

1. (2 p) Johda WKB-approksimaatiossa s. 149 laatikoitu tulos α -hiukkasen läpäisykertoimelle (tunnetuistodennäköisyydelle) ytimen (1-ulotteisen) Coulombin potentiaalivallin $V_C(r)$ läpi (ks $V_C(r)$ s. 149). Laske ensin integraali

$$\int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V_C(r) - E_\alpha]}$$

eksaktisti. Tämä onnistuu standardeilla muuttujanvaihdolla. Tämän jälkeen tarkastele rajaa $b \gg R$ ja näytä, että

$$T \approx \exp\left[-4 \frac{Z_1}{\sqrt{E_\alpha/\text{MeV}}}\right].$$

Tarvinnet tässä sarjakehitelmiä $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + \mathcal{O}(x^3)$ ja $\sqrt{1-x} = 1 + \mathcal{O}(x)$. Muita vihjeitä: α -hiukkaselle (= 2 protonia + 2 neutronia) on $mc^2 \approx 940$ MeV ja varausluku $Z_\alpha = 2$. Hienorakennevakio $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$. (Huomaa, että et tarvitse numeerisia arvoja luonnonvakioille c , ϵ_0 ja e , nämä uppoavat mukavasti hienorakennevakion ja massaenergian mc^2 arvoihin).

2. (4 p) Luennoissa jätimme muutamia HV:n operaattoritarkastelun välituloksia harjoitustehtäviksi. Käyttäen s. 152 määritelmiä operaattoreille $\hat{a}$ ja $\hat{a}^\dagger$, osoita, että

a) $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

b) $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$, missä $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$

c) $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$

d) $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$

e) $\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$, missä $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

f) $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

g) $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$

(Vihje kahteen viimeiseen kohtaan: hyödynnä tulosta $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$.)

3. (2 p) Lähtemällä saadusta perustilan aaltofunktiosta (s. 159) $\psi_0(x) = \langle x|n=0\rangle$ ja käyttäen nosto-operaattoria $\hat{a}^\dagger$ perustilaan $|0\rangle$ johda 1. viritystilan aaltofunktio $\langle x|1\rangle = \psi_1(x)$ (siis s. 159–160 ideat, mutta Hermiten polynomien määrittelyä käyttämättä).
4. (2 p) Käyttäen nosto- ja laskuoperaattoreita $\hat{a}^\dagger$ ja $\hat{a}$, sekä Diracin merkintää, johda s. 161 tulokset harmonisen värähtelijän n :nnestä energian ominaistilasta lasketuille hajonnoille $(\Delta x)_n$ ja $(\Delