

Muista katsoa kurssin sivulta ohjeet tehtävien palautukseen. Pakolliset tehtävät on merkitty tähdellä (\star). Muista palauttaa `.wxm`-tiedosto viikon tehtävistä. Muista palauttaa myös oleelliset `.tex` ja `.pdf`-tiedostot L^AT_EX-tehtävissä.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help-järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. Tasalevyisellä kirjasinlajilla merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä.

Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein. Muista myös tarvittaessa vapauttaa määrittelemäsi objektit eri tehtävien välissä (`kill`-komento).

1. (\star) Tutustutaan tässä tehtävässä taas omien funktioiden luomiseen. Luo Maximassa seuraavat funktiot. Molemmissa kohdissa oletetaan, että syötettävä lauseke on ainoastaan x -muuttujasta riippuva (voit pohtia myös mitä pitäisi tehdä yleisemmässä tapauksessa).
 - (1) Funktio nimeltä `deriv_sijoitus`, joka ottaa argumentikseen lausekkeen ja palauttaa tämän lausekkeen derivaatan arvon pisteessä $x = 5$.
 - (2) Funktio nimeltä `nelio_integraali`, joka ottaa argumentikseen lausekkeen ja palauttaa tämän lausekkeen neliön integraalin muuttujan x suhteen välillä $[0, 1]$.

Testaa myös, miten funktiosi toimivat kun niihin syöttää lausekkeen $1/(x+1)$ tai jonkin mieleisesi lausekkeen.

2. (\star) Etsi yhtälön $x^3 = x + 2 \cos(x)$ ratkaisu sekä komennoilla `find_root` että `mnewton`. Muista, että jälkimmäinen pitää ensin ladata käyttöön komennolla `load(mnewton)`. Tässä ja seuraavassa tehtävässä kannattaa ehdottomasti piirtää ainakin yksi kuva tilanteesta.
3. (\star) Etsi funktion $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2} - e^{-(x-3)^2}$ nollakohdat, lokaalit ääriarvot, globaali minimi ja maksimi sekä raja-arvo kun $x \rightarrow +\infty$.
4. (\star) Olemme jo huomanneet, että Maximan komento `integrate` tepsii määrättyjen integraalien laskemiseen. Komento toimii kuitenkin vain silloin, kun Maxima osaa laskea integroitavalle funktiolle järkevän integraalifunktion. Koita laskea komennolla määrätty integraali

$$\int_1^3 \frac{x}{2 + \sin(x)} dx.$$

Ei pitäisi toimia. Maximassa on kuitenkin määrättyjen integraalien laskemiseen myös numeerinen tapa komennolla `romberg`, jonka syntaksi on sama kuin komennon `integrate`. Laske myös tällä edellinen integraali.

5. (★) Komennolla `part` voi poimia osia mistä hyvänsä listasta, lausekkeesta tai muusta. Nimeä yhtälö:

yhtalo: $x^2 - y^2 = \sin(t - \cos(x)) + \log(2 + e^3)$;

Miten saat komennolla `part(yhtalo, ...)` poimittua yhtäsuuruusmerkin `=`, muuttujan t ja eksponentin 3?

6. (★) Harjoittele yksinkertaisen `for`-silmukan luomista Maximassa laskemalla sen avulla summat $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 50$ ja $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 50^3$. Tarkista, että kaava $S_1^2 = S_3$ pätee.

7. Laske funktion $f(x) = \sin(x \log(2x))$ derivaatta.

8. Useammasta kuin yhdestä muuttujasta riippuvan funktion derivaattoja kutsutaan *osittaisderivaatoiksi* ja niitä merkitään ”koukero-d”:llä, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jne. Vastaavasti toisen kertaluvun osittaisderivaattoja merkitään $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (derivoidaan kaksi kertaa x :n suhteen), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (derivoidaan kerran x :n ja kerran y :n suhteen), jne. Maximan `diff` laskee juuri näitä osittaisderivaattoja.

Laske funktion $f(x, y) := \log(x^2 + y^2)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Laske myös $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ja osoita, että kyseinen lauseke on nolla.

