Tällä viikolla sovelletaan kaikkia kurssilla opittuja taitoja. Tehtävien palauttaminen aikarajaan mennessä auttaa saamaan merkinnän rekisteriin ennen joulua; aikarajan jälkeen sitä ei enää voida taata ellet erikseen kysy. Ilmoitathan luennoitsijalle jos sinulla on erityinen kiire kurssin suorituksen saamiseen.

Tällä kertaa tehtävät ovat vähän pidempiä, joten muistathan erityisesti kommentoida paljon ratkaisuasi ja piirtää tarvittaessa kuvia havainnollistamaan ratkaisua. Kuvia piirtäessä kannattaa myös miettiä voisiko kuvasta saada nätimmän muuttamalla ylimääräisiä asetuksia kuten `nticks` (useista eri käyristä tulee tarkempia kun tätä kasvattaa), `proportional_axes`, `point_type`, `color` jne.

1. **Matriiseja ja maksimointia.** ($\star$) Luo Maximaan matriisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & e^{-a^2/2} & 1 \\ 3 & 1+\frac{2}{a^2+1} & 5-a \\ 2 & 0 & e^{-a^2/3} \end{bmatrix}$$

joka riippuu parametrista $a \in (-\infty, \infty)$. Selvitä ensin, millä parametrin a arvoilla matriisilla M ei ole käänteismatriisia (tiedetään lineaarialgebrasta, että matriisilla on käänteismatriisi jos sen determinantti ei ole nolla).

Laske seuraavaksi millä parametrin a arvolla M determinantti saa suurimman arvonsa. Havainnollista tätä myös kuvan avulla. Piirrä kuvaan sekä determinantin kuvaaja riippuen parametrista a, että löytämäsi erikoispisteet (eli ainakin determinantin nollakohdat ja maksimiarvo).

2. **Analyyttistä geometriaa.** ($\star$)
Olkoon kolme pistettä $p_1 = (1, 2)$, $p_2 = (3, 0)$ ja $p_3 = (6, 4)$ tasossa annettu (piirrä kuva). Ratkaise seuraavaksi mikä on näiden pisteiden kautta kulkevan ympyrän yhtälö. Ohjeistusta:

Ympyrällä on keskipiste (x_0, y_0) ja säde r jota et tunne. Tiedät kuitenkin, että jokainen pisteistä p_1, p_2 ja p_3 toteuttaa yhtälön

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

eli saat kolme yhtälöä kun sijoitat muuttujien (x, y) paikalle pisteiden p_1, p_2 ja p_3 koordinaatit. Ratkaise näistä muodostunut yhtälöryhmä esimerkiksi komennolla `algsys`.

Piirrä nyt pisteet ja ympyrä samaan kuvaan. Ympyrän piirtämiseen kannattaa käyttää esimerkiksi komentoa `parametric` tai `implicit`. Laske vielä kolmion $\Delta p_1 p_2 p_3$ sivujen pituudet, olkoon nämä a, b ja c. Tarkista, että kaava

$$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

pätee.

3. **Rekursiota ja spiraaleja.** ($\star$) *(Tee joko tämä tai seuraava tehtävä).* Fibonaccin lukujono (F_n) määritellään seuraavasti. Ensimmäiset jäsenet ovat $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$, ja loput jonon jäsenet saadaan kaavalla

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{1}$$

eli jonon seuraava jäsen on kahden edellisen summa. Luo ensin funktio Maximassa joka ottaa positiivisen kokonaisluvun N argumentikseen ja palauttaa listan jossa on N ensimmäistä Fibonaccin lukujonon jäsentä.

Olkoon $\varphi_1 = (1+\sqrt{5})/2$ ja $\varphi_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Määritellään lukujono E_n asettamalla

$$E_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1^n - \varphi_2^n\right).$$

Näytetään nyt, että tässä on itseasiassa vain toinen tapa määritellä Fibonaccin lukujono eli että $E_n = F_n$ kaikilla n. Osoita tämä Maximassa tarkistamalla, että $E_0 = 0$ ja $E_1 = 1$ ja että myös kaava (1) pätee lukujonolle E_n kaikilla n. *Vinkki:* Muista lausekkeiden sieventämiseen komento `ratsimp`.

