# SYMBOLINEN LASKENTA

JOONAS ILMAVIRTA

## Harjoitustyön ohje, syksy 2016

Harjoitustyö tehdään vaiheittain. Myöhemmät palautettavat tehtävät rakentuvat aiempien päälle.

Tehtävät on jaettu tehtäväpaketteihin. Numeroidut tehtäväpaketit 1–7 käydään läpi viikoittaisissa pääteohjauksissa (harjoituksissa). Nämä tehtävät täytyy (lähes) kaikki tehdä lopputyöhön.

Lisäksi on aakkosilla varustettuja vapaavalintaisia paketteja, joista voi valita mieleisiään.

Muotoiluohjeita ja lisätietoja löytyy kurssin sivuilta:

`http://users.jyu.fi/~jojapeil/opetus/symbolinen/`

**Lämmittely.** Ensimmäisenä palautetaan lämmittelytehtävä. Ota harjoitustyön pohjaksi laadittu LaTeX-dokumentti kurssin sivuilta ja lisää siihen omat tietosi. Kirjoita siihen, mitkä suuntautumisvaihtoehdoista kiinnostavat sinua eniten ja mihin aiot keskittyä.

Laadi yksinkertainen ohjeiden mukaan muotoiltu Maxima-dokumentti (anna kuvaava nimi, kuten `SL_lammittely_sukunimesi.wxm`), jossa on vähintään kolme täysin vapaavalintaista tehtyä tehtävää. (Tähän ei lasketa ensimmäisen tehtäväpaketin alun LaTeX-tehtäviä.)

**Puolikas harjoitustyö.** Seuraavaksi palautetaan puolikas harjoitustyö. Sisällytä siihen tehtäväpaketit 1–3 kokonaan sekä valitsemasi vähintään 5 muuta tehtävää.

**Vertaisarvio.** Saat luettavaksesi kahden muun opiskelijan puolikkaan harjoitustyön. Anna niistä palautetta erikseen annettavien ohjeiden mukaan.

**Lopullinen harjoitustyö.** Lopullinen harjoitustyö sisältää tehtäväpaketit 1–7 sekä valinnaisia tehtäviä niin paljon, että tehtäviä on yhteensä ainakin 50.

Tehtäväpaketeista 4–6 voit jättää korkeintaan viisi pakollista tehtävää väliin jos ne tuntuvat liian vaikeilta. Korvaa tällöin ne muilla tehtävillä.

**Palaute.** Jotta suoritusmerkinnän saa, täytyy kurssista antaa palautetta. Ohjeet tulevat kurssin lähestyessä loppuaan.

**Palautettavat tiedostot.** Jokaisessa palautettavassa harjoitustyön vaiheessa (lämmittely, puolikas, lopullinen) palautetaan kaksi tiedostoa:

- pdf-tiedosto, jonka teet LaTeX:lla ja
- wxm-tiedosto, johon on koottu kaikki palautettavat Maxima-tehtävät.

Varmista, että molempien tiedostojen *nimessä* kerrotaan sukunimesi ja se, mistä harjoitustyön osasta on kyse.

Vertaispalautteen antamisesta ohjeistetaan myöhemmin.

## 1. Yleisohjeita

- Yritä tehdä kunkin viikon tehtävät ennen pääteohjauksia. Jos tulee ongelmia, osaat kysyä itsellesi hyödyllisempiä kysymyksiä opettajalta.
- Maximan dokumentaatiosta on paljon apua, vaikka se onkin paikoin sekava. Jos klikkaat kirjoittamaasi Maxima-komentoa (vaikkapa `ev`) ja painat F1, saat ohjeen kyseisestä komennosta.
- Opetuksen päättymisestä harjoitustyön palauttamisen aikarajaan on reilu viikko aikaa. Tuolla viikolla kurssin molemmat opettajat ovat matkoilla, joten ohjausta saa rajoitetusti. Tee tehtäviä ajoissa!
- Luennoilla ei ole tiukkaa aikataulua. Toiveita, kysymyksiä ja kommentteja saa mieluusti esittää.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Ensimmäiset tehtävät liittyvät LaTeX-ladontaohjelmaan. Niiden suorittamisesta ei tarvitse kirjoittaa palautettaviin suorituksiin mitään. Tosin tehtävän 3 suorittamista tarvitset tehtävien palauttamiseen. Näiden tehtävien tekeminen omalla koneella vaatii ladontajärjestelmän asentamista, mikä ei välttämättä suju ongelmitta. Opettajat koittavat auttaa – ja suosittelevat yliopiston koneita.

**Huomautus:** Tästä tehtäväpaketista voit ottaa lopulliseen harjoitustyöhön mukaan vain tehtävät 7–9.

1. **LaTeX.** Etsi kurssin sivuilta tiedosto `karvalakki.tex` ja tallenna se johonkin omaan kansioosi[1]. Avaa TeXworks-ohjelma[2] ja avaa tämä tiedosto kyseisellä ohjelmalla. Tämä on karvalakkiversio LaTeX-dokumentista. Valitse vihreän nuolen vierestä alasvetovalikosta ”pdfLaTeX”. Paina vihreää nuolta (”typeset”), ja LaTeX luo sinulle pdf-tiedoston. Kansioosi ilmestyy kasa karvalakkitiedostoja, joista yksi on karvalakki.pdf, jonka pitäisi aueta automaattisesti. Olet luonut ensimmäisen LaTeX-dokumenttisi!

2. **LaTeX.** Tee edelliseen tiedostoon muutoksia. Kirjoita ”Moi!”-kohtaan lisäksi tai tilalle pari sanaa muuta tekstiä. Lisää myös `$f(x)=\sin^2x$`. Paina vihreää nappia ja saat uuden pdf:n.

3. **LaTeX.** Etsi kurssin sivuilta tiedosto `ht-pohja.tex`. Muuta ensin tiedoston nimi nimi muotoon `ht-sukunimesi.tex`, missä on oma sukunimesi ilman ääkkösiä. Avaa tiedosto TeXworksilla. Tee siitä tuttuun tapaan pdf-tiedosto.

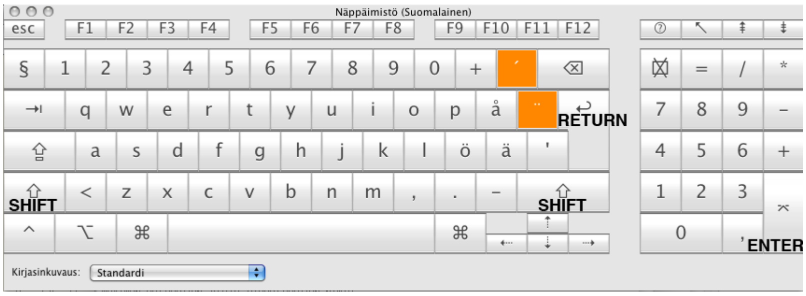
   Lue tämä tiedosto ja muokkaa sinne omat tietosi. Tämä pdf-tiedosto pitää palauttaa harjoitustyön joka vaiheessa. Tiedosto venyy hiljalleen kurssin mittaan.

4. Käynnistä wxMaxima, kirjoita ikkunaan laskutoimitukseksi vaikka `1+1`, päätä syöterivi puolipisteeseen ( ; ) ja suorita laskutoimitus (=paina ⟨shift⟩+⟨return⟩ tai ⟨enter⟩).

---

[1] Tätä kurssia varten kannattaa luoda omalle U-asemalle kansio, koska tiedostoja tulee.

[2] Muitakin editoreita saa käyttää. On kuitenkin kätevää, että editorista voi suoraan käskyttää kääntäjää.




