

Muista katsoa kurssin sivulta ohjeet tehtävien palautukseen. Pakolliset tehtävät on merkitty tähdellä (\star). Muista palauttaa `.wxm`-tiedosto viikon tehtävistä. Muista palauttaa myös oleelliset `.tex` ja `.pdf`-tiedostot L^AT_EX-tehtävissä.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help-järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. Tasalevyisellä kirjasinlajilla merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä.

Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein. Muista myös tarvittaessa vapauttaa määrittelemäsi objektit eri tehtävien välissä (`kill`-komento).

1. (\star) **Piirtämistä** Tässä tehtävässä tutustutaan Maximan piirtotyökaluihin (tai palautetaan ne mieleen). Tutustu funktioon `plot2d` esimerkiksi ohjeen kautta, ja piirrä mieleisesi funktio sillä jollain välillä. Tee sama wxMaximan omalla työkalulla `wxplot2d`, syntaksi on sama. Miten nämä eroavat toisistaan? Selvitä seuraavaa tehtävää varten myös, miten piirrat kuvan diskreetistä datajoukosta!
2. (\star) Olkoon annettu seuraava datajoukko listana

$$[[1, 2.94], [2, 4.33], [3, 5.18], [4, 6.14], [5, 6.52]].$$

Määrittele tämä datajoukko muuttujaan Maximassa ja piirrä siitä kuva. Kuvassa näyttää, että pisteet sijoittuvat melkein funktion $c\sqrt{x}$ kuvaajalle, missä c on joku vakio. Piirrä myös tämä funktio kuvaan ja selvitä esim. kokeilemalla mikä vakion c arvo antaa hyvän approksimaation.

Vihje. Diskreetin datajoukon piirtämiseen kannattaa lisätä piirtokomentoon asetus `[style, points]` niin saat pisteet erikseen. Jos haluat samaan kuvaan pisteet sekä kuvaajan, asetus kannattaa olla tyyliin `[style, points, lines]`.

3. (\star) Harjoitellaan vielä vähän laskentoa Maximalla:
 - (a) Jaa tekijöihin lauseke $x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6$. Mitkä ovat tämän polynomin (reaaliset) nollakohdat?
 - (b) Sievennä $\sqrt{4x^2 + 12x + 9}$. Onko tulos ”oikein”?
 - (c) Määritä Maximaan lausekkeet $2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}$ ja $\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$. Sijoita nyt ensimmäiseen lausekkeeseen jälkimmäinen lauseke x :n paikalle esimerkiksi `subst`-komennolla. Sievennä lopputulos (esim. `radcan` pitäisi tepsä tässäkin).

4. Selvitä lausekkeen

$$\frac{\sin x}{\sin(2x)} \times \frac{4 \sin^2 x - 1}{\sin(3x + \frac{\pi}{2})}$$

1

sieventämistä Maximian valikon **Simplify** kohdan **Trigonometric Simplification** eri komennoilla.

5. (★) Opetellaan nyt derivointia ja integrointia Maximalla. Derivointi onnistuu komennolla **diff**, joka vaatii derivoitavan lausekkeen sekä muuttujan jonka suhteen derivoida. Tutustu syntaksiin tai valitse wxMaximasta valikosta *Calculus* -> *Differentiate* ja derivoi

- (a) Funktio $f_1(x) = x^5 - 5x + 4$ muuttujan x suhteen.
- (b) Funktio $f_2(z) = 2z^2 \log(z) - z^2$ muuttujan z suhteen.
- (c) Kahden muuttujan funktio $f_3(a, b) = \sin(ab) + \sin(a) \sin(b)$ ensin muuttujan a suhteen, sitten muuttujan b suhteen.
- (d) Funktion $f_4(y) = \sin(\pi y)$ viidestoista derivaatta muuttujan y suhteen.

6. (★) Tutustu nyt integrointiin komennolla **integrate**. Testaa, että edellisen tehtävän a)- ja b)-kohdan tuloksia integroimalla saadaan oikea tulos. Laske myös määrätty integraali

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)}{\sin^3(x) + \cos^3(x)} dx.$$

7. (★) Laske määräämätön integraali $\int e^{-ax} \sin x dx$ (*integrate*) ja määrätty integraali $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx$ ($\infty = \mathbf{inf}$). Jotta määrätty integraali suppenisi (=olisi olemassa äärellisenä), pitää luvun a olla positiivinen.

Maximalle voit antaa myös ennako-oletuksia. Anna Maximalle oletus komennolla **assume(a>0)**; ja laske yllä oleva integraali uudestaan. Oletukset voit poistaa komennolla **forget(facts())**;

8. (★) Piirrä funktion $x \mapsto x^2 e^{2x} \left(\log\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}} \right)$ kuvaaja välillä $15 \leq x \leq 20$. Mitä kuvan perusteella voisi päätellä seuraavasta raja-arvosta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{2x} \left(\log\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}} \right) ?$$

Päättele ensin kuvan perusteella, mikä raja-arvon pitäisi olla. Määrää sitten kyseinen raja-arvo (**limit**). Pohdi, miksi kuva ja raja-arvon laskeminen antavat erilaisen vastauksen.

