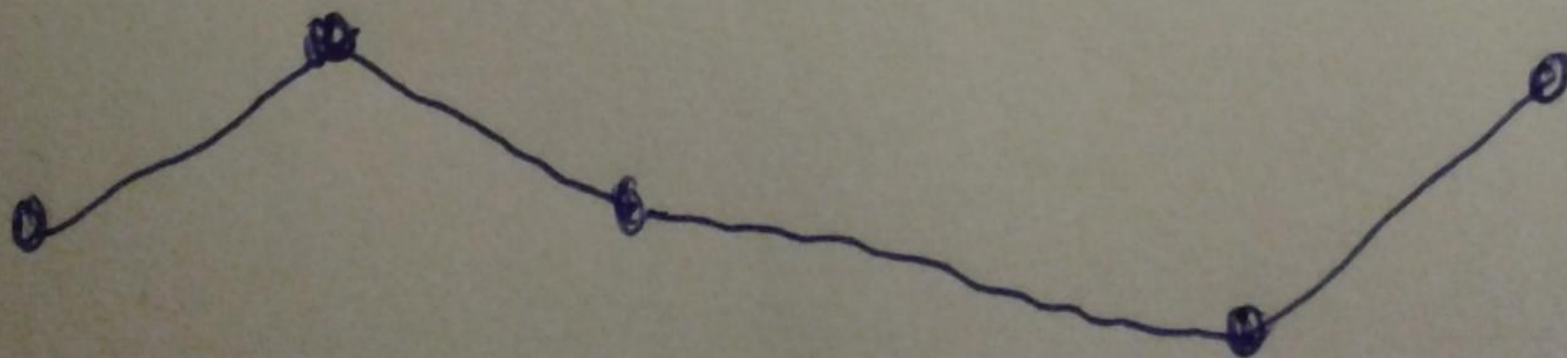
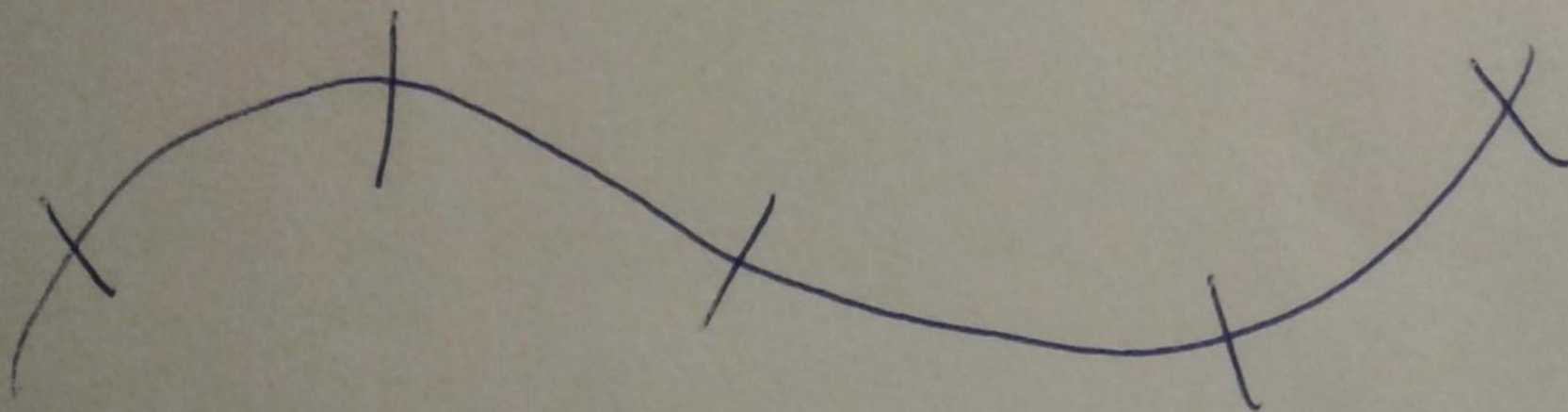
- Kuvittele pitkä tie Maapallon pinnalla. Mikä on tien pituus?
- Jaetaan tie hyvin lyhyisiin pätkiin.
- Kun pätkä on riittävän lyhyt, se näyttää jonalta tasossa.
- Lasketaan näiden janojen pituudet yhteen.





