

Muista katsoa kurssin sivulta ohjeet tehtävien palautukseen. Pakolliset tehtävät on merkitty tähdellä ( $\star$ ). Muista palauttaa `.wxm`-tiedosto viikon tehtävistä. Muista palauttaa myös oleelliset `.tex` ja `.pdf`-tiedostot L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-tehtävissä.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help-järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. Tasalevyisellä kirjasinlajilla merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä.

Nimeä tiedosto ensimmäisen viikon ohjeiden mukaisesti. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein. Muista myös tarvittaessa vapauttaa määrittelemäsi objektit eri tehtävien välissä (`kill`-komento).

1. Olemme jo nähneet pari komentoa yhtälöiden ratkaisemiseen Maximassa. Polynomiyhtälöiden ratkaisuun löytyy myös komentoja nimeltä `algsys`, `nroots` ja `allroots`. Selitä, mitä nämä komennot tekevät. Ratkaise jollain näistä yhtälö  $x^5 + 7x + 1 = 0$ .
2. ( $\star$ ) Ratkaise (esim. `algsys`-komennolla) yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y^2 = x^3 - 3x + 1. \end{cases}$$

3. Piirrä funktion  $f(x) := e^x \sin(2x) + e^{x/2} \cos x$  ja sen derivaatan  $f'(x)$  kuvaajat. Etsi yhtälölle  $f'(x) = 0$  ratkaisu likimääräismenetelmin, esimerkiksi komennolla `find_root`. Käytä derivaatan kuvaajaa apuna. Laske myös funktion arvo löytämässäsi derivaatan (likimääräisessä) nollakohdassa.
4. **Vektorit ja Matriisit.** ( $\star$ ) Ennen matriiseilla laskemista kannattaa komentaa `load("eigen")`; Maximassa, niin saat pari olennaista funktiota käyttöösi. Määrittele Maximassa vektori  $v$  ja matriisi  $A$  seuraavasti:

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

`v:covect([5,-2]);`      `A:matrix([0,2],[1,0]);`

Maximassa matriisitulon merkki on `.` eli pelkkä piste. Laske matriisitulo  $Av$ . Kokeile vielä mitä tekee komento `transpose`. Laske mitä on  $v^T Av$ .

5. (★)  $m \times n$ -matriisia  $C$  vastaavan lineaarikuvauksen *ydin* on joukko  $\{v \in \mathbb{R}^m \mid Cv = 0\}$ . Tällaista joukkoa Maximalla ei voi määrätä, mutta kantavektorit kyllä; apuna komento `nullspace`. Vastaavasti *kuvajoukolle*  $\{Cv \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathbb{R}^m\}$  löydetään kantavektorit komennolla `columnspace`.

Määrää  $C$ :n ytimelle ja kuvajoukolle kantavektorit, kun

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. (★) Maximalle vektorin voi esittää kolmella eri tavalla: listana, vaakavektorina ja pystyvektorina. Tässä tehtävässä opetellaan muuttamaan vektori esitysvasta toiseen.

- Vaaka- ja pystyvektoreiden välinen muutos onnistuu komennolla `transpose`.
- Listasta  $L$  saa vaakavektorin komentamalla `matrix(L)`.
- Vaakavektorista  $v$  saa listan komennolla `first(v)`, joka poimii annetun matriisin ensimmäisen rivin. Myös `part(...,1)` ajaa saman asian.

Määrittele vektori  $a = (1, 2, 3)$  pystyvektorina,  $b = (3, 4, 5)$  vaakavektorina ja  $c = (5, 6, 7)$  listana. Muuta  $a$  vaakavektoriksi ja listaksi. Muuta  $b$  pystyvektoriksi ja listaksi. Muuta  $c$  pysty- ja vaakavektoriksi.

7. Tehtävän 5 matriisia  $C$  vastaavan lineaarikuvauksen *ydin* on siis homogeenisen yhtälöryhmän  $Cv = 0$ ,  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , ratkaisujen joukko.

Tällainen olio ( $Cv$  on sarakematriisi) ei kuitenkaan kelpaa Maximalla `solve`-komennolle, vaan se pitää ensin muuttaa listaksi `cv` (ks. ed. teht.).

Ennen yhtälön ratkaisemista vektori yhtälö  $Cv = (0, 0)$  pitää muuttaa yhtälöryhmäksi; apuun käy komento `map("=", cv, [0,0])`. Ratkaise saatu yhtälöryhmä ja vertaa tulosta aiemmin löydettyyn kantavektorijoukkoon.

8. Määrää matriisia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vastaavan lineaarikuvauksen ytimelle kanta. Kyseisten kantavektoreiden joukon Maxima ”kehystää” komennolla `span`. Miten kantavektorit poimitaan tämän kehysten alta? Komennolla `part(e, j)` saadaan lausekeesta  $e$  poimituksi sen  $j$ . osa. Komennon `nullspace` tuloksesta saatava vektori on sarakematriisi, mutta komennolle `orthogonal_complement` sen pitää sellainen olla. Määrää  $A$ :n ytimen ortogonaalikomplementti.

9. (Jatkoa.) Määrää vastaavalla tavalla  $A$  kuvajoukolle (*columnspace*) ortogonaalikomplementti.

