Inversio-ongelmia ja matematiikan sovelluksia

Joonas Ilmavirta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto

Täydennyskoulutus 5.6.2017

I
Johdanto
Miksi matemaatikko näkee seinän läpi?

Nopea katsaus inversio-ongelmiin.

Suora ja käänteinen ongelma

Suora ongelma

- Tiedetään syy (esim. rummun muoto)
- Pitää päätellä seuraus (esim. rummun ääni)

Käänteinen ongelma

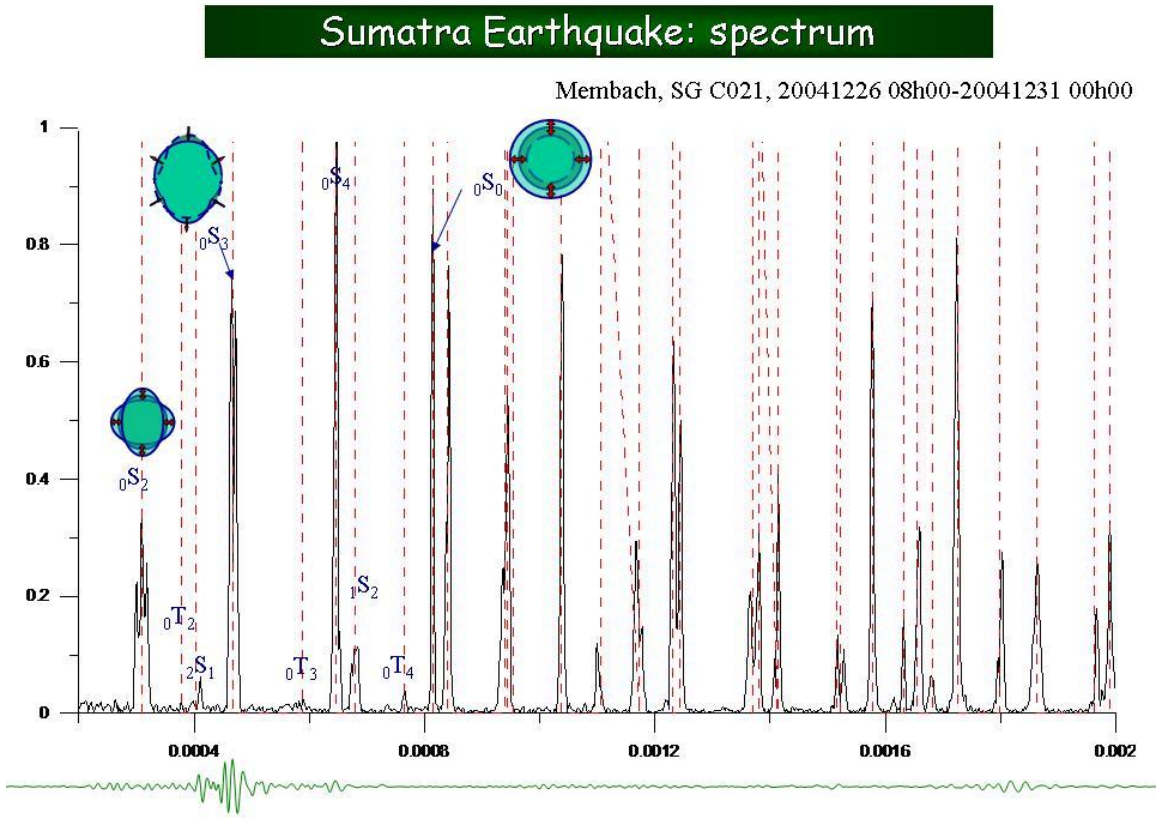
- Tiedetään seuraus (esim. rummun ääni)
- Pitää päätellä syy (esim. rummun muoto)

Ongelma 1: Onko luu murtunut?