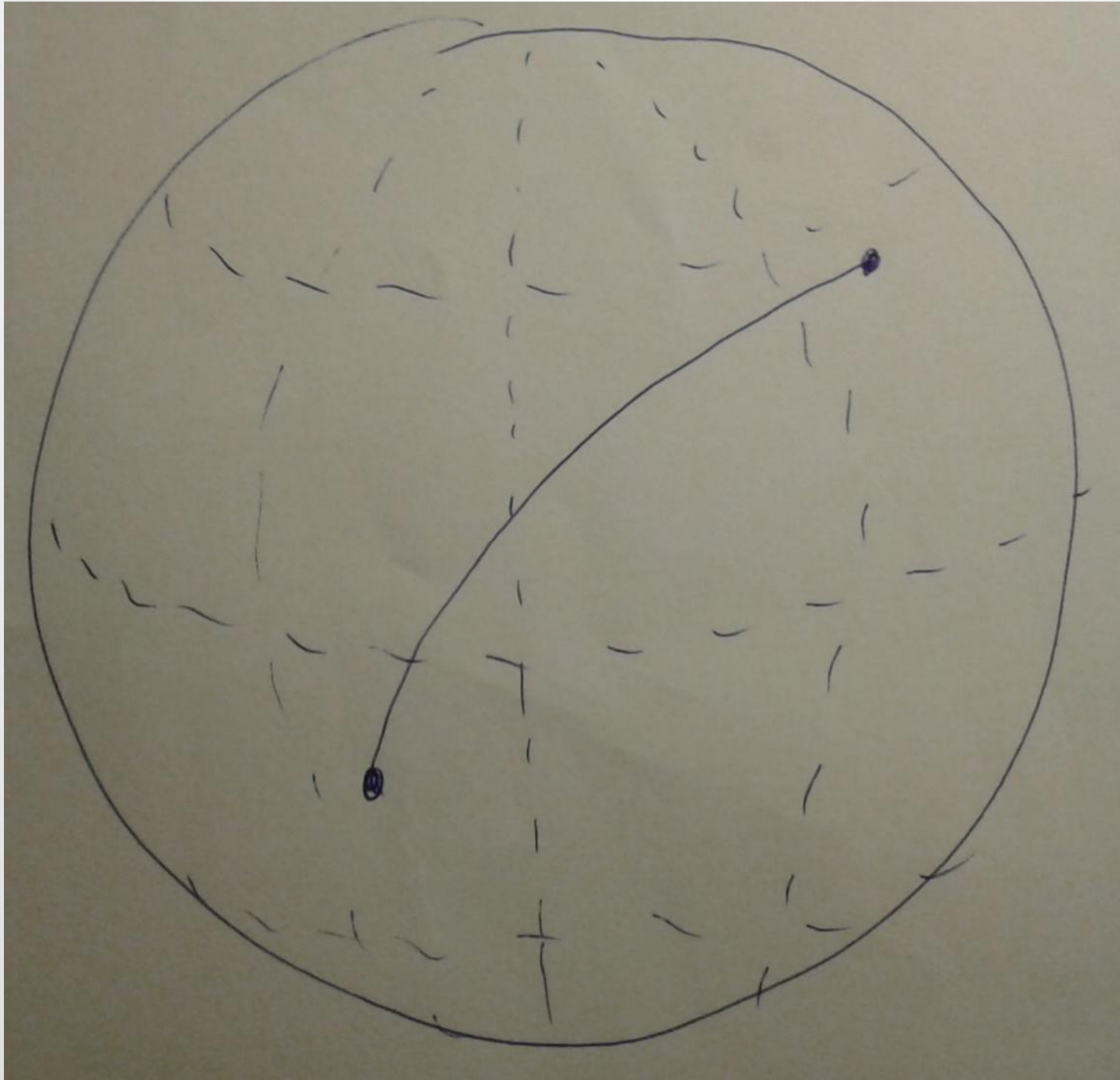






GEODEESI

- Kuvittele pingottavasi lanka Maapallon pinnalla kahden pisteen välille.
- Lanka asettuu niin suoraan kuin se on pintaa vasten mahdollista.
- Suora viiva kaarevassa avaruudessa on nimeltään geodeesi.
- Lyhin tie tulee kulkemalla suoraan.



KOLMIO

- Nyt osaamme piirtää kaarevalle pinnalle kolmion: Valitaan kolme kärkipistettä ja piirretään niiden välille suorat viivat.
- Mitataan kolmion sivujen pituudet, kulmat ja pinta-ala.
- Tavallisessa tasogeometriassa kolmion kulmien summa on 180° , mutta kaarevalla pinnalla se voi olla muuta.
- Kaarevuus voidaan *määritellä* tämän ilmiön avulla.

KAAREVUUS

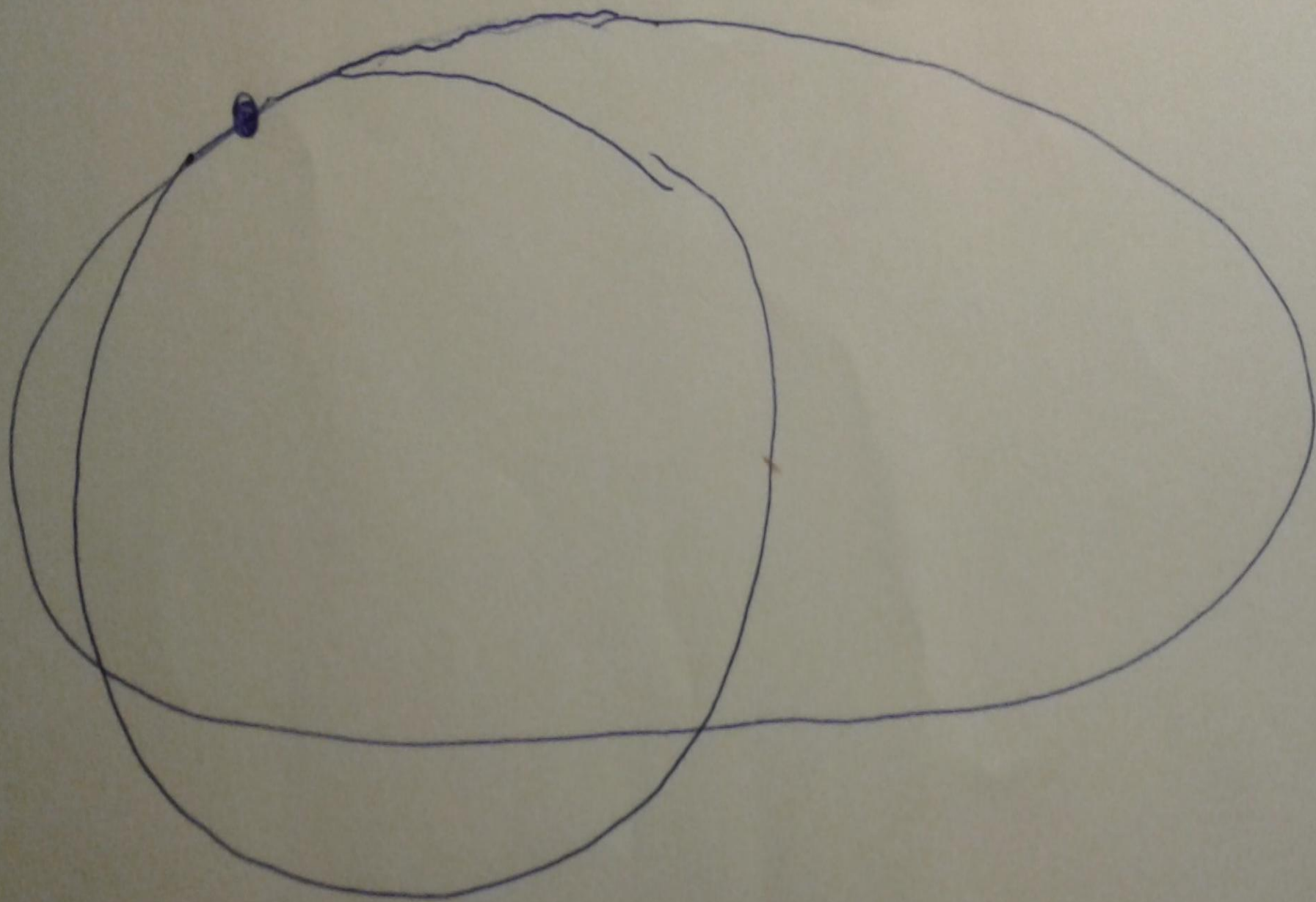
- Kolmion kaarevuus on $K = \frac{\text{kulmien summa} - 180^\circ}{\text{pinta-ala}}$.
- Kaarevuus on poikkeama euklidisesta geometriasta.
- Poikkeama on pieni, joten kulmamittauksen pitää olla tarkka.
- Kaarevuus määriteltiin siis ”teoreettisella kolmiomittauksella”.

PALLON KAAREVVUUS

- Jos pallon säde on R , sen kaarevuus on $K = 1/R$.
- Jos säde on iso, kaarevuus on pieni.
- Maapallo on iso, ja siksi sen kaarevuutta on vaikea havaita lyhyillä etäisyyksillä.
- Kun palloa katsoo lähempää, sen säde ikään kuin kasvaa ja kaarevuus pienenee. Siksi pallo muuttuu läheltä katsottuna tasoksi ($K = 0$).