5. Laske vaativampia laskutoimituksia, vaikkapa suuria kertolaskuja ja potenssiin korotuksia. Kertolaskuun tarvitset merkin `*` (returnin vieressä) ja potenssiinkorotukseen `^` (=aksenttimerkki välilyöntimerkin päälle, tai `**`).

6. Laske ensin lukujen $\frac{1}{8}$ ja $\frac{3}{5}$ summa ja tulo, ja sitten saadun tulon kolmas potenssi. Viimeisimpään tulokseen voi viitata symbolilla `%` ja aiempiin muodossa `%o`$n$, missä $n$ on tulosrivin numero, tai muodossa `%th`$(n)$, missä $n = 1$ viittaa viimeisimpään tulokseen, $n = 2$ toiseksi viimeiseen, jne. (Engl. $n^{\text{th}} \to n$:s.)

7. Avaa Help-valikosta Maxima Help. Valitse hakutavaksi Index. Kirjoita hakusanaksi *numer*; lue dokumentaatio, ja laske piille *%pi* likiarvo.
   Likiarvon voi laskea myös komennolla *float*
   `float(lauseke)`
   ja suurtarkkuuslikiarvon komennolla *bfloat* (float←floating point, bfloat←big float). Tarkkuus ilmaistaan muuttujalla *fpprec* (←floating point precision):
   `bfloat(lauseke), fpprec:tarkkuus`.
   Laske piin likiarvo 100 numeron tarkkuudella. Entä 1000 numeron?

8. Kätevämpi tapa käyttää aiempia tuloksia myöhemmissä laskuissa on nimetä tarvittavat suureet. Suure `lauseke` tallennetaan muuttujaan `nimi` kaksoispistesijoituksella, `nimi:lauseke` (ks. Help→Index→ `:` ).
   Anna luvuille $\frac{1}{8}$ ja $\frac{3}{5}$ nimet `luku1` ja `luku2`, laske näitä nimiä käyttäen lukujen summa ja tulo samalla nimeten tulokset nimille `summa` ja `tulo`. (Ääkkösiä nimeämisessä on syytä välttää.)
   Laske tulon kolmas potenssi, ja edelleen lisää tähän aiemmin saatu summa. Laske lopuksi tuloksesta likiarvo.

9. **Tärkeä.** Lauseke, jonka arvoa edellä on laskettu, on tutummassa matemaattisessa muodossaan $(xy)^3 + x + y$. Jos muuttujiin $x$ ja $y$ ei haluta sitoa arvoja, voidaan näistä muuttujista riippuvan lausekkeen $z$ arvo laskea pisteessä $x = a$ ja $y = b$ laskea komennolla `ev(z, x=a, y=b)`. (ev←evaluate, laske arvo). Vaihtoehtoisesti voi käyttää komentoa `subst([x=a, y=b], z)`.
   Laske lausekkeen $(xy)^3 + x + y$ arvo komennon `ev` avulla, kun $x = 1/8$ ja $y = 3/5$.

10. Käyttöliittymästä wxMaxima:
    Siirry dokumentin alkuun, klikkaa osoitin aivan ensimmäisen syötesolun yläpuolelle (merkiksi pitäisi ilmestyä ohut ikkunan levyinen vaakaviiva).
    Valitse Cell→Insert Title Cell ja annan dokumentillesi otsikko *Symbolinen laskenta, harjoitus 1.*

Klikkaa osoitin aivan otsikkosolun alapuolelle, ja valitse Cell→Insert Section Cell. Nämä väliotsikkosolut wxMaxima numeroi automaattisesti.

Etsi dokumentista tämän harjoituksen eri tehtäviin liittyvät laskut ja liitä jokaisen kohdaan alkuun väliotsikkosolu, jolloin dokumenttisi osat tulee numeroiduksi tehtäväjaon mukaisesti.

Tarpeen mukaan voit eri syötesolujen väliin lisätä kommentteja lisäämällä tekstisolun Cell→Insert Text Cell. Vaikka syötesolut ja tekstisolut eivät ulkoasultaan poikkea paljoa toisistaan, ei syötesoluja tulee käyttää muuhun tarkoitukseen kuin siihen, mihin ne on tarkoitettu.

On tärkeää tallentaa tekosiaan ja varustaa ne omalla nimellä. Tallenna dokumentti wxMaxima wxm-muodossa vaikkapa nimellä SL_harjoitus_1_sukunimi.wxm. Sulje dokumentti (mahdollisesti wxMaximakin on hyvä lopettaa välillä), avaa se uudelleen. Aukeavasta dokumentista puuttuvat tulokset, vain syötteet ja otsikot säilyvät. Valitse Cell→Evaluate All Cells. Tarkista Maximan laskemista tuloksista, että dokumenttisi ”toimii oikein”.

Jos haluat tallentaa dokumentistasi kopion, jossa mukana kulkevat myös tulokset, tallenna dokumentti wxMaximan wxmx-muodossa (File→Save As; alkuperäinen wxm-dokumentti kannattaa säilyttää). Tallennusmuotona wxm on parempi, koska ne ovat tavallisia tekstidokumentteja, joita voi lukea millä tahansa tekstieditorilla; wxmx-dokumentit ovat binäärisiä xml-tiedostoja, joiden avaamiseen käyvät vain tietyt ohjelmat (mm. wxMaxima).

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

11. Tutki ohjeesta, miten funktiota `plot2d` käytetään kuvaajan piirtämiseen. Piirrä kuva valitsemastasi funktiosta valitsemallasi välillä. Tee sitten sama uudestaan käyttäen komentoa `wxplot2d` muuttamatta mitään muuta. Miten eroa näiden komentojen tuloksilla on?

12. Yhtälö $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ on koulusta tuttua perusalgebraa. Myös Maxima osaa tämän kaavan, kunhan sitä käskee oikein (vasemmalta oikealle *expand*, oikealta vasemmalle *factor*). Sievennyskomentoja löytyy valmiina wxMaximan valikosta Simplify. Huomaa valikkokomentojen toimintatapa: toiminta ”kohdistuu” valittuun kohtaan tai kohde on viimeksi laskettu syöte.
    Jaa tekijöihin lauseke $x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6$.
    Miten pääset tulomuodosta takaisin polynomin tässä olevaan muotoon?

13. Sievennä $\sqrt{x^2+6x+9}$. Onko tulos ”oikein”?

14. Selvitä lausekkeen
$$\frac{\sin x}{\sin(2x)}\frac{4\sin^2 x - 1}{\sin(3x+\frac{\pi}{2})}$$
sieventämistä Maximan valikon Simplify kohdan Trigonometric Simplification eri komennoilla.

**Kommentteja:** Käyttöliittymäohjelman wxMaxima valikoista Equations, Algebra, Calculus, Simplify ja Plot (miksei myös Numeric) löytyy varsin paljon perustyöskentelyssä tarvittavia Maximan komentoja. Näiden komentojen tarkempi käyttötapa on syytä selvittää Maximan käsikirjasta.

Edellä olleista tehtävistä näkyy, että Maximaa käytetään ainakin kahdella selkeästi toisistaan poikkeavalla tavalla. Jos kyse on **funktiotyyppisestä komennosta**, sitä käytetään kuten komentoja `float` tai `logcontract`:

```
logcontract(lauseke);
```

Jos taas kyse on **systeemimuuttujasta**, kuten `logexpand` tai `numer`, tälle muuttujalle annetaan arvo, joka vaikuttaa uudelleenlaskettavan lausekkeen arvoon kuten

```
lauseke, logexpand=all;
```

Jos muuttujan arvo jätetään ilmaisematta, niin oletusarvo on `true` kuten

```
lauseke, numer;
```

Tässä käytössä oleva komentomuoto on itse asiassa lyhenne komennosta

```
ev(lauseke, numer=true);
```

Maximan käsikirjaa selatessa on siis hyvä kiinnittää huomiota siihen, onko kyse **komennosta** vai **muuttujasta** (tai vastaavasta).

