

- Käy läpi s. 219 radiaalisen Schrödingerin yhtälön (rSY) lyhyt johto keskeiskentän tapauksessa eli lähtien suhteellisen liikkeen Schrödingerin yhtälöstä (s. 217) johda rSY separoimalla muuttujat r , θ ja ϕ . [Käytä hyväksi tietoa ∇^2 :n ja $\hat{L}^2$:n yhteydestä sekä siitä, että $\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$.] Johda saamastasi rSYstä edelleen 1-ulotteisen tapauksen kanssa analoginen rSYn muoto s. 223.
 - Äärettömän syvän potentiaalilaatikon tapauksessa s. 221–2 saimme radiaalisiksi aaltofunktioiksi pallo-Besselit $R(r) = A j_l(kr)$, missä $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Tarkastellaan lähemmin tapausta $l = 1$. Näytä, että energian ominaisarvot saadaan tällöin transkendenttiyhtälön $\tan ka = ka$ ratkaisuihin. Hahmottele graafinen ratkaisu ja tarkista ratkaisujesi suuruusluokka s. 222 kuvasta. Näytä lopuksi, että suurilla n :n arvoilla vastaavat ominaisenergiat ovat $l = 1$ -tapauksessa $E_{n \gg 1} \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n + \frac{1}{2})^2$.
- Tarkastellaan *äärellisen* syvistä 3-ulotteista pallosymmetristä potentiaalikuoppaa

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{kun } r \leq a; \\ 0, & \text{kun } r \geq a. \end{cases}$$

Näytä, että sidottujen tilojen energian ominaisarvot saadaan tapauksessa $l = 0$ transkendenttiyhtälöstä

$$-\cot \kappa a = \sqrt{\frac{2mV_0 a^2 / \hbar^2}{(\kappa a)^2}} - 1.$$

Hahmottele graafinen ratkaisu ja osoita että systeemillä ei ole sidottuja tiloja, jos $V_0 a^2 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m}$.

[Ohjeita: Kannattaa käyttää s. 223 rSYn muotoa, tällöin ratkaisuksi $u(r)$ saat eksponentiaalisesti vaimenevan ratkaisun alueessa $r > a$ ja sinimuotoisen ratkaisun alueessa $r < a$ (eikä tarvitse miettiä pallo-Besseleitä ja -Neumanneja). Vaatimalla aaltofunktion sekä sen derivaatan jatkuvuudet saat tarvittavat yhtälöt, joista voit johtaa yo. transkendenttiyhtälön aivan kuten 1-ulotteisessa tapauksessa.]

Käännä!

Seuraavissa tehtävissä on tarkoitus harjoitella CG-kertoimien käyttöä. Etsi tarvittavat CG-kertoimet luennoilla esitetystä taulukosta.

3. Tarkastellaan kahden pyörimismäärän kytkemistä kokonaispyörimismääräksi, siis $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$ ja kvanttiluvut kuten luennoilla. Muodosta kaikki suurinta kokonaispyörimismäärän kvanttiluvun j arvoa vastaavat kytketyn kannan tilat $|j_1, j_2, j, m\rangle_c$ kytkemättömän kannan tilojen $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle_u$ avulla, kun on kiinnitetty $j_1 = 1$ ja $j_2 = \frac{1}{2}$.
4. Tarkastellaan elektronin (= spin- $\frac{1}{2}$ -hiukkanen) rata- ja spinpyörimismäärän kytkentää kokonaispyörimismääräksi $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$. Olkoon elektroni kytkemättömän kannan tilassa $|l = 1, s = \frac{1}{2}, m_l = 0, m_s = \frac{1}{2}\rangle_u$.

Mitataan kokonaispyörimismäärän z -komponentti $\hat{J}_z$ ja kokonaispyörimismäärän suuruus $\hat{J}^2$ tästä tilasta samanaikaisesti. Mitkä kombinaatiot kvanttiluvuista m ja j voidaan saada ja millä todennäköisyyksillä?

5. (a) Johda s. 246 alimman laatikon tulos CG-kertoimille (käytä annettua neuvoa).
 (b) Harjoitellaan vielä CG-taulukon (s. 243) käyttöä. Olkoon $j_1 = 2$ ja $j_2 = \frac{3}{2}$. [Tässä siis on kyse esim. spin- $\frac{3}{2}$ -hidun ratapyörimismäärän (nyt $j_1 = l = 2$) ja spinin ($j_2 = s = \frac{3}{2}$) kytkennästä kokonaispyörimismääräksi.]
 (i) Lausu kytketyn kannan tila $|j_1 = 2, j_2 = \frac{3}{2}, j = \frac{5}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle_c$ kytkemättömän kannan tilojen avulla.
 (ii) Lausu kytkemättömän kannan tila $|j_1 = 2, j_2 = \frac{3}{2}, m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle_u$ kytketyn kannan tilojen avulla
6. (2 lisäpistettä) [Tämä on fysikaalisesti tärkeä tehtävä, mutta matemaattisen työläyden takia se on jätetty vapaaehtoiseksi.] Tarkastellaan vetyatomin sidottuja tiloja kuten luennoilla.
 (a) Muuta s. 226 yläreunan rSY dimensiottomaan muotoon (ks. laatikot s. 226 keskellä) ja edelleen yritteellä $u(r) = \rho^{l+1} e^{-\rho} w(\rho)$ johda s. 226 differentiaaliyhtälö funktiolle $w(\rho)$.
 (b) Sijoita sarjaratkaisu $w(\rho) = \sum_k a_k \rho^k$ tähän differentiaaliyhtälöön, johda s. 227 palautuskaava kertoimille a_k ja katso, että ymmärrät, miksi sarjan tulee katketa eli mistä energian ominaisarvot eli Bohrin kaava s. 228 seuraavat.
7. (0,5 lisäpistettä) Onko jokin asia jäänyt epäselväksi kurssilla tähän mennessä? Kysy jostain kurssin sisältöön tai aiheeseen liittyvää, niin asiaa selvitetään tarkemmin luennoilla, laskuharjoituksissa tai kurssin kotisivulla.