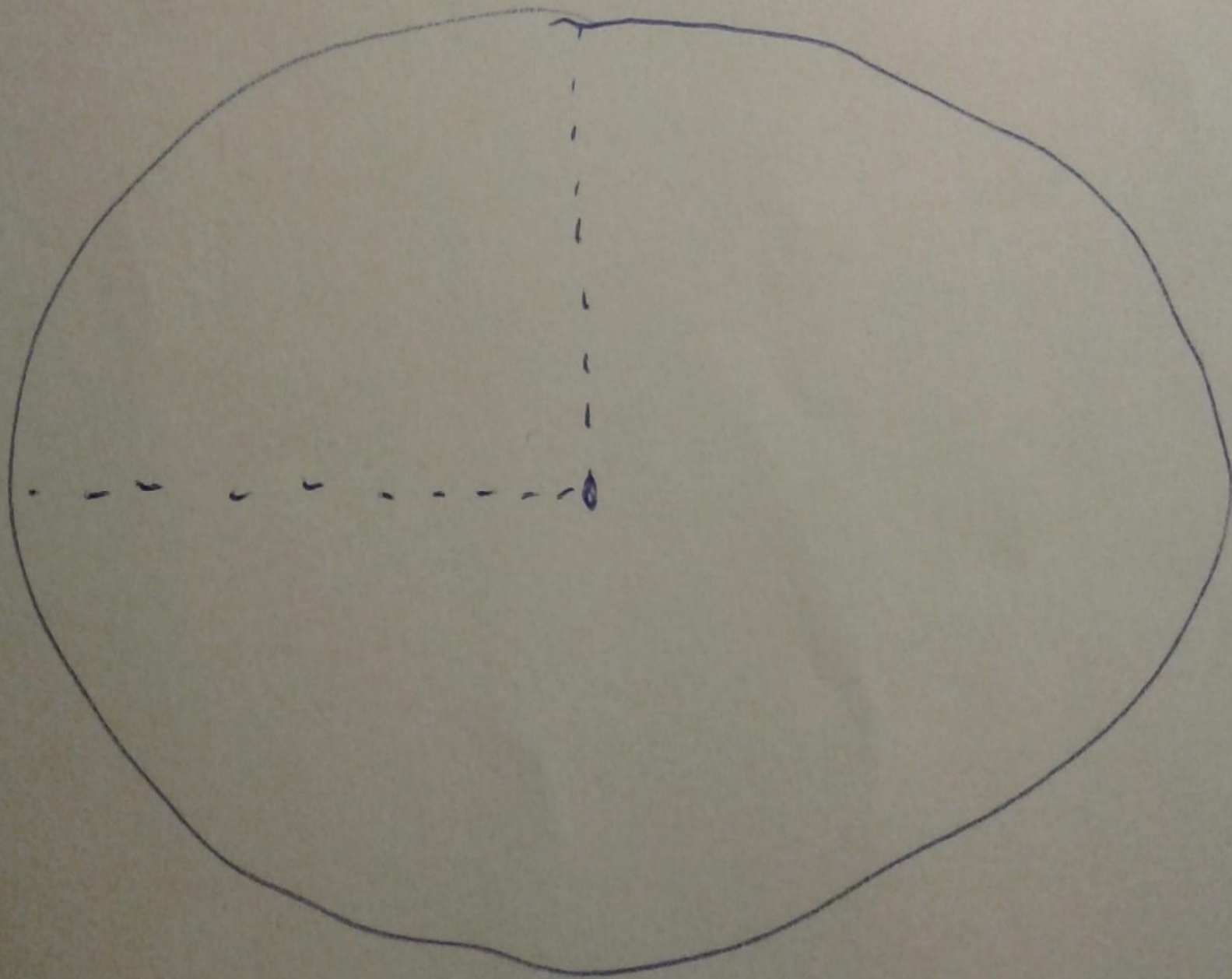
KAAREVUUS PISTEESSÄ

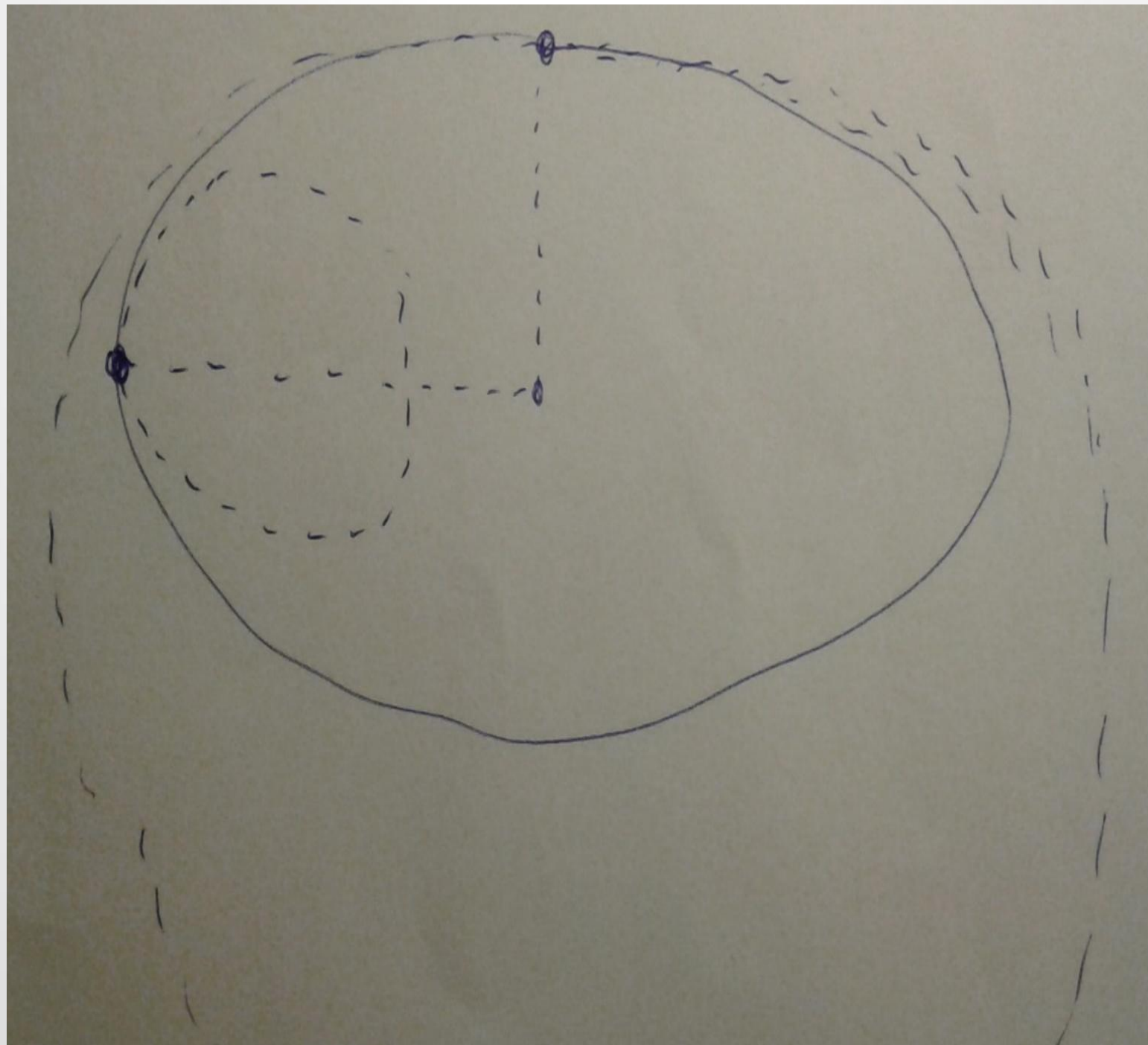
- Mitä tarkoittaa kaarevuus yhdessä pisteessä? Mikä on Maapallon kaarevuus Jyväskylässä?
- Kun katsoo läheltä, Maapallo vaikuttaa tasolta. Kun katsoo vähän kauempaa (tarkemmin), se näyttää pallolta. Jos se näyttää pallolta, jonka säde on R , sen kaarevuus on $K = 1/R$.
- Siis:
kaarevuus pisteessä =
$$\frac{1}{\text{pinnalle parhaiten sopivan pallon säde}}$$
- Vaihtoehtoisesti voi tutkia oikein pieniä kolmioita.