- Syy: Luut ja muu ihmisen sisärakenne
- Seuraus: Röntgen-säteiden vaimeneminen (Röntgen-kuvat eri suunnista)

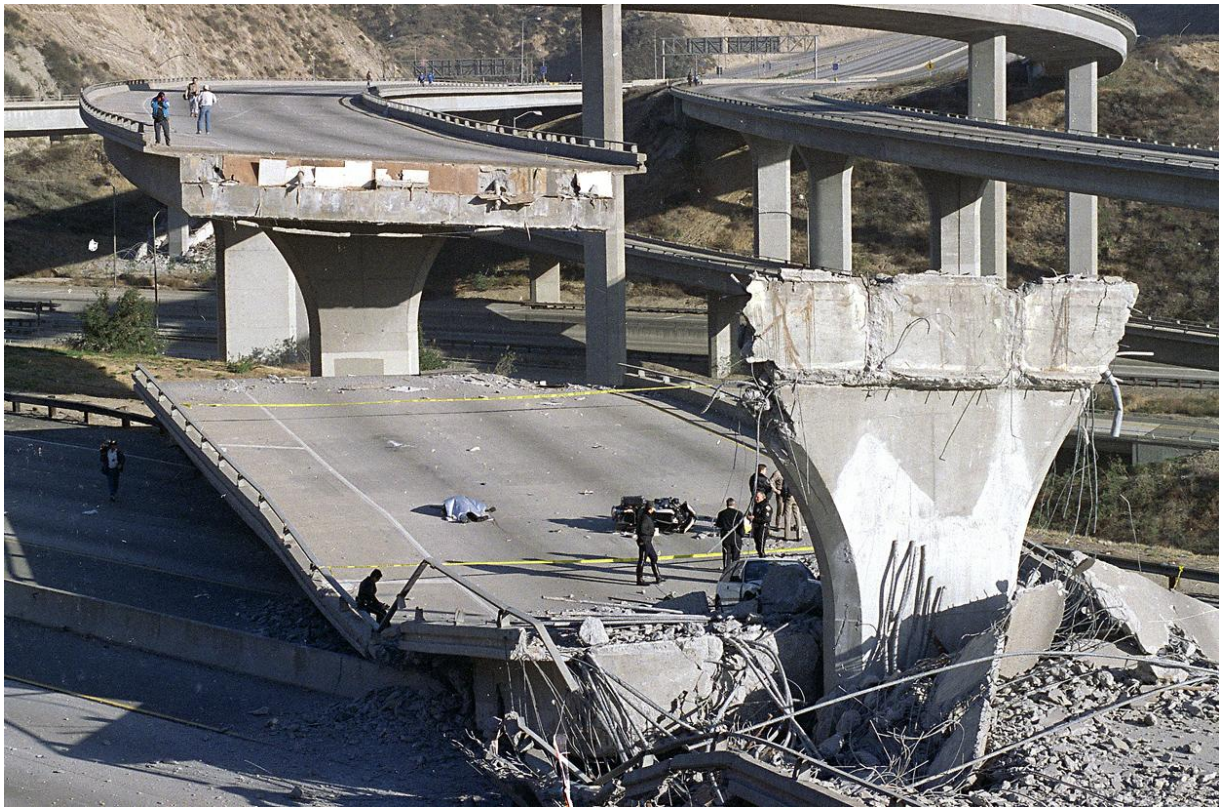
Ongelma 2: Mitä Maapallon sisällä on?

- Syy: Maapallon sisärakenne (mineraalit, niiden tiheys, kiderakenne, olomuoto...)
- Seuraus: Maapallon värähtelytaajuudet



Ongelma 3: Onko betonipalkki ehjä?

- Syy: Betonipalkin säröt ja muut virheet
- Seuraus: Betonipalkin sähkönjohtavuus



Käänteisongelmat

- Monia asioita ei voi tutkia suoraan. Pitää mitata epäsuorasti – nähdä jonkin seinän läpi.
- Näitä käänteisongelmia on paljon.
- Fysiikka, lääketiede, teollisuus…
- Vaikeita *matemaattisia* ongelmia!

Ongelma 1: Onko luu murtunut?

Fysiikan ongelma

Jos mitataan Röntgen-säteen vaimeneminen jokaisesta suunnasta, voidaanko päätellä paikasta riippuva vaimennuskerroin (eli kappaleen 3-ulotteinen rakenne)?

Matematiikan ongelma

Jos tunnetaan jonkin (kolmiulotteisessa avaruudessa määritellyn) funktion integraali kaikkien suorien yli, voidaanko itse funktio päätellä?

Ongelma 2: Mitä Maapallon sisällä on?

Fysiikan ongelma

Jos tunnetaan Maapallon kaikki värähtelytaajuudet, voidaanko päätellä aineen tiheys ja rakenne Maan sisällä?

Matematiikan ongelma

Jos tunnetaan reunallisen Riemannin moniston Laplace-Beltrami-operaattorin Neumann-spektri, voidaanko päätellä itse monisto?

Ongelma 3: Onko betonipalkki ehjä?

Fysiikan ongelma

Voidaanko päätellä kappaleen (betoni tai muu) sähkönjohtavuus tekemällä sen pinnalla jännite- ja virtamittauksia?

Matematiikan ongelma

Voidaanko $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$ päätellä jos tiedetään

$$(u|_{\partial\Omega}, \nu \cdot \gamma \nabla u|_{\partial\Omega})$$

kaikille $u \in W^{1,2}(\Omega)$ jotka toteuttavat yhtälön $\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0$?

Yhteenveto

- Fyysikko tai muu soveltaja näkee seinän, muttei näe sen läpi ilman matemaatikkoa.
- Matemaatikolle nämä seinät ovat hyvin samanlaisia.

II
Matematiikan tutkimus
Miltä matemaatikon työ näyttää?

Pari sanaa matemaatikon työstä.

Matematiikan opiskelu ja tutkimus

Opiskelu

- Matematiikka on valmis.
- Kun osaa lukiomatematiikan, osaa ratkaista kaikki ongelmat joihin on törmännyt.
- Jos tehtävänä on todistaa jotain, se on totta.
- Vaikeaan ongelmaan voi jäädä jumiin moneksi tunniksi.
- Opettaja tietää vastauksen.
- Miljoonat ovat ratkaisseet saman ongelman ennen sinua.

Tutkimus

- Matematiikka on pahasti kesken.
- Lukiolainen ei tunnista nimeltä suurta osaa matematiikan osa-alueista. Avoimia ongelmia on paljon.
- Yritetään arvata, mikä voisi olla totta ja mitä ehkä osaisi todistaa.
- Vaikeaan ongelmaan voi jäädä jumiin moneksi vuodeksi.
- Kukaan ei tiedä vastausta.
- Kukaan ei ole vielä ratkaissut ongelmaa. Tajuat ensimmäisenä!

Tutkimustyön sisältö

- Matemaatikkoja on monenlaisia.
- Työvälineitä: kynä, paperi, liitutaulu, tietokone (kirjoittamiseen, ei laskemiseen), lentokone.
- Lopullinen tavoite on tarkasti todistettu ja kiinnostava lause. Itse työ on kaoottista epämääräisten mielikuvien ja arvausten pohdintaa. Epämääräiset keskustelut näkemyksistä ovat korvaamattomia.
- Pitää osata luovuttaa ja löytää ongelma, jonka osaa ratkaista.
- Muuta työtä: Opetus, hallinto, rahoituksen hakeminen...