9. Laske muuttujista x ja t riippuvan funktion¹ $f(x, t) := t^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}$ osittaisderivaatat ja totea, että $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Muista: Tietokoneella kaksi lauseketta on useimmiten helpointa todeta samoiksi tutkimalla lausekkeiden erotusta.

10. Tee seuraavat määrytykset (kumpikin omana syötteenään; V = ”vektori”)²:

`laplacian(f, V) := sum(diff(f, V[j], 2), j, 1, length(V));`

`heat(f, t, V) := diff(f, t) - laplacian(f, V);`

Tehtävän 8 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ voidaan laskea nyt helpommin: `laplacian(f, [x, y])`. Kokeile. Vastaavasti tehtävän 9 lasku käy komennolla `heat(f, t, [x])`.

Laske sievennettynä

(1) tehtävän 8 derivaatta, kun $f(x, y) := \arctan(y/x)$;

(2) tehtävää 8 vastaava derivaatta $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, kun

$$f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(3) tehtävää 9 vastaava derivaatta $\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$, kun

$$f(x, y, t) := t^{-1} e^{-(x^2 + y^2)/(4t)}$$

¹Tämän funktion avulla voi löytää lämpöyhtälön *kaikki* ratkaisut. Lisätietoja saa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden kurssilta tai kysymällä laitoksen väeltä.

²Nimi `laplacian` tulee siitä, että kyseistä differentiaalioperaattoria on tapana kutsua *Laplace-operaattoriksi* ja merkitä Δ . Siis $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$. Vastaavasti $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f$ on *lämpöoperaattori*, mistä tulee nimi ’heat’.

11. **Differentiaaliyhtälö.** Maxima osaa ratkaista myös joitain differentiaaliyhtälöitä. Tavallinen differentiaaliyhtälö tunnetaan englanniksi lyhenteellä ODE (ordinary differential equation). Etsi sopiva Maxima-funktio ja ratkaise differentiaaliyhtälö $\frac{d}{dx}y = y$ eli $y' = y$.
12. **Divergenssi.** Määrittele $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (\sin(xy), y^2)$, Maximalle. Voit tehdä sen listana, pystyvektorina tai vaakavektorina; lista lienee kätevin. Laske tämän vektorikentän divergenssi. (Tämä tehtävä onnistuu, jos fysiikan tai matematiikan opinnoista divergenssi on tuttu.)
13. **Kokoaminen.** (★) Ensimmäisen kolmen viikon tehtävistä suoritetaan vertaisarviointi, ja tätä varten sinun täytyy yhdistää nyt ensimmäisen kolmen viikon .wxm-tiedostosi yhdeksi isoksi .wxm-tiedostoksi. Tämä onnistuu esimerkiksi wxMaximassa seuraavasti
- (1) Luo uusi .wxm-tiedosto.
 - (2) Avaa jokin tehtäväsarjojen 1-3 .wxm-tiedostoista wxMaximassa.
 - (3) Valitse kaikki solut näppäinyhdistelmällä **Ctrl + A** ja kopioi ne painamalla **Ctrl+C**.
 - (4) Mene uuteen .wxm-tiedostoosi ja liitä ne sopivaan paikkaan yhdistelmällä **Ctrl+V**.
 - (5) Tallenna nimellä SL_harjoitus_1-3_sukunimi.wxm (omalla sukunimelläsi).

Huom! Palauta tämän viikon tehtävien .wxm-tiedoston sijaan tässä tehtävässä luomasi .wxm-tiedosto, josta löytyy kaikki tekemäsi tehtävät ensimmäisen kolmen viikon aikana. Muista myös seuraavaa:

- Muista otsikoida tehtäväsarjat että ne erottuvat toisistaan.
- Kannattaa ehkä vapauttaa muuttujat tehtäväsarjojen välillä komenolla `kill(all)`.
- Tarkista, että tehtäväsi ovat riittävän hyvin kommentoituja.
- Tallenna tiedosi, sulje se, avaa uudestaan ja varmista, että kaikki menee oikein jos suoritat komennot. Jos olet vapauttanut muuttujat, kaiken pitäisi mennä hyvin.