MAAPALLON PINNAN MUOTO

- Onko Maapallo navoiltaan litistynyt?
- Onko kaarevuus navoilla pienempi?
- Ovatko kolmiot ”euklidisempia” navoilla?





DIFFERENTIAALIGEOMETRIA

- Pinnan jokaiseen pisteeseen voidaan piirtää tangenttitaso.
- Tangenttitasossa voidaan tehdä euklidista geometriaa.
- Tämä euklidinen geometria vaihtelee pisteestä pisteeseen. Tämä ”paikallisen euklidisen geometrian” vaihtelu on differentiaaligeometriaa.
- Differentiaaligeometrian panivat alulle Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ja Bernhard Riemann (1826–1866).

ETYMOLOGISIA HUOMAUTUKSIA

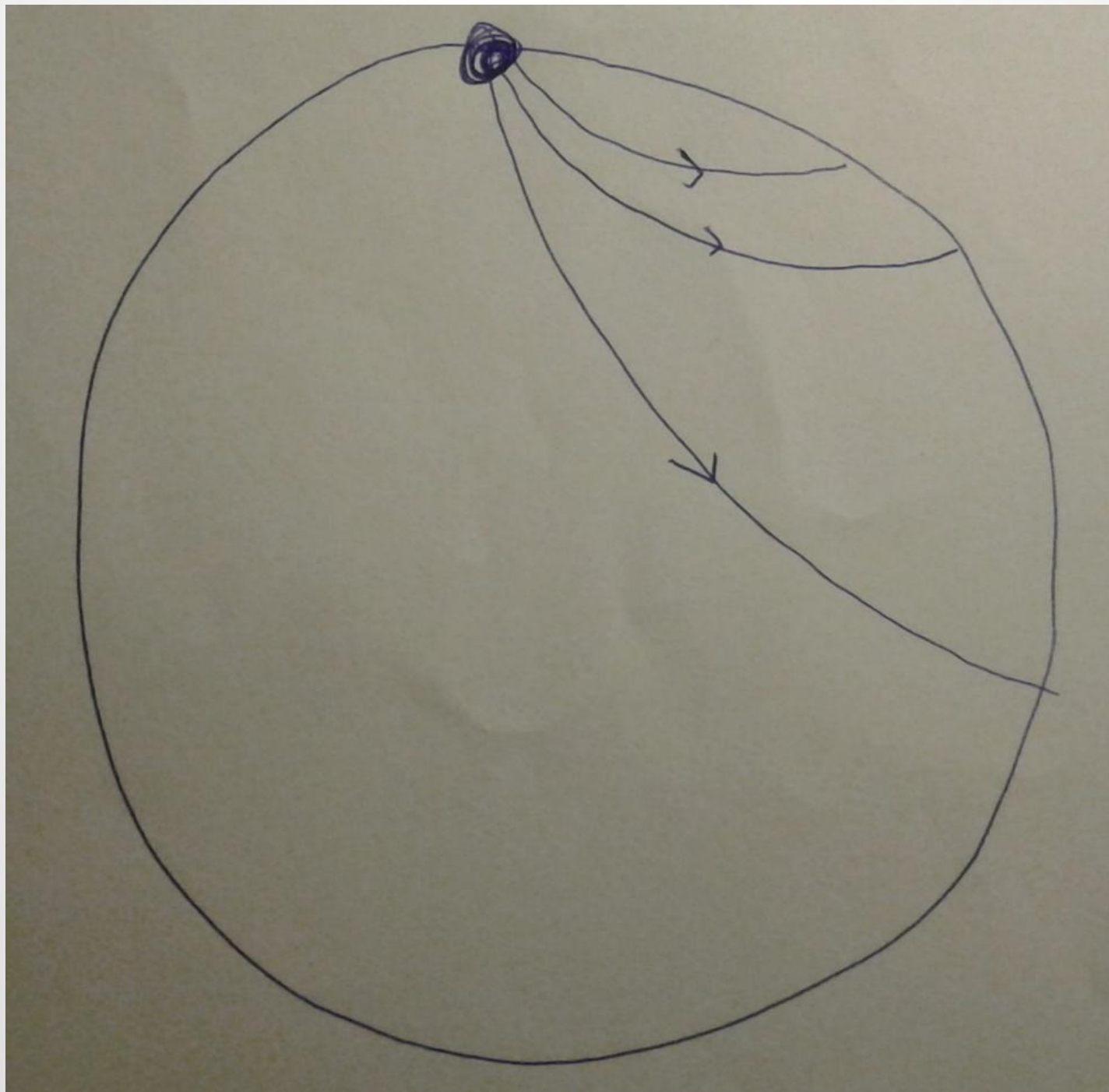
- Geometria tarkoittaa alun perin maan mittaamista.
- (Differenciaali)geometria on hyödyllistä Maapallon mittaamisessa!
- Geodesia tutkii maapallon kokoa ja muotoa.
- Geodeesi on suora viiva kaarevalla pinnalla.

STRUVEN JALANJÄLJILLÄ

- Maapallon pinnan geometria nykyään hyvin selvillä.
- Enää sitä ei tarvitse mitata sisäisesti (pinnalla pysyen), vaan sitä voi mitata myös ulkoisesti (satelliiteilla).
- Aika on ajanut kolmiomittauksesta ohi tieteellisenä menetelmänä.
- Onko Maapallon geometriassa enää mitään epäselvää?

MAANJÄRISTYKSIÄ

- Kun tapahtuu maanjäristys, järistysaallot kulkevat planeetan läpi.
- Näiden seismisten aaltojen matka-aika voidaan mitata.
- Voiko matka-aikoja mittaamalla selvittää planeetan rakenteen?



MAANJÄRISTYSAALLOT

- Aallot eivät kulje suoraan vaan kaartuvat kohti pintaa.
- Reittien kaartuminen johtuu äänennopeuden vaihtelusta. Äänennopeus kasvaa syvemmälle mentäessä.
- Halutaan selvittää äänennopeus Maan sisällä matka-aikamittauksista.

UUSI NÄKÖKULMA

- Idea: Aallot eivät kaarru vaan kulkevat suoraan.
- Seuraus: Geometria onkin epäeuklidinen.
- Maapallo on kaareva kolmiulotteinen avaruus.
- Jos äänennopeus olisi kaikkialla sama, olisi kaarevuus nolla.
- Maapallon sisäosien geometria on äänennopeuden vaihtelua.

SAMA IDEA AIEMMIN: GRAVITAATIO

- Vanha näkökulma (Newton): Aurinko aiheuttaa voiman, joka saa planeetan liikkumaan käyrää rataa pitkin.
- Uusi näkökulma (Einstein): Aurinko tekee avaruudesta kaarevan ja planeetta kulkee suoraa rataa pitkin käyrässä avaruudessa.
- Fysiikan geometrisointi on hyödyllistä.

GEOMETRINEN ONGELMA

- Tiedetään matka-ajat (etäisyydet) ja halutaan selvittää geometria.
- Ongelma on geometrinen!
- Pinnan geometria tunnetaan, sisäosien geometriaa ei täysin: Struven työ kesken.
- Esimerkiksi: Riippuuko äänennopeus suunnasta?
- Mittaukset pitää tehdä reunalta, sisään ei pääse.
- Maapallon geometriaa tutkitaan tänään.

ESIMERKKEJÄ GEOMATEMATIIKASTA

- Matka-aikatomografia.
- Maapallon värähtelytaajuudet.
- Miten kerrokset vaikuttavat matka-aikoihin ja taajuuksiin?
- Maapallon sisäosien epäsuora mittaaminen matemaattisesti kuuluu inversio-ongelmien alaan.

OSA II:
MIKSI MATEMAATIKKO
NÄKEE SEINÄN LÄPI?