Ymmärrystä saattaa auttaa piirtää uusi kuva vaikkapa välillä $1 \leq x \leq 13$.

9. Maxima osaa käsitellä kompleksilukuja, t.s. lukuja, jotka ovat muotoa $a + bi$, missä a ja b ovat reaalilukuja ja i on ns. imaginaariyksikkö, joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Maximalle $i = \%i$. Katso käsikirjan kohtia *Data Types and Structures* → *Numbers* → *Complex numbers* ja *Mathematical functions* → *Functions for complex numbers*. (Maximian versio 5.30).

Kompleksiluvun normaali esitys $a + bi$ on nimeltään karteeminen esitys (*rectform*). Luvut a ja b ovat sen reaaliosa (*realpart*) ja imaginaariosa (*imagpart*). Luku $a - bi$ on luvun $a + bi$ kompleksikonjugaatti (*conjugate*).

Esitä luvut $(2 + 3i)^2$ ja $\frac{1}{2+3i}$ normaalissa karteesisessä muodossaan.

10. Kompleksiluku z voidaan myös esittää ns. napakoordinaattimuodossa (*polarform*), $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi =: r e^{i\varphi}$. Luku r , pisteen z etäisyys origosta, on nimeltään luvun z moduli (engl. complex absolute value, *cabs*; myös itseisarvo) ja φ argumentti, φ positiivisen x -akselin ja radiussäteen välinen kulma, (engl. complex argument, *carg*; myös vaihekulma; $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Esitä luvut $2 + 3i$ ja $\frac{1}{2+3i}$ napakoordinaattimuodossa.

11. **L^AT_EX**. (*) Luo uusi tyhjä L^AT_EX-dokumentti (voit kopioida esim. ensimmäisen viikon tehtävistä pohjan; ihan tyhjä tiedosto ei toimi). Voit otsikoida dokumentin jos haluat. Harjoitellaan nyt jotain L^AT_EX:in peruskomentoja lisäämällä tähän dokumenttiin seuraavaa:

- (a) Aloita uusi osio komennolla `\section{nimi}`. Laita tässä tehtävässä jokainen kohta omaan osioonsa tai aliosioonsa `\subsection{nimi}`.
(b) Lisää komennot

```
\usepackage{amsthm}
\newtheorem{theorem}{Theorem}
```

dokumenttisi alkuun ennen `\begin{document}`-kohtaa. Voit nyt luoda uuden lauseen komennolla `\begin{theorem} teksti \end{theorem}`. Laita tähän mieleisesti matematiikan lause tai jotain tekstiä. Kirjoita nyt lauseellesi mieleisesi todistus komennolla

```
\begin{proof} teksti \end{proof}.
```

Tätä kohtaa ei ole ihan pakko tehdä vakavissaan, kunhan muotoilu on kunnossa.

- (c) Luo nimetty yhtälö komennolla `\begin{equation}\label{nimi} teksti \end{equation}`. Laita yhtälöön joku matemaattinen kaava. Viittaa nyt yhtälöön tekstissä `\ref`-komennolla, esimerkiksi “Ylhäällä näkyy yhtälö numero `\ref{nimi}`”. Yhtälöön viitatessa voi käyttää myös komentoa `\eqref{nimi}`, tosin tähän pitää ladata `amsmath`-paketti, katso (f)-kohta.

Lisää myös nimi edellisessä kohdassa luomallesi `theorem`-ympäristölle ja viittaa siihen.

- (d) Keskitä vapaavalintaista tekstiä komennolla `\begin{center} teksti \end{center}`.
(e) Luo uusi lista komentamalla tähän tyyliin:

```
\begin{itemize}
\item{teksti1}
\item{teksti2}
\item{teksti3}
\end{itemize}
```

Laita listaan ajatuksiasi siitä, mihin uskot/toivot soveltavasi tietokoneavusteista matematiikkaa tulevaisuudessa. Listasta voi tehdä myös numeroidun vaihtamalla `itemize` tilalle `enumerate`.

- (f) Luo oma theorem-tyylinen ympäristösi laittamalla ennen `\begin{document}`-kohtaa komento

```
\usepackage{amsmath}
\newtheorem{komennonnimi}{Nimi}[section]
```

Ympäristön nimen voit valita itse, vaihda se tekstin “Nimi” paikalle.
Testaa nyt uuden ympäristösi käyttöä komentamalla
`\begin{komennonnimi} teksti \end{komennonnimi}`.