Niin sanotun *kultaisen spiraalin* polaarikoordinaattiesitys on $r = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_1^{2t/\pi}$. Se voidaan piirtää Maximassa `wxdraw2d`-ympäristössä polaarikoordinaateissa (välillä $[-10\pi, 10\pi]$) kaavalla

```
polar(1/sqrt(5)*%phi^(t*2/%pi),t,-10*%pi,10*%pi)
```

Kuvaa pitää kuitenkin ensin tarkentaa sopivalla asetuksella. Piirrä tähän kuvaan myös pisteet

$$P_n = \left(F_n \cos\frac{\pi n}{2}, F_n \sin\frac{\pi n}{2}\right)$$

kun $n = 1, \ldots, 20$.

4. **Puolittava käyrä.** ($\star$) *(Tee joko tämä tai edellinen tehtävä).* Olkoon Q neliö, jota rajottavat xy-akselit sekä suorat $y = 1$ ja $x = 1$. Tuntemattoman luvun $a \in (0,1)$ määrittää seuraava ehto: Hyperbeli $xy = a$ (eli funktion $y = a/x$ kuvaaja) jakaa neliön Q kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan. Määritä luvulle a likiarvo ja piirrä tilanteesta kuva draw2d tai wxdraw2d-ympäristössä.

Hahmottamista voi auttaa piirtämällä ensin kuva tilanteesta kun esim. $a = 0.2$.

Kuvanpiirrossa seuraavista asetuksista voi olla iloa: `line_type, xaxis, yaxis, xrange, yrange, proportional_axes`. Pystysuoran janan $\{(x,y) : x = 1, 0 < y < 1\}$ piirtämiseen seuraava avustus: `parametric(1,t,t,0,1)`. Jos päädyt yhtälöön luvulle a mutta se ei tunnu ratkeavan - koita aiemmilla viikoilla esiintynyttä funktiota `mnewton`.

5. **Summakaavojen etsimistä.** Luo Maximaan summa

$$S = \sum_{k=1}^{n} e^{kx}.$$

Tehdään nyt seuraavaa:

- Aseta systeemimuuttujaan `simpsum` arvo `false`.
- Laske summan S kolmas derivaatta x:n suhteen. Tässä Maxima on vain derivoinut jokaisen summan S termin erikseen.
- Katso mitä saat edellisen kohdan lausekkeesta kohdassa $x = 0$.

Tässä vaiheessa Maximan tulisi tulostaa

$$\sum_{k=1}^{n} k^3. \tag{2}$$

Koitetaan nyt etsiä tälle summalle vaihtoehtoinen kaava. Tee tämä seuraavalla tavalla:

- Lataa funktio `simplify_sum` ja sievennä alussa määritelty summa S nätimpään muotoon.
- Derivoi saatu lauseke kolme kertaa ja laske raja-arvo kun $x \to 0$.
- Sievennä saatua lauseketta mikäli tarpeen. Kokeile esim. komentoa `factor`.

Saatu lauseke on summa (2) toisella tavalla laskettuna, joten saat tästä halutun summakaavan (kirjoita saamasi kaava ylös). Laske samalla tavalla summalle

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 \tag{3}$$

sievennetty muoto.

Huomio: Tässä tehtävässä löydetyt kaavat summille (2) ja (3) olisi voinut löytää myös suoraan käyttämällä komentoa `simplify_sum` kyseisiin summiin. Tehtävässä esitetyllä tavalla voisi kuitenkin myös johtaa kaavat käsin, tosin se on käytännössä hieman työlästä.

6. **Tärkeä tehtävä.** ($\star$) Jos yliopiston tietojärjestelmä toimii, saat jonkinlaisen täytettävän kurssipalautelomakkeen. Vastaa tähän kyselyyn huolellisesti ja rehellisesti. Jos ei toimi, jätä Sisu-järjestelmään palautetta sen toimimattomuudesta; sieltä löytyy sisäinen palautekanava.