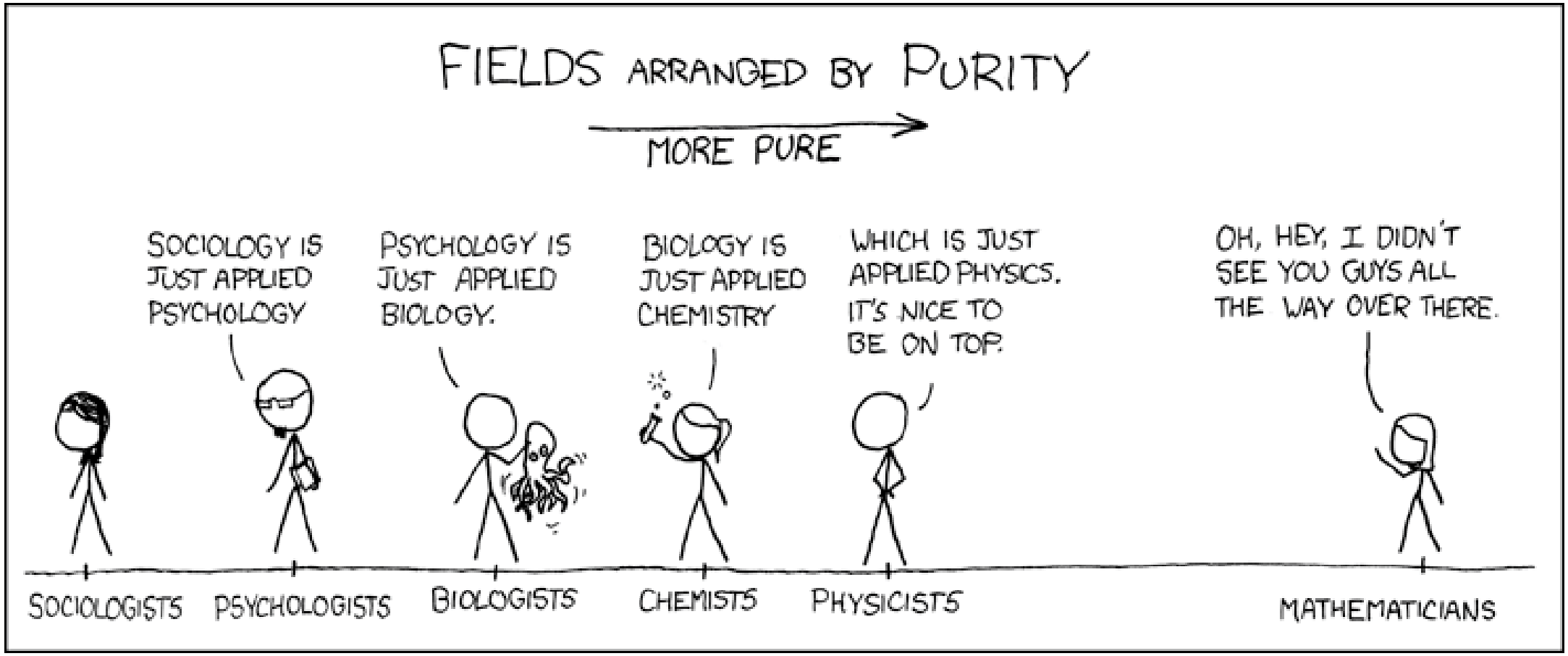
Historiallinen perspektiivi

- Lukiossa tehdään enimmäkseen 1600-, 1700- ja 1800-lukujen matematiikkaa.
- Vasta yliopistossa saadaan katettua suurin osa 1800-luvun matematiikasta, muttei sitäkään kokonaan.
- Matematiikan maisterin tuorein osaaminen sijoittuu toisen maailmansodan aikoihin.
- Oma työni perustuu tällä vuosikymmenellä luotuun matematiikkaan.

III
Matematiikan soveltamisesta
Mitä matematiikkaa tarvitaan?

Ei ”mihin” vaan ”mitä”.

Alojen puhtaus (www.xkcd.com/435)



Abstraktion etu

- Matematiikka liittyy kaikkeen koska se ei liity mihinkään.
- Samaa matematiikkaa voi käyttää moneen asiaan juuri siksi, ettei matematiikkaa ole sidottu mihinkään sovellukseen.
- Tällä hyödyllisyydellä on kuitenkin edellytyksiä:
  - Täytyy osata kääntää ongelma matematiikaksi.
  - Täytyy osata ratkaista matematiikan ongelma.
  - Täytyy osata tulkita, mitä ratkaisu tarkoittaa.
- Jos edellytykset eivät täyty, matematiikasta ei ole hyötyä.

Esimerkki

- Juoma maksaa 2 €. Timolla on 8 €. Montko juomaa hän voi ostaa?
- Jänis loikkii 2 m/s. Kauanko jänikseltä kestää ehtiä 8 metrin päähän?
- Tappava annos myrkkyä on 2 mg. Kuinka monta ihmistä voi tappaa 8 mg:lla?
- Ratkaise x yhtälöstä $2x = 8$.