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

15. Määrittele muuttujan `lauseke` arvoksi $e^x \sin x$.

    Maxima osaa laskea lausekkeille derivaattoja (*diff*) ja integraalifunktioita (*integrate*) tai vaikkapa piirtää (*plot2d*) lausekkeiden kuvaajia koordinaatistoon. Laske derivaatta symbolin `lauseke` arvolle. Yhtä helposti onnistuu toisen derivaatan (derivaatan derivaatan) laskeminen. Laske samalla myös kolmas, neljäs jne derivaatta...

16. Laske määräämätön integraali $\int e^{-ax} \sin x \mathrm{d}x$ (*integrate*) ja määrätty integraali $\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \mathrm{d}x$ ($\infty =$ *inf*). Jotta määrätty integraali suppenisi (=olisi olemassa äärellisenä), pitää luvun $a$ olla positiivinen.

    Maximalle voit antaa myös ennakko-oletuksia. Anna oletus komennolla `assume(a>0);` ja laske yllä oleva integraali uudestaan. Oletukset voit poistaa komennolla `forget(facts());`.

17. Piirrä funktion $x \mapsto x^2 e^{2x}\big(\log\big(e^x + \frac{1}{x}\big) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\big)$ kuvaaja välillä $15 \leq x \leq 20$. Mitä kuvan perusteella voisi päätellä seuraavasta raja-arvosta

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{2x}\left(\log\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\right) ?$$

    Määrää kyseinen raja-arvo (*limit*).

18. **Kokoaminen.** Harjoitustyön – niin puolikkaan kuin kokonaisenkin – palauttamista varten sinun täytyy yhdistää eri harjoitukset yhdeksi wxm-tiedostoksi. (Helpottanee kuitenkin työskentelyä, ettet kokoa alusta asti yhtä valtavaa tiedostoa, vaan kokoat tarpeen tullen pienemmistä tiedostoista yhdistelmiä.) Kopioi kaikki harjoitukset yhteen uuteen wxm-tiedostoon ja nimeä tiedosto sopivasti. Sulje ja avaa tämä uusi tiedostosi, ja valitse valikosta Cell→Evaluate All Cells. Varmista, että kaikki on kuten pitääkin.

    Tehtäväpakettien välille on syytä laittaa komento `kill(values);`, joka poistaa antamasi lausekkeiden, funktioiden ja muiden vastaavien määritelmät. Näin eri tehtävien laskut eivät sekoita toisiaan. Anna Maximalle seuraavat komennot kokeillaksesi, kuinka hyvin se muistaa muuttujan `a` arvon:

```
a:1;
a;
kill(values);
a;
```

Tällä viikolla harjoitustehtäviä on vähän, joten ehdit hyvin katsoa myös valinnaisia tehtäviä.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

19. Maximassa yhtälöiden ja yhtälöryhmien "perusratkaisija" on *solve*.
Ratkaise yhtälö $2x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 25x^2 - 12x + 12 = 0$. Vaikka yhtälö on viidettä astetta, Maxima palauttaa vain neljä juurta. Polynomiyhtälöiden *juurten kertaluvut* Maxima kertoo komennolla (tai oikeammin systeemimuuttujalla) `multiplicities`. Tässä tilanteessa juuret saadaan melko helposti selville myös komennolla `factor`.

20. Viidennen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt voivat olla ongelmaisia. Yritä ratkaista yhtälo $x^5 + 7x + 1 = 0$. Maximan komento `algsys` ratkaisee polynomiyhtälöryhmiä (huomaa syntaksi) tarvittaessa numeerisesti. Kokeile tätä. Muita hyödyllisiä komentoja polynomiyhtälöiden ratkaisemiseen ovat `nroots` ja `allroots`.

21. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ \qquad y^2 = x^3 - 3x + 1. \end{cases}$$

22. Piirrä funktion $f(x) \coloneqq e^x \sin(2x) + e^{x/2} \cos x$ ja sen derivaatan $f'(x)$ kuvaajat.
Etsi yhtälölle $f'(x) = 0$ ratkaisu likimääräismenetelmin. Selvitä aluksi, miten komentoa `find_root` käytetään. Miten avuksi tarvittavat luvut $a$ ja $b$ on valittava? Käytä derivaatan kuvaajaa apuna. Laske myös funktion arvo löytämässäsi derivaatan (likimääräisessä) nollakohdassa.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Tehtävät liittyvät linaarialgebraan/matriisilaskentaan. Peruskäsitteistö löytyy kerrattuna luennolla esitetystä materiaalista.

23. Olkoot

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad C := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Määrää matriisien (*matrix*) $A$, $B$ ja $C$ kaikki ne parittaiset (matriisi-)tulot, jotka on määritelty.

24. (Jatkoa.) Määrää jokaiselle matriiseista $A$, $B$ ja $C$ aste (*rank*).

Määrää determinantti (*determinant*) ja käänteismatriisi (*invert*) niille matriiseista $A$, $B$ ja $C$, joille ne on määritelty.

25. (Jatkoa.) Määrää matriisin $A$ liittomatriisi $A_{\mathrm{ad}}$ (*adjoint*) ja totea, että $AA_{\mathrm{ad}} = (\det A)\mathbb{I}$, missä $\mathbb{I}$ on $3 \times 3$-kokoinen yksikkömatriisi (*ident*).

Tällä viikolla harjoitustehtäviä on vähän, joten ehdit hyvin katsoa myös valinnaisia tehtäviä.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Lataa (*load*) käyttöön grafiikkapaketti `draw`, jos tarvittavia komentoja ei muuten näytä löytyvän. Riippuu luultavasti versiosta, mitä tarvitsee ladata ja mitä ei.

26. Piirrä komentojen *wxdraw2d* ja *explicit* avulla funktion $f(x) := x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ kuvaaja. Myös komentoa *draw2d* saa käyttää jos se on mieluisampi.

27. (Jatkoa.) Määrää funktion $f$ nollakohdat, eli pisteet $x$, joissa käyrä $y = f(x)$ leikkaa $x$-akselin. Tässä komento `allroots` lienee kätevin. (Miksei `solve`?)

28. Yksittäisen kuvaajan voi piirtää helpoiten *wxplot2d*-komennolla. Useampien graafisten elementtien yhdistelyyn *wxdraw2d* on tarpeen. Komenna Maximaa näin:

```
wxdraw2d(
color=green,
explicit(x^2,x,-2,0),
color=red,
implicit(x^2+y^2=1,x,-1,1,y,-1,1)
);
```

Samassa kuvassa on sekä eksplisiittinen (tavallinen) kuvaaja että implisiittinen kuvaaja (yhtälön ratkaisujoukko). Funktion $x \mapsto x^2$ kuvaaja on piirretty vain välillä $[-2, 0]$. Miten sinun pitää muuttaa komentoa saadaksesi paraabelin ulottumaan ympyrän oikealle puolelle?

Tällä viikolla harjoitustehtäviä on vähän, joten ehdit hyvin katsoa myös valinnaisia tehtäviä.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

29. **Ääriarvo-ongelmaesimerkki.** Lue tämä esimerkki, toteuta se itse Maximalla ja vastaa lopussa esitettyyn kysymykseen.

