

SYMBOLINEN LASKENTA TEHTÄVÄT VERTAISARVIOINTIESIMERKKIÄ VARTEN

Tämä tiedosto sisältää tehtävät vertaisarviointiesimerkkiä varten. Näitä tehtäviä **ei** voi sisällyttää osaksi harjoitustyötä.

Kursiivilla merkityt sanat ovat vinkkejä Maximian Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. **Tasalevyisellä kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. **Pääteviivattomalla kirjasinlajilla** merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

1. Olkoot

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \log x, \quad h(x) = \sin x.$$

Laske mitä ovat $f(g(x)), g(f(x)), f(g(h(x))), f(h(g(x)))$.

2. Kokeile rationaalipolynomin

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1}.$$

sieventämistä eri komentojen avulla.

3. Olkoon $y = \tan(kx)$, missä k on jokin vakio. Laske y'' komennolla `diff` ja totea, että $y'' = 2k^2y(1 + y^2)$. Trigonometriset sievennykset (`Simplify` → `Trigonometric simplification`) voivat tulla tarpeeseen.
4. Olkoon $f(x) = x^2 + x + 41$ ja $g(x) = 2x^2 + 11$. Näiden funktioiden kuvaajat leikkaavat kahdessa pisteessä. Ratkaise nuo pisteet ja nimeä ne Maximassa `p1` ja `p2`. Komenna Maximaa:

```
wxdraw2d(  
color=blue,  
explicit(f(x),x,-10,10),  
color=red,  
explicit(g(x),x,-10,10),  
color=black,  
point_type=circle,  
points([p1,p2])  
);
```

Selitä mitä yllä oleva komento tekee.

5. Käyttäen komentoa `algsys` ratkaise (numeerisesti) käyrien $x^3 + y^2 = 1$ ja $x^2 + y^2 = 25$ leikkauspisteet.

Käyttäen komentoa `wxdraw2d` piirrä samaan kuvaan molemmat käyrät, ensimmäinen mustalla, toinen sinisellä, sekä piirrä niiden leikkauspisteisiin punaiset ympyrät. Tehtävä 4 auttaa.

Huomaa, että `algsys` palauttaa listan yhtälöpareja. Esimerkiksi:

```
(%i1) ratkaisut:algsys([x^2=y, y = 4],[x,y]);  
(%o1) [[x=2,y=4],[x=-2,y=4]]
```

Komento `points` haluaa kuitenkin listan pistepareja. Komennolla `algsys` saadut ratkaisut voidaan muuttaa sopivaan muotoon seuraavasti ¹:

```
(%i2) map(lambda([z],ev([x,y],z)),ratkaisut);  
(%o2) [[2,4],[-2,4]]
```

6. Maxima-osaa ratkaista integraaleja myös numeerisesti komennolla `romberg`. Lasketaan erään matemaattisen vakion likimääräinen arvo käyttäen sitä.

Eulerin-Mascheronin vakio, merkitään usein γ , esiintyy lukuteoriassa ². Sille pätee

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \log(x) dx = -\frac{(\gamma + 2 \log 2)\sqrt{\pi}}{4}.$$

Tässä vasemmalla puolella on integraali yli välin $[0, \infty)$, mutta ei ole vaikeaa näyttää, että

$$0 \leq \int_{10}^{\infty} e^{-x^2} \log(x) dx \leq \frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_{x=10} \approx 1.9 \times 10^{-44},$$

joten voidaan hyvin integroida ainoastaan yli välin $[0, 10]$ (välin $[0, \infty)$ sijasta) tekemättä suurta virhettä lopputuloksessa.

Laske siis likiarvo vasemman puolen integraalille laskemalla numeerisesti mitä on

$$\int_0^{10} e^{-x^2} \log(x) dx$$

ja sen avulla laske edelleen vakiolle γ likiarvo (ratkaise γ ensimmäisestä yhtälöstä).

Vinkki: Huomaa, että kyseessä on epäoleellinen integraali, joten integroi yli välin $[\varepsilon, 10]$, missä ε on sopivan pieni luku. Tässä tosin tehdään pieni virhe lopputulokseen kun ei integroida välin $[0, \varepsilon)$ yli, mutta voidaan näyttää, että tästä koituvan virheen suuruus on korkeintaan³ $\varepsilon(1 - \log(\varepsilon))$. Voit myös kokeilla muuttaa sisäisen muuttujan `rombergit` arvoa, jotta voit käyttää pienempää muuttujan ε arvoa.

Vakion γ likiarvo kymmenen desimaalin tarkkuudella on 0,5772156649. Miten saamasi tulos suhtautuu tähän?

¹Tätä komentoa ei tarvitse ymmärtää yksityiskohtaisesti tässä vaiheessa kurssia. Riittää, että ymmärtää mitä se tekee.

²Vakion γ määritelmä:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n.$$

³Voit todeta komennolla `limit`, että virhe menee nolliin kun $\varepsilon \rightarrow 0$.