Esimerkki

- On mitattu Röntgen-säteiden vaimenemista pyöreän kappaleen läpi. Miten selvitetään, mitä kappaleen sisällä on?
- Oletetaan, että eräs pieni planeetta on erittäin lähellä homogeenista, mutta ei aivan. Jos on mitattu meteoriittien aiheuttamien maanjäristysten kulkuaikoja tarkasti useista osumista, miten voidaan laskea poikkeama homogeenisesta?
- Jos tiedetään kolmiulotteisessa pallossa määritellyn funktion integraalit kaikkien suorien yli, miten päätellään itse funktio?

Abstraktion taso

- Nyrkkisääntö: Mitä abstraktimpaa matematiikkaa osaa, sitä enemmän sillä on sovelluksia. (On poikkeuksiakin!)
- Ongelmien oleellisen rakenteen tunnistaminen ja siihen keskittyminen.
- Esimerkki: Geofysiikassa on ongelmia, joita on paras hahmottaa Finsler-geometrian kautta. Tarvittava eksoottinen Finsler-geometria on monen matemaatikonkin mielestä turhanpäiväistä ja tarpeettoman esoteerista.
- Ongelma: Lukiomatematiikka ei ole riittävän abstraktia, jotta sillä olisi kiinnostavia sovelluksia.

Sekalaisia esimerkkejä

- Spektraaligeometrian ongelmissa tarvitsee joskus derivoida spektriä geometrian suhteen. Siitä ei tule mitään, jos ei ensin ymmärrä reaaliluvun derivoimista reaaliluvun suhteen.
- Erään inversio-ongelman ratkaisu jäi puolitiehen, koska en osannut riittävästi lukuteoriaa ja algebrallista geometriaa.
- Palataan vielä johdannon esimerkkeihin…

Ongelma 1: Onko luu murtunut?

Fysiikan ongelma

Jos mitataan Röntgen-säteen vaimeneminen jokaisesta suunnasta, voidaanko päätellä paikasta riippuva vaimennuskerroin (eli kappaleen 3-ulotteinen rakenne)?

Matematiikan ongelma

Jos tunnetaan jonkin funktion integraali kaikkien suorien yli, voidaanko itse funktio päätellä?

Ongelma 1: Tarvittavia matematiikan aloja

- Suorat avaruudessa ja niiden yli integroiminen. (Lukiolainen voi pienen lisäopiskelun jälkeen ymmärtää kysymyksen!)
- Funktionaalianalyysi: funktioavaruudet, integraalimuunnokset (esim. Fourier-muunnos ja Rieszin potentiaali).
- Lähestymistavasta riippuen: potentiaaliteoria, mikrolokaali analyysi, osittaisdifferentiaaliyhtälöt.

Ongelma 2: Mitä Maapallon sisällä on?

Fysiikan ongelma

Jos tunnetaan Maapallon kaikki värähtelytaajuudet, voidaanko päätellä aineen tiheys ja rakenne Maan sisällä?

Matematiikan ongelma

Jos tunnetaan reunallisen Riemannin moniston Laplace-Beltrami-operaattorin Neumann-spektri, voidaanko päätellä itse monisto?

Ongelma 2: Tarvittavia matematiikan aloja

- Differentiaaligeometria, erityisesti Riemannin monistot.
- Osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja niiden spektraaliteoria.
- Distribuutioteoria (yleistetyt funktiot).
- Integraalimuunnokset: Fourier-muunnos, Abel-muunnos, sädemuunnokset monistoilla (edellinen ongelma!)...
- Funktioiden ja avaruuksien säännöllisyys.
- Mikrolokaali analyysi: Fourier-integraalioperaattorit ja singulariteettien liikkuminen.
- Jatkuva-aikaiset dynaamiset systeemit.

Ongelma 3: Onko betonipalkki ehjä?

Fysiikan ongelma

Voidaanko päätellä kappaleen (betoni tai muu) sähkönjohtavuus tekemällä sen pinnalla jännite- ja virtamittauksia?

Matematiikan ongelma

Voidaanko $\gamma \in L_+^\infty(\Omega)$ päätellä jos tiedetään

$$(u|_{\partial\Omega}, \nu \cdot \gamma \nabla u|_{\partial\Omega})$$

kaikille $u \in W^{1,2}(\Omega)$ jotka toteuttavat yhtälön $\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0$?