Etsitään funktion $f(x) = \sin x + \log x$ ääriarvot välillä $[1, 10]$ Maximan avulla. Määritellään ensin funktion lauseke muuttujaksi `lauseke`:

```
lauseke:sin(x)+log(x);
```

Lasketaan sitten derivaatta:

```
dlauseke:diff(lauseke,x);
```

Ääriarvot löytyvät tunnetusti välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista.

Piirretään kuva funktiosta ja derivaatasta:

```
wxplot2d([lauseke,dlauseke],[x,1,10]);
```

Kuvasta nähdään, että yksi derivaatan nollakohta on jossain ykkösen ja kolmosen välillä. Etsitään tämä nollakohta ja annetaan sille nimi `a`:

```
a:find_root(dlauseke,x,1,3);
```

Toinen nollakohta on välillä $(4, 5)$ ja kolmas välillä $(7, 9)$:

```
b:find_root(dlauseke,x,4,5);
c:find_root(dlauseke,x,7,9);
```

(Nämä ovat kaksi eri komentoa. Voit antaa ne yhdessä tai erikseen.) Lisäksi ääriarvo voidaan saavuttaa välin päätepisteissä, joten laitetaan nekin talteen:

```
d:1;
e:10;
```

Lasketaan sitten lausekkeen arvot näissä pisteissä ja nimetään vastaavat muuttujat isoilla kirjaimilla:

```
A:ev(lauseke,x=a);
B:ev(lauseke,x=b);
C:ev(lauseke,x=c);
D:ev(lauseke,x=d);
E:ev(lauseke,x=e);
```

Vertailemalla näitä lukuja nähdään funktion suurin ja pienin arvo sekä pisteet, joissa ne saavutetaan.

Piirretään lopuksi vielä tyylikäs kuva, jossa näkyy funktio, sen derivaatta, derivaatan nollakohdat ja ääriarvokandidaatit:

```
wxdraw2d(
xrange=[0.9,10.1],
yrange=[-1,4],
xaxis=true,
```

```
color=blue,
explicit(lauseke,x,1,10),
color=red,
explicit(dlauseke,x,1,10),
color=green,
points_joined=true,
point_size=0,
points([[a,0],[a,A]]),
points([[b,0],[b,B]]),
points([[c,0],[c,C]]),
points([[d,0],[d,D]]),
points([[e,0],[e,E]]),
color=black,
points_joined=false,
point_type=plus,
point_size=2,
points([[a,A],[b,B],[c,C],[d,D],[e,E]])
);
```

(Tämä on yksi komento, joten se pitää syöttää kerralla! Rivinvaihdot voi jättää pois jos tahtoo.)

Millä muuttujan $x$ arvolla funktio saa pienimmän arvonsa tällä välillä? Mikä on funktion suurin arvo tällä välillä? Anna vastaus likiarvoina tai Maxima-muuttujien niminä.

30. **Ääriarvo-ongelma.** Etsi funktion $f(x) = \cos x - \log x$ ääriarvot välillä $[1, 7]$ ja esitä laskusi graafisesti. Käytä hyväksesi edellistä tehtävää.

31. **Tulosten tulkintaa.** Laske integraalit $\int_0^\pi \tan(x)\mathrm{d}x$ ja $\int_0^{2\pi} \tan(x)\mathrm{d}x$. Piirrä myös tangenttifunktion kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$. Kommentoi tuloksia.

32. **Pulmia.** Vastaa joka kohtaan. Käytä selittämiseen tekstisoluja.
    (1) Miksi komento `wxplot2d(1-2x,[x,0,2]);` ei tuota kuvaajaa? Miten komentoa pitää korjata?
    (2) Komennon `cos(arccos(x));` pitäisi palauttaa `x`. Tämä ei kuitenkaan toimi. Miksi ei?
    (3) Käytä komentoa `trigexpand` sieventämään lauseketta $2 \sin 2z$. Mitä sinun pitää kirjoittaa Maximaan? Varmista että toimii.
    (4) Mitä Maximan pitäisi antaa vastaukseksi, komennat `diff(x^2,x);`? Mitä tämä tarkoittaa?
    (5) Kun edellisen komennon jälkeen komennat `ev(%,x=1);`, mitä Maximan pitäisi vastata? Selitä, minkä laskun tulos saatu luku on.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

33. Miten sievenee lauseke
$$\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}?$$

34. Maxima sieventää automaattisesti lausekkeen $\tan(\arctan x)$, mutta ei lauseketta $\arctan(\tan x)$. Piirrä kuva, niin näet miksi. (*plot2d* tai `wxplot2d`)

35. Logaritmin laskusääntöjä muistelemalla lauseke
$$\frac{(\log(x^2+6x+9)-\log(x+3))^p}{(\log(x+3))^{\frac{p}{2}}}$$
sievenee helposti muotoon $(\log(x+3))^{p/2}$. Maxima ei kuitenkaan tunnu osaavan tätä tehtävää. Ongelma ei löydy niinkään logaritmeista kuin *radikaaleista* (engl. radical = juuri; tässä mielivaltainen potenssi $(\ldots)^p$ on tällainen). (Tutki komentoa *radcan* tai Simplify→Simplify Radicals.)

36. **Logaritmilausekkeiden sieventämisestä.** Aseta aluksi `logexpand:false`.
Systeemimuuttujan `logexpand` arvoina voi olla `false`, `true`, `all` tai `super`. Selvitä Maximan käsikirjan (Help) avulla miten muuttujan `logexpand` arvo vaikuttaa logaritmien sieventämiseen; sen käyttötapa on

```
lauseke, logexpand=arvo;
```

Syötä Maximalle lauseke $\log((x+3)^2)$ ja nimeä se vaikka nimelle `y`. Sievennä lauseke `y`. Entä jos $y = \log(4(x+3)^2)$? Ovatko tulokset korrekteja?
Polynomeille `expand` ja `factor` ovat jossakin mielessä käänteisiä operaatioita. Muuttujan `logexpand` eri arvojen vaikutus voidaan "kääntää" komennolla `logcontract`. Miten `logcontract` vaikuttaa edellisiin tuloksiin? Entä jos $y = \log(a(x+3)^n)$ (missä parametreilla $a$ ja $n$ ei ole numeerista arvoa)?

37. **Lauseke ja funktio.** Funktio $f$ ja funktion lauseke $f(x)$ ovat kaksi eri asiaa, niin matematiikassa kuin Maximassakin. Tällä kurssilla käytetään enimmäkseen lausekkeita, koska se on usein helpompaa. Määrittele funktio $f(x) = x^2$ sekä lausekkeena (`lauseke:x^2`) että funktiona (`f(x):=x^2`).
Mitä Maxima antaa, kun kysyt mitä on `f(y)`? Miten saat vastaavan tuloksen käyttäen lauseketta `lauseke` funktion `f` sijaan?
Mikä on funktion $f$ arvo pisteessä 2? Laske molemmilla tavoilla.

38. Toista tehtävä 29 käyttäen lausekkeen sijaan funktiota `f(x):=sin(x)+log(x)`.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

Useita Maxima-komentoja voi antaa kerralla yhdelle syöteriville kaarisulkujen[3] avulla ja erottamalla eri komennot toisistaan pilkulla:

```
(nimi1:lauseke1, nimi2:lauseke2,...);
```

Muuttujat, joita ei enää tarvita, on hyvä vapauttaa Maximan muistista. Vapauttaminen tapahtuu komennolla `kill`. Lista muuttujista, joille on annettu arvo, saadaan komennolla `values`, ja kaikkien tämän listan muuttujien arvot voidaan vapauttaa `kill(values)`.