10. (★) Halutaan laskea summa  $\sum_{j=1}^{10} a_j$ , missä  $a_j$ :t ovat lukuja. Jos luvut  $a_j$  on tallennettu listaan nimeltä  $a$  Maximalla, niin tämä voidaan tehdä käyttäen komentoa `sum`:

`sum(a[j], j, 1, 10);`

Toinen tapa laskea summa on käyttää `for`-silmukkaa: Alustetaan ensin summalle `s` arvo nolla:

```
s:0;
```

Haluttu summa voidaan nyt laskea komennolla

```
for j:1 thru 10 do ( s:s+a[j] );
```

Tässä siis ensin alustetaan lausekkeelle `j` arvo 1 ja annetaan sen käydä läpi kokonaislukuarvot 10:een asti ja jokaisen arvon kohdalla suoritetaan komento `s:s+a[j]`. Lopuksi täytyy vielä kysyä Maximalta muuttujan `s` arvo.

Syötä seuraava lista (lämpötilan kuukausikeskiarvoja)

```
lst:[ [1,-8.3], [2,-8.5], [3,-3.8], [4,2.2], [5,8.9], [6,13.7],  
      [7,16.5], [8,14.1], [9,8.8], [10,3.6], [11,-2.0], [12,-6.2] ];
```

Käyttäen molempia edellä mainituista tavoista laske lämpötilan vuosikeskiarvo. Käytä komentoa `part` apuna lämpötilan erottamiseksi.

Tuliko eri tavoilla sama tulos? Kumpi tapa tuntuu luontevammalta?

11. (★) Tutustutaan seuraavaksi `if...then`-rakenteen käyttöön. Oletetaan, että `a` on jokin reaaliluku. Komento

```
if a > 0 then print("a on positiivinen");
```

tulostaa tekstin ”a on positiivinen”, jos lausekkeelle `a` pätee `a > 0`.

Käyttäen edellä olevaa esimerkkiä ja `for`-rakennetta apuna tulosta (komento `print`) edellisen tehtävän listasta esiin ne kuukausi-lämpötila-parit, joissa lämpötilan kuukausikeskiarvo on suurempi kuin vuosikeskiarvo.

12. (★) Jatketaan edellistä tehtävää, mutta tällä kertaa tulostamisen sijaan halutaan tallentaa ehdot täyttävät listan alkiot toiseen listaan. Alustetaan ensin tyhjä lista

```
tmp: [];
```

Tutustu Maximan komenttoon `append` (Huomaa erityisesti, että `append` liittää kaksi listaa yhteen, ei lisää alkioita listaan, kuten monissa ohjelmointikielissä). Käyttäen sitä, tällä kertaa tulostamisen sijaan, lisää ehdot täyttävä pari määrittelemääsi listaan `tmp`.

13. Edellisen tehtävän karsittu lista voidaan muodostaa myös toisella tapaa. Määritellään funktio

```
f(1):=is(1[2] > s/12);
```

missä `s` on siis tehtävässä 10 määritelty. Laske funktion `f` arvo listan `lst` ensimmäisestä ja seitsemännestä parista.

Nyt käyttäen `sublist`-komentoa saadaan sama lopputulos kuin edeltävässä tehtävässä:

```
sublist(lst, f);
```

Huomaa, että tässä jälkimmäinen muuttuja on funktio, ei funktiota määrittelevä lauseke.

14. Vapauta funktio  $f$ . Komentoja `map` ja `apply` voi käyttää ”Maximamaisemmin” alussa esitettyyn listan `lst` lämpötilakeskiarvon laskemiseen. Kokeile aluksi seuraavia (yksi kerrallaan):

```
map(f, [a,b,c]);  
apply(f, [a,b,c]);
```

Maximassa on myös kummallinen funktio nimeltä `+`, jolle voi antaa niin monta argumenttia kuin tahtoo. (Voit halutessasi tutkia myös funktioita `*`, `=` ja `-`.) Laske esimerkiksi seuraavat:

```
+(a,b);  
+(12,43,71);
```

Listan `[a,b,c]` summan voi siis laskea seuraavasti: `apply("+", [a,b,c]);`.

Määrittele funktio, joka laskee sille annetun listan summan, ja sitä käyttäen laske lämpötilojen summa listasta `lst`. Huomaa, että tehtävässä joudut erottamaan lämpötilat listasta `lst`. Tässä erottelussa auttaa sopiva funktio `f` yhdessä `map`-komennon kanssa.

15. Käyttäen hyväksi edellistä tehtävää ja Maximan komentoa `length` määrittele funktio `avg`, joka laskee sille annetun (yksiulotteisen) listan keskiarvon. Miten käyttäen tätä määrittelemääsi funktiota lasket listasta `lst` lämpötilojen keskiarvon?

16. Tehtävässä 15 määriteltiin keskiarvon laskemiseen komento, ja sitä tarvitaan nyt. Listan `L` alkioiden keskihajonta saadaan lasketuksi komennolla

```
std_dev(L):=sqrt((L-avg(L)).(L-avg(L))/length(L));
```

Laske listan `lst` lämpötilojen keskihajonta ja piirrä `draw`-kirjaston komentojen avulla kuva, jossa on lämpötilakäyrä ja vaakaviivana lämpötilan keskiarvo. Lisää kuvaan vaakaviivoina lämpötilan keskiarvo + keskihajonta ja keskiarvo – keskihajonta.