Ongelma 3: Tarvittavia matematiikan aloja

- Heikko osittaisdifferentiaaliyhtälöteoria.
- Funktionaalianalyysi: funktioavaruudet, tekijäavaruudet, duaalit, Banach-avaruudet.
- Kompleksinen geometrinen optiikka.
- Schrödingerin yhtälö.
- Fourier-muunnos.

Pitkä tie

- Kun opiskelee matematiikkaa yliopistossa viisi vuotta, alkaa päästä sille tasolle, jolla sovellusten kannalta kiinnostavien kysymysten kysyminen tulee mahdolliseksi.
- Vaikka lukiomatematiikalla ei ole suoraan kiinnostavia sovelluksia, se ei ole turhaa. Lukioymmärryksen päälle voidaan rakentaa lisäosaamista, joka lopulta vie sovellusten ääreen.
- Matematiikka alkaa näyttää kauniilta ja yhtenäiseltä vasta ylempää katsottuna.

IV
Loppukevennys
Käänteinen inversio-ongelma: näkymättömyys

Suora ongelma ei ole ainoa ”käänteinen inversio-ongelma”.

Inversio-ongelmien tavoite

- Halutaan mitata asioita epäsuorasti.
- Ensimmäinen matemaattinen ongelma: Yritetään todistaa, että ideaalisessa tilanteessa mittausdatasta voi periaatteessa yksikäsitteisesti päätellä halutun suureen.
- Tämän jälkeen tulee muita ongelmia: Onko päättelylle algoritmi, onko päättely vakaata, miten epätäydellisyys ja kohina vaikuttaa…?
- Ensimmäinen ongelma voi epäonnistua kahdella tavalla:
  - Ei osata todistaa.
  - Toivottu asia ei pidäkään paikkaansa: väite onkin epätosi.

Epäyksikäsitteisyys

- Jos inversio-ongelman ratkaisu ei olekaan yksikäsitteinen, halutaan saada (täydellinen) kuvailu yksikäsitteisyydestä.
- Kysymys on siis: Mitä (ideaalisesta) mittausdatasta voi päätellä ja mitä ei?
- Käänteinen versio: Mitä kaikkea voidaan kätkeä mittaajalta?

Näkymättömyys

- Epäyksikäsitteisyyden vahvin muoto on ”näkymättömyysviitta”, jonka sisään voi laittaa mitä tahansa, eikä mittauksista huomaa, että mitään on kätketty.
- Näkymättömyydestä on tullut vakavasti otettava uusi tieteenala, ja matematiikalla on siinä keskeinen rooli.
- Sovelluksia muuallakin kuin salaamisessa:
  - Mittalaitteen kätkeminen, jottei se häiritse mittauskohdetta.
  - Kaupungin kätkeminen maanjäristyksiltä.

Näkymättömyys tieteenä

- Näkymättömyys on pitkään ollut vain scifiä.
- Ala varmasti kasvaa tulevaisuudessa, ja kiinnostanee monia lukiolaisiakin.
- Näkymättömyyden mahdollisuuksia ja rajoituksia on vaikea ymmärtää ilman kunnollista matemaattista ymmärrystä differentiaaligeometriasta ja osittaisdifferentiaaliyhtälöistä.

Näkymättömyys ja näkyvyys Suomessa

- Myös Suomessa tutkitaan näkymättömyyden matematiikkaa.
- Suomi tunnetaan vahvasta inversio-ongelmien osaamisesta.
- Suomen Akatemian rahoittama Inversiomallinnuksen ja kuvantamisen huippuyksikkö käsittää lähes sata inversiotutkijaa.

V
Lopetus
Kysymyksiä, kommentteja, toiveita…?

Kysy lisää:

joonas.ilmavirta@jyu.fi

Inversio-ongelmia tänään

- Materiaalitutkimusta röntgentomografialla
- Kuinka ydin ja sen säteily voidaan havaita?
- Mitä data kertoo?

- Maailma on täynnä epäsuoran mittaamisen ongelmia, ja niihin liittyy paljon muutakin kuin matematiikkaa!