SUORA JA KÄÄNTEINEN ONGELMA

SUORA ONGELMA

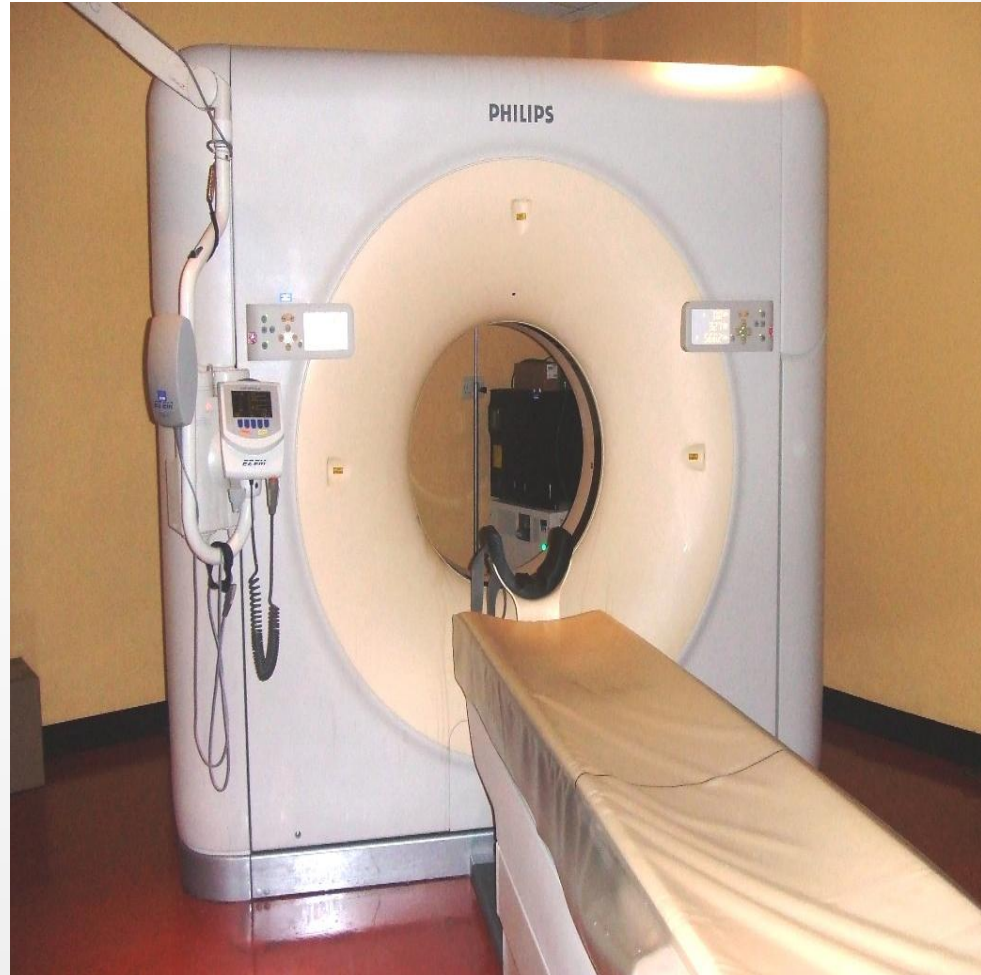
- Tiedetään syy (esim. rummun muoto)
- Pitää päätellä seuraus (esim. rummun ääni)

KÄÄNTEINEN ONGELMA

- Tiedetään seuraus (esim. rummun ääni)
- Pitää päätellä syy (esim. rummun muoto)

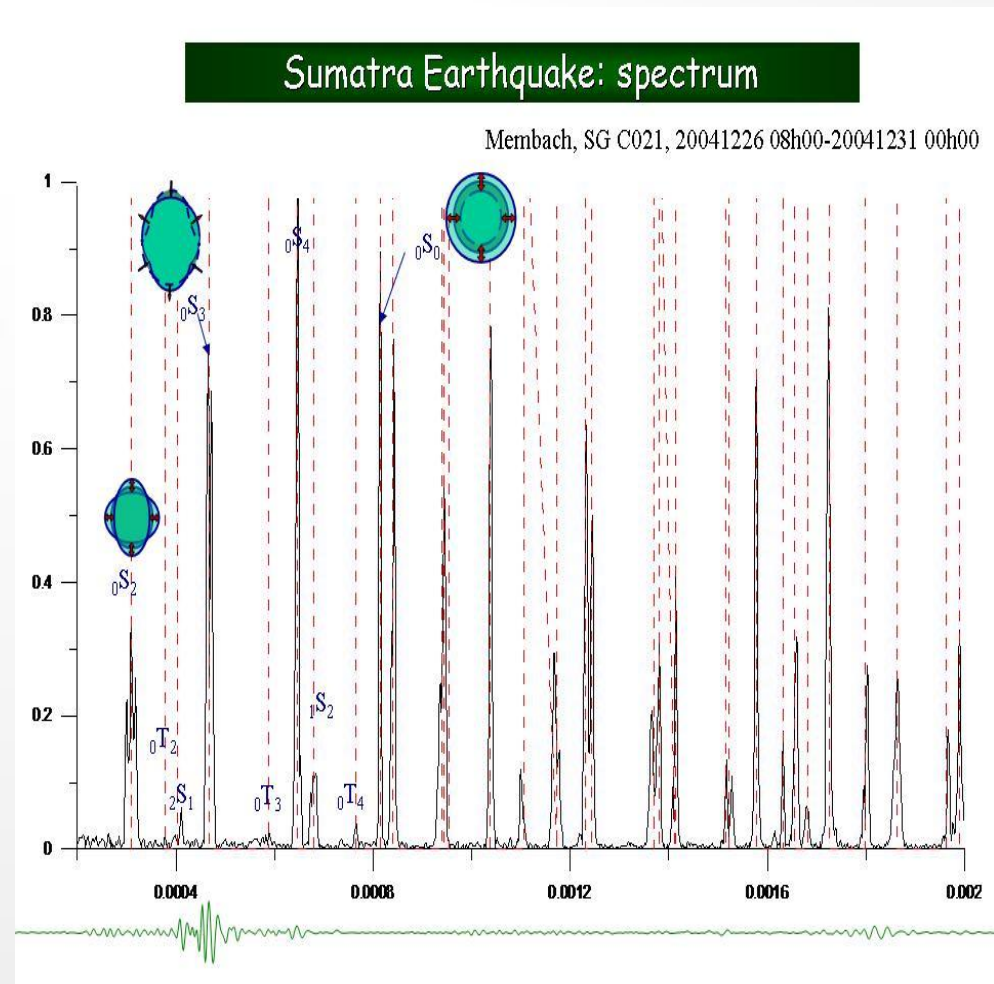
ONGELMA 1: ONKO LUU MURTUNUT?