39. **Anonyymi ja nimetty funktio.** Jotkin funktiot (ks. esim. *apply*) vaativat argumentikseen funktion, ja silloin ei lauseke auta. Tällöin voi nimetä funktion (esim. `f(x):=x^2` kuten edellä), mutta joskus ei haluaisi turhaan nimetä objektia. Tällöin voi käyttää anonyymia funktiota, jollaisen luomiseen käytetään funktiota `lambda`.

    Laske funktion $t \mapsto t^3 - t$ arvo pisteessä 4 käyttäen anonyymia funktiota (nimeämättä siis lauseketta tai funktiota).

40. (Jatkoa.) Määrittele apina näin: `apina:banaani^3`. Miten tätä objektia sekä `lambda`-funktiota käyttäen voidaan määritellä funktio $g$, jolle $g(t) = t^3$? Älä siis kirjoita `g(t):=t^3`, vaam käytä valmista lauseketta `lambda`n avulla. (Vihje: Kannattaa kokeilla apinan evaluointia lambdan sisällä.)

41. **Maximan olioiden puurakenteesta.** Kun Maximalle asetetaan

    ```
    (%i1)  e:f(a,[b,c]);
    ```

    käsittelee Maxima lauseketta alla olevan kaavion vasemman puoleisen "puurakenteen" mukaisesti (tässä oletetaan, että k.o. muuttujia ei ole mitenkään määritelty):

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & \\ & \nearrow & & & \\ f & & & & b \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & [b,c] & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & c \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \texttt{part(e,1)} & & \\ & \nearrow & & & \\ \texttt{part(e,0)} & & & & \texttt{part(e,2,1)} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \texttt{part(e,2)} & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & \texttt{part(e,2,2)} \end{array}$$

[3] Maximaa (ja montaa muutakin ohjelmaa) käytettäessä on eri sulkuja hyvä oppia kutsumaan niiden oikeilla nimillä: ( *kaarisulut* ), [ *hakasulut* ] ja { *aaltosulut* }. Käyttöliittymäohjelma wxMaximassa voi useita komentoja laittaa samaan syötesoluun (Input Cell), mutta wxMaxima välittää ne laskentaydin Maximalle erillisinä syötteinä (eri `%in`- ja `%out`-nimikkeet). Kaarisuluilla ryhmitettynä ja pilkuin erotettuna syöte on Maximalla vain yksi syöte.

Suure `f` on lausekkeen `e` *juuri*. Se saadaan poimituksi komenolla `part(e,0)`. Lauseekkeesta `e` lähtee *haarat solmuihin* `a` ja `[b,c]`. Näistä puolestaan `[b,c]` haarautuu uudestaan haaroiksi solmuihin `b` ja `c`. Lausekkeen `[b,c]` juuri on listojen rakentamisen perustyökalu `[`. Kuvan oikea puoli selittää, miten lausekkeen `e` eri osat saadaan poimituksi erilleen.

Komennolla `substpart(g,e,`$j$`)` voidaan lausekkeen `e` paikassa $j$ oleva osa korvata lausekkeella `g`. (Kyseinen osa saadaan poimituksi komennolla `part(e,`$j$`)`.) Esimerkiksi `part(e,2,2)` poimii lausekkeesta `e` osan `c`, ja sen tilalle voidaan vaihtaa $x^2 + y^2$ komennolla

```
(%i2)  substpart(x^2+y^2,e,2,2);

                         2     2
(%o2)  f(a, [b, y  + x ])
```

Jos halutaan muuttaa useampia solmuja kerralla, voidaan käyttää komentoa `map`. Se lisää lausekkeen `e` jokaisen ensimmäisellä tasolla olevan solmun juureksi annetun funktion. Esimerkiksi

```
(%i3) map(g,e);
(%o3)  f(g(a), g([b, c]))
```

Edellä esiintynyt `map("=",...)` toimii näin:

```
(%i4) map("=", [x,y,z], [1,2,3]);
(%o4)  [x = 1, y = 2, z = 3]
```

42. Halutaan laskea summa $\sum_{j=1}^{10} a_j$, missä $a_j$:t ovat lukuja. Tämä voidaan tehdä käyttäen komentoa `sum`:

```
sum(a[j],j,1,10);
```

Toinen tapa laskea summa on käyttää `for`-silmukkaa: Alustetaan ensin summalle `s` arvo nolla:

```
s:0;
```

Haluttu summa voidaan nyt laskea komennolla

```
for j:1 thru 10 do ( s:s+a[j] );
```

Tässä siis ensin alustetaan lausekkeelle `j` arvo 1 ja annetaan sen käydä läpi kokonaislukuarvot 10:een asti ja jokaisen arvon kohdalla suoritetaan komento `s:s+a[j]`.

Syötä seuraava lista (lämpötilan kuukausikeskiarvoja)

```
lst:[[1,-8.3], [2,-8.5], [3,-3.8], [4,2.2], [5,8.9], [6,13.7],
     [7,16.5], [8,14.1], [9,8.8], [10,3.6], [11,-2.0], [12,-6.2]];
```

Käyttäen jompaa kumpaa edellä mainituista tavoista laske lämpötilan vuosikeskiarvo. Käytä komentoa `part` apuna lämpötilan erottamiseksi.

43. Tutustutaan seuraavaksi `if...then`-rakenteen käyttöön. Oletetaan, että `a` on jokin reaaliluku. Komento

```
if a > 0 then print("a on positiivinen");
```

tulostaa tekstin ”a on positiivinen”, jos lausekkeelle `a` pätee `a > 0`.

Käyttäen edellä olevaa esimerkkiä apuna tulosta (komento `print`) edellisen tehtävän listasta esiin ne kuukausi–lämpötila-parit, joissa lämpötilan kuukausikeskiarvo on suurempi kuin vuosikeskiarvo.

44. Jatketaan edellistä tehtävää, mutta tällä kertaa tulostamisen sijaan halutaan tallentaa ehdot täyttävät listan alkiot toiseen listaan. Alustetaan ensin tyhjä lista

```
tmp:[];
```

Tutustu Maximan komentoon `append` (Huomaa erityisesti, että `append` liittää kaksi listaa yhteen, ei lisää alkiota listaan, kuten monissa ohjelmointikielissä). Käyttäen sitä, tällä kertaa tulostamisen sijaan, lisää ehdot täyttävä pari määrittelemääsi listaan `tmp`.

45. Edellisen tehtävän karsittu lista voidaan muodostaa myös toisella tapaa. Määritellään funktio

```
f(l):=is(l[2] > s/12);
```

missä `s` on siis tehtävässä 42 määritelty. Laske funktion `f` arvo listan `lst` ensimmäisestä ja seitsemännestä parista.

Nyt käyttäen `sublist`-komentoa saadaan sama lopputulos kuin edeltävässä tehtävässä:

```
sublist(lst, f);
```

Huomaa, että tässä jälkimmäinen muuttuja on funktio, ei funktiota määrittelevä lauseke.

Tässä tilanteessa voidaan käyttää myös funktion `lambda`-esitystä[4], jolloin ei tarvitse erikseen nimetä funktiota `f`. Miten se tapahtuisi?

46. Vapauta funktio $f$. Komentoja `map` ja `apply` voi käyttää ”Maximamaisemmin” alussa esitettyyn listan `lst` lämpötilakeskiarvon laskemiseen. Kokeile aluksi seuraavia (yksi kerrallaan):

```
map(f, [a,b,c]);
apply(f, [a,b,c]);
```

Maximassa on myös kummallinen funktio nimeltä `"+"`, jolle voi antaa niin monta argumenttia kuin tahtoo. (Voit halutessasi tutkia myös funktioita `"*"`, `"="` ja `"-"`.) Laske esimerkiksi seuraavat:

```
"+"(a,b);
"+"(12,43,71);
```

Listan `[a,b,c]` summan voi siis laskea seuraavasti: `apply("+", [a,b,c]);`.

Määrittele funktio, joka laskee sille annetun listan summan, ja sitä käyttäen laske lämpötilojen summa listasta `lst`. Huomaa, että tehtävässä joudut erottamaan lämpötilat listasta `lst`. Tässä erottelussa auttaa sopiva funktio `f` yhdessä `map`-komennon kanssa.

[4]Funktion `lambda`-esitys vastaa tavanomaista matemaattista ilmaisua, jossa funktiolle ei anneta nimeä; esimerkiksi ”funktio $x \mapsto x^2 \sin(x+2)$”. Katso tehtävää 39.

47. Käyttäen hyväksi edellistä tehtävää ja Maximan komentoa `length` määrittele funktio `avg`, joka laskee sille annetun (yksiulotteisen) listan keskiarvon. Miten käyttäen tätä määrittelemääsi funktiota lasket listasta `lst` lämpötilojen keskiarvon?

48. Listan `L` alkioiden keskihajonta saadaan lasketuksi komennolla

```
std_dev(L):=sqrt((L-avg(L)).(L-avg(L))/length(L));
```

Laske listan `lst` lämpötilojen keskihajonta ja piirrä `draw`-kirjaston komentojen avulla kuva, jossa on lämpötilakäyrä ja vaakaviivana lämpötilan keskiarvo Lisää kuvaan vaakaviivoina lämpötilan keskiarvo + keskihajonta ja keskiarvo − keskihajonta.

49. Maxima osaa lukea myös tiedostosta dataa. Komento

```
w1:read_matrix(file_search ("wind.data"))$
```

lukee tuulennopeuksien mittaustaulukon (wind.data on Maximan mukana tuleva tiedosto; ”On the other hand, file `wind.data` contains daily average wind speeds at 5 meteorological stations in the Republic of Ireland. . . ”). Muuttuja `w1` on $100 \times 5$-kokoinen matriisi, jonka jokainen sarake sisältää 100 tuulennopeusmittausta. Komento

```
w2:substpart("[", transpose(w1), 0)$
```

muuttaa mittaustulokset (helpommin käsiteltäväksi) viiden listan listaksi; kukin viidestä listasta on yhden mittauspaikan tuulennopeusarvojen lista.

Valitse jokin mittauspaikka, ja laske sen tuulennopeuksien keskiarvo ja keskihajonta. Poimi havainnoista ne, joissa tuulennopeus on ollut suurempi kuin keskiarvo + keskihajonta. Havainnollista laskuja kuvalla.

50. Maxima osaa lukea myös funktion määrittelyn tiedostosta. Näin ei joka kerta tarvitse kirjoittaa montaa komentoa tehdäkseen usein toistuvan asian, vaan voi luoda funktion, jonka lataa tiedostosta.

Avaa tavallinen tekstieditori ja tallenna seuraavat käskyt sisältävä tiedosto nimellä crit_points_p.mac:

```
crit_points_p():=(
p:readonly("Anna polynomi p(x):"),
dp:diff(p,x),
p_roots:map(lambda([z],part(z,2)),sort(realroots(dp))),
if length(p_roots) = 0 then error("Virhe: derivaatalla ei reaalisia juuria"),
p_values:map(lambda([y],ev(p,x=y)),p_roots),
min_root:first(p_roots),
max_root:last(p_roots),
min_value: first(sort(p_values)),
max_value: last(sort(p_values)),
wxdraw2d(
    xrange=[min_root-1,max_root+1],
    xaxis=true,
    yrange=[min_value-1,max_value+1],
    color=blue,
    explicit(p,x,min_root-1,max_root+1),
```

```
    color=black,
    points_joined=false,
    point_type=circle,
    point_size=1,
    points(p_roots,p_values)
    )
)$
```

Tiedostossa siis määritellään funktio `crit_points_p`. Voit ladata sen käyttöösi valitsemalla Maximan valikoista File -> Batch file... ja avaamalla juuri luomasi tiedoston.

Kokeile ajaa kyseinen funktio komennolla

```
crit_points_p();
```

Tutki funktion koodia ja selitä miten se toimii ja mitä se tekee. Sinun ei tarvitse erikseen palauttaa luomaasi tiedostoa.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

51. Maxima osaa käsitellä kompleksilukuja, t.s. lukuja, jotka ovat muotoa $a+bi$, missä $a$ ja $b$ ovat reaalilukuja ja $i$ on ns. imaginaariyksikkö, joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Maximalle $i =$ `%i`. Katso käsikirjan kohtia *Data Types and Structures → Numbers → Complex numbers* ja *Mathematical functions → Functions for complex numbers*. (Maximan versio 5.30).

Kompleksiluvun normaali esitys $a+bi$ on nimeltään karteesinen esitys (*rectform*). Luvut $a$ ja $b$ ovat sen reaaliosa (*realpart*) ja imaginaariosa (*imagpart*). Luku $a - bi$ on luvun $a + bi$ kompleksikonjugaatti (*conjugate*).

Esitä luvut $(2 + 3i)^2$ ja $\frac{1}{2+3i}$ normaalissa karteesisessa muodossaan.

52. Kompleksiluku $z$ voidaan myös esittää ns. napakoordinaattimuodossa (*polarform*), $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi =: re^{i\varphi}$. Luku $r$, pisteen $z$ etäisyys origosta, on nimeltään luvun $z$ moduli (engl. complex absolute value, *cabs*; myös itseisarvo) ja $\varphi$ argumentti, $\varphi$ positiivisen $x$-akselin ja radiussäteen välinen kulma, (engl. complex argument, *carg*; myös vaihekulma; $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Esitä luvut $2 + 3i$ ja $\frac{1}{2+3i}$ napakoordinaattimuodossa.

53. Maxima tuntee useimmille funktioille arvot myös kompleksiselle muuttujan arvolle. Määrää karteesinen esitys kompleksiluvuille $\cos(4 + 5i)$ ja $\arccos i$. Määrää myös lukujen modulit.

54. Tehtävän 23 matriisia $C$ vastaavan lineaarikuvauksen *ydin* on joukko $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid Cv = 0\}$. Tällaista joukkoa Maximalla ei voi määrätä, mutta kantavektorit kyllä; apuna komento `nullspace`. Vastaavasti *kuvajoukolle* $\{Cv \in \mathbb{R}^3 \mid v \in \mathbb{R}^3\}$ löydetään kantavektorit komennolla `columnspace`.

Määrää $C$:n ytimelle ja kuvajoukolle kantavektorit.

55. Maximalle vektoreita on kolmea eri tyyppiä: listoja, rivimatriiseita (eli vaakavektoreita) ja sarakematriiseita (eli pystyvektoreita). Miten vektori voidaan muuttaa esitystavasta toiseen? Kokeile muuttaa vaikkapa vektoria $(-1, 7)$ muodosta toiseen.

Rivi- ja sarakematriisien välinen muutos on helppo: matriisin transponointi (*transpose*). Listana esitetyn vektorin muuttaminen rivimatriisiksi on helppoa: rivimatriisihan määritellään ilmaisemalla rivi listana. Sarakematriisin muuttaminen listaksi käy kahdella askeleella: ensin muutos rivimatriisiksi, sitten komento `first` (=`part(...,1)`) poimii k.o. matriisin ensimmäisen rivin.

56. Tehtävän 23 matriisia $C$ vastaavan lineaarikuvauksen ydin on siis homogeenisen yhtälöryhmän $Cv = 0$, $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, ratkaisujen joukko.