- Syy: Luut ja muu ihmisen sisärakenne
- Seuraus: Röntgensäteiden vaimeneminen (Röntgen-kuvat eri suunnista)



ONGELMA 2: MITÄ MAAPALLON SISÄLLÄ ON?

- Syy: Maapallon sisärakenne (mineraalit, niiden tiheys, kiderakenne, olomuoto...)
- Seuraus: Maapallon värähtelytaajuuudet



ONGELMA 3: ONKO BETONIPALKKI EBJÄ?

- Syy: Betonipalkin säröt ja muut virheet
- Seuraus: Betonipalkin sähkönjohtavuus



KÄÄNTEISONGELMAT

- Monia asioita ei voi tutkia suoraan. Pitää mitata epäsuorasti – nähdä jonkin seinän läpi.
- Näitä käänteisongelmia on paljon.
- Fysiikka, lääketiede, teollisuus...
- Vaikeita *matemaattisia* ongelmia!

ONGELMA 1: ONKO LUU MURTUNUT?

FYSIIKAN ONGELMA

Jos mitataan Röntgensäteen vaimeneminen jokaisesta suunnasta, voidaanko päätellä paikasta riippuva vaimennuskerroin (eli kappaleen 3-ulotteinen rakenne)?

MATEMATIIKAN ONGELMA

Jos tunnetaan jonkin (kolmiulotteisessa avaruudessa määritellyn) funktion integraali kaikkien suorien yli, voidaanko itse funktio päätellä?

ONGELMA 2: MITÄ MAAPALLON SISÄLLÄ ON?

FYSIIKAN ONGELMA

Jos tunnetaan Maapallon
kaikki värähtelytaajuudet,
voidaanko päätellä
aineen tiheys ja rakenne
Maan sisällä?

MATEMATIIKAN ONGELMA

Jos tunnetaan reunallisen
Riemannin moniston
Laplace-Beltrami-
operaattorin Neumann-
spektri, voidaanko
pätellä itse monisto?

ONGELMA 3: ONKO BETONIPALKKI EHJÄ?

FYSIIKAN ONGELMA

Voidaanko päätellä kappaleen (betoni tai muu) sähkönjohtavuus tekemällä sen pinnalla jännite- ja virtamittauksia?

MATEMATIIKAN ONGELMA

Voidaanko $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$ päätellä jos tiedetään

$$(u|_{\partial\Omega}, \nu \cdot \gamma \nabla u|_{\partial\Omega})$$

kaikille $u \in W^{1,2}(\Omega)$ jotka toteuttavat yhtälön $\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0$?

YHTEENVETO

- Fyysikko tai muu soveltaja näkee seinän, muttei näe sen läpi ilman matemaatikkoa.
- Matemaatikolle nämä seinät ovat hyvin samanlaisia.

OSA III: KOONTI

KYSYMYKSIÄ

- Struven ketjun avulla voitiin mitata Maapallon pinnan kaarevuuden vaihtelua. Mitä se tarkoittaa?
- Maapallo on positiivisesti kaareva. Mitä se tarkoittaa?
- Kaareva pinta alkaa näyttää laakealta kun sitä katsoo läheltä. Mitä se auttaa?
- Tutkimustyö Struven jalanjäljissä jatkuu Maan sisällä. Mitä samaa ja eriä siinä on kuin Struven työssä?
- Struven työn jatkaminen liittyy inversio-ongelmiin. Mitä ovat inversio-ongelmat?



KIITOS!

Materiaalia ja lisätietoja:
[http://users.jyu.fi/~jojapeil/
joonas.ilmavirta@jyu.fi](http://users.jyu.fi/~jojapeil/joonas.ilmavirta@jyu.fi)