Tällainen olio ($Cv$ on sarakematriisi) ei kuitenkaan kelpaa Maximan `solve`-komennolle, vaan se pitää ensin muuttaa listaksi `cv` (ks. ed. teht.).

Ennen yhtälön ratkaisemista vektoriyhtälö $Cv = (0, 0)$ pitää muuttaa yhtälöryhmäksi; apuun käy komento `map("=", cv, [0,0])`. Ratkaise saatu yhtälöryhmä ja vertaa tulosta aiemmin löydettyyn kantavektorijoukkoon.

57. Määrää matriisia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vastaavan lineaarikuvauksen ytimelle kanta. Kyseisten kantavektoreiden joukon Maxima ”kehystää” komennolla `span`. Miten kantavektorit poimitaan tämän kehysen alta? Komennolla `part(e,j)` saadaan lausekeesta `e` poimituksi sen $j$. osa. Komennon `nullspace` tuloksesta saatava vektori on sarakematriisi, mutta komennolle `orthogonal_complement` sen pitää sellainen olla. Määrää $A$:n ytimen ortogonaalikomplementti.

Tehtävä 41 valottaa Maximan lausekkeiden puurakennetta lisää.

58. (Jatkoa.) Määrää vastaavalla tavalla $A$ kuvajoukolle (*columnspace*) ortogonaalikomplementti.

59. Matriisiin voi laittaa sisään reaalilukujen lisäksi kompleksilukuja. Tämä voi olla tuttua kvanttimekaniikasta. Määrittele matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriisia $A$ sanotaan symmetriseksi, jos sen transpoosi $A^T$ on matriisi itse. Onko $A$ symmetrinen?

Matriisia $A$ sanotaan hermiittiseksi, jos sen konjugaattitranspoosi (voidaan merkitä monin tavoin, esim. $A^*$ tai $A^\dagger$) on matriisi itse. Vähennä matriisista $A$ sen konjugaattitranspoosi (*conjugate* ja *transpose* jossain järjestyksessä) ja tutki saatko nollan. Onko $A$ hermiittinen?

60. (Jatkoa.) Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset. Sama pätee hermiittisille kompleksimatriiseille. Laske edellisen tehtävän matriisin $A$ ominaisarvot.

61. (Jatkoa.) Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisvektorit ovat kohtisuorassa. Laske kompleksimatriisimme ominaisvektorit (*eigenvectors*) ja niiden sisätulo (*innerproduct*). Mitä saat sisätuloksi? Mitä Maximan dokumentaatio kertoo sisätulon laskemisesta? Siihen liittyy jotain erikoista kun käytetään kompleksilukuja.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

62. Laske funktion $f(x) = \sin(x \log(2x))$ derivaatta.

63. Useammasta kuin yhdestä muuttujasta riippuvan funktion derivaattoja kutsutaan *osittaisderivaatoiksi* ja niitä merkitään "koukero-d":llä, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jne. Vastaavasti toisen kertaluvun osittaisderivaattoja merkitään $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (derivoidaan kaksi kertaa $x$:n suhteen), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (derivoidaan kerran $x$:n ja kerran $y$:n suhteen), jne. Maximan `diff` laskee juuri näitä osittaisderivaattoja.

Laske funktion $f(x, y) := \log(x^2 + y^2)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Laske myös $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ja osoita, että kyseinen lauseke on nolla.

64. Laske muuttujista $x$ ja $t$ riippuvan funktion[5] $f(x, t) := t^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}$ osittaisderivaatat ja totea, että $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Muista: Tietokoneella kaksi lauseketta on useimmiten helpointa todeta samoiksi tutkimalla lausekkeiden erotusta.

65. Tee seuraavat määritykset (kumpikin omana syötteenään; `V` = "vektori")[6]:

```
laplacian(f,V):=sum( diff(f, V[j], 2), j,1,length(V));
heat(f,t,V):=diff(f,t) - laplacian(f,V);
```

Tehtävän 63 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ voidaan laskea nyt helpommin: `laplacian(f,[x,y])`. Kokeile. Vastaavasti tehtävän 64 lasku käy komennolla `heat(f,t,[x])`.

Laske sievennettynä

(1) tehtävän 63 derivaatta, kun $f(x, y) := \arctan(y/x)$;
(2) tehtävää 63 vastaava derivaatta $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, kun

$$f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(3) tehtävää 64 vastaava derivaatta $\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$, kun

$$f(x, y, t) := t^{-1} e^{-(x^2+y^2)/(4t)}$$

[5]Tämän funktion avulla voi löytää lämpöyhtälön *kaikki* ratkaisut. Lisätietoja saa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden kurssilta tai kysymällä laitoksen väeltä.

[6]Nimi laplacian tulee siitä, että kyseistä differentiaalioperaattoria on tapana kutsua *Laplace-operaattoriksi* ja merkitä $\Delta$. Siis $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$. Vastaavasti $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f$ on *lämpöoperaattori* $\to$ heat.

66. **Differentiaaliyhtälö.** Maxima osaa ratkaista myös joitain differentiaaliyhtälöitä. Tavallinen differentiaaliyhtälö tunnetaan englanniksi lyhenteellä ODE (ordinary differential equation). Etsi sopiva Maxima-funktio ja ratkaise differentiaaliyhtälö $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = y$ eli $y' = y$.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän määrittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

67. Kaikilla (yksinkertaisillakaan) funktioilla ei ole alkeisfunktioiden avulla esitettävää integraalifunktiota. Kokeile vaikka miten käy integraalille $\int e^{-x^2} \cos x \mathrm{d}x$.

68. Laske funktiolle $f(x, y) := (x - y)/(x + y)^3$ molemmat integraalit
$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \quad \text{ja} \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$
Mitä huomaat[7]?

69. Määrää integraaleille $\int_0^\infty e^{-x} \sin x \mathrm{d}x$ ja $\int_0^{10} e^{-x} \sin x \mathrm{d}x$ tarkka arvo ja jälkimmäiselle myös likiarvo. Laske myös $\int_0^{10} e^{-x} \sin x \mathrm{d}x$ *Romberg*in menetelmällä.

70. Laske moniulotteinen integraali
$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 yze^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \Big(\int_{-1}^0 \Big(\int_{-1}^1 yze^x \mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z.$$
Huomaa tässä muuttujien järjestys "sisältä ulospäin" (t.s. muuttujaa $x$ vastaa väli $-1 \leq x \leq 1$, jne).

71. Kuten tehtävässä 67 nähtiin, ei kaikilla funktioilla ole alkeisfunktioiden avulla esitettävää integraalifunktiota. Maxima osaa kuitenkin laskea integraalille $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos x \mathrm{d}x$ tarkan arvon, kuten myös integraalille $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \cos x \mathrm{d}x$, kun $a > 0$. Laske nämä.

72. Laske funktion $f(x) = \sin(x)/(1 + x^2)$ integraalifunktion derivaatta Maximalla. Mikä tulokseksi pitäisi tulla? Mitä Maxima antaa integraalifunktion lausekkeeksi?

73. Valitse jokin integroituva funktio. Älä kuitenkaan valitse edellisen tehtävän funktiota. (Esimerkki: $f(x) = e^{-4x^2} \sin^2 x$.) Laske valitsemallasi funktiolla (tai lausekkeella) $f$ integraali $\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ sekä tuloksen raja-arvo kun $t \to \infty$. Miten tulos eroaa integraalista $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ja miksi?

74. Piirrä kuva funktiosta $f(x) = x \sin(x)$, sen derivaattafunktiosta sekä sen (jostain) integraalifunktiosta. Piirrä kaikki samaan kuvaan.

[7] Muistele tai selvitä, mitä Fubinin lause sanoo.

*Kursiivilla* merkityt sanat ovat vinkkejä Maximan Help -järjestelmään. Siihen pääsee käsiksi F1-napilla wxMaximassa. `Tasalevyisellä kirjasinlajilla` merkityt sanat ovat (Maximan omia tai käyttäjän märittelemiä) komentoja tai symboleita/muuttujia. Pääteviivattomalla kirjasinlajilla merkityt sanat ovat wxMaximan valikkojen ja/tai alavalikkojen nimiä. Muista strukturoida dokumenttisi väliotsikoin ja kommentein, sekä tallentaa se riittävän usein.

75. Tutkitaan funktiota $f(x) \coloneqq x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ Valitse jokin funktion $f$ nollakohta $x_0$ (komento `part` tms, älä leikkaa–liimaa). Piirrä samaan kuvaan funktion $f$ kuvaaja ja piste $(x_0, f(x_0)) = (x_0, 0)$ (tämä onnistuu graafisen objektin `points` avulla; komennon `points` syntaksikuvaus on syytä lukea tarkkaan, sillä komentoa `points` voi käyttää varsin monessa eri muodossa).

    Lataa (*load*) käyttöön grafiikkapaketti `draw` ja Newton-paketti `mnewton`, jos tarvittavia komentoja ei muuten näytä löytyvän.

76. (Jatkoa.) Määrää lauseke funktion $f$ kuvaajan pisteeseen $x_0$ piirretylle tangenttisuoralle. (Muista, että tangenttisuoran yhtälö on $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.)
    [Vihje: Kuten useimmiten, kannattaa edetä pienin askelin.]

77. (Jatkoa.) Piirrä samaan kuvaan
    (1) funktion $f$ kuvaaja;
    (2) piste $(x_0, f(x_0))$;
    (3) sen pisteeseen $x_0$ piirretty tangenttisuora.

    Korjaa kuvaa niin, että
    (1) piste $(x_0, f(x_0))$ on piirretty selkeästi erottuvana (*point_size*, *point_type*, *color*), ja
    (2) pisteeseen $x_0$ piirretty tangenttisuora, piste $(x_0, f(x_0))$ ja itse kuvaaja $y = f(x)$ on piirretty kukin omalla värillään.

78. (Jatkoa tehtävään 22.) Yhtälöiden likimääräisten ratkaisujen määräämiseen käytetään usein myös *Newtonin menetelmää*, joka löytyy Maximasta useilla nimillä ja erilaisina versioina. Suositeltavaa on opetella yksi komento ja sen käyttötapa; useamman muuttujan funktioita osaa käsitellä `mnewton`, joka soveltuu toki samalla myös yhden muuttujan funktioille. Mitä komentoa käyttääkin, se pitää ensin ladata käyttöön komennolla `load`. Yllä mainittu löytyy paketista `mnewton`.

    (Vain yhden muuttujan funktiolle soveltuva komento `newton` löytyy paketeista `newton1` tai `newton` – huomaa erilainen syntaksi!)

    Määrää yhtälölle $f'(x) = 0$ ratkaisu Newtonin menetelmällä (funktion $f$ lauseke on sama kuin tehtävässä 22).

79. Yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3 \\ y^2 = x^3 - 3x + 2 \end{cases}$$

ratkaisemista voi auttaa piirtämällä kuvan. Kumpainenkin yhtälöparin määräämistä käyristä voidaan piirtää `implicit`-tyyppisenä oliona. Tarkastele aluksi vaikka aluetta $-3 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$.

80. (Jatkoa.) Lataa käyttöön paketti `mnewton` (kuten teit tehtävässä 78) ja etsi sen avulla edellisen tehtävän yhtälöparille ainakin kaksi likimääräistä ratkaisua.

81. (Jatkoa.) Entä jos yhtälöparina on

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \qquad y^2 = x^3 - 3x + 1 \end{cases}$$

Käyrät näyttävän nyt leikkaavan vain kahdessa pisteessä (piirrä kuva), mutta yhtälöparilla pitäisi olla kuusi ratkaisua kuten edellisessä tehtävässä. Miten löydät kompleksisia ratkaisuja Newtonin menetelmällä?

82. Piirrä draw-kirjaston komentojen (*implicit*) avulla yhtälöparin

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x + 1 \\ x^2 = y^3 - 3y + 1 \end{cases}$$

määräämät käyrät samaan kuvaan. (Sopiva $xy$-tason alue on $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$; kuvan avulla on tarkoitus etsiä käyrien leikkauspisteet.)

Kuten plot-komentojen kohdalla wxMaximassa draw-piirtokomennoista voi käyttää myös wx-alkuisia versioita, jotka tuottavat kuvan dokumentti-ikkunaan (käsikirja dokumentoi vain ilman wx-alkua olevat komennot).

83. (Jatkoa.) Määrää edelliselle yhtälöparille jokin ratkaisu (eli yksi käyrien leikkauspisteistä) paketin `mnewton` komennolla *mnewton*. Valitse alkuarvaus *GuessList* edellisen tehtävän kuvan avulla. Tarvittaessa piirrä sopiva ”osasuurennos”.

84. (Jatkoa.) Lisää tehtävässä 82 piirtämääsi kuvaan edellisessä tehtävässä löytämäsi käyrien leikkauspiste. Poimi aluksi komennon `mnewton` antamasta tuloksesta pisteen $x$- ja $y$-koordinaatit (*subst*, *ev*, *part*,...). Jotta piste erottuisi selkeästi, aseta pisteen kooksi (*point_size*) kaksi ja pisteen muodoksi (*point_type*) `filled_circle`. Aseta kummallekin käyrälle ja leikkauspisteelle kullekin oma väri. Lisää kuvaan myös Newtonin menetelmälle antamasi alkuarvo. (Hakusana *color* tuo väärän kohdan käsikirjasta; kannattaa selata sisällön (Contents) mukaan, hakea *draw*, sen alta kohta *Graphics options* ja edelleen *color*.)

85. (Jatkoa.) Tee edellisen kahden tehtävän toiminnot käyttäen Newtonin menetelmälle alkuarvoja $(-1.9, -1.1)$, $(-2, -1.3)$, $(-2.2, -1.5)$ ja $(-2.3, -1.5)$, t.s. piirrä käyrät, alkuarvopisteet ja Newtonin menetelmän antamat pisteet samaan kuvaan.

86. Yhtälön

$$2x^4 + y^4 - 3x^2y - 2y^3 + y^2 = 0$$

määräämä tasa-arvokäyrä (*implicit*) on hankala piirrettävä (tai paremminkin: kuva näyttää vialliselta; kokeile). Sijoita (*subst*) yhtälön vasemman puolen lausekkeeseen napakoordinaatit $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, ja sievennä lauseketta. Ratkaise saadusta yhtälöstä $\ldots = 0$ muuttuja $r$. Valitse sopiva $r$ ja piirrä `polar`-tyyppinen käyrä. Parempi?

87. Tehtävästä 77 mielenkiintoisempi versio olisi: etsi funktion $f$ derivaatan nollakohdat ja piirrä samaan kuvaan funktion kuvaaja ja löydetyt derivaatan nollakohdat (ääriarvokandidaatit).

88. **Hupia.** Piirrää `wxdraw2d`-komentoa käyttäen tikku-ukko, kukka tai jokin muu haluamasi kuva. Käytä sekä pisteitä, eksplisiittisiä funktioita että implisiittisiä funktioita. Käytä myös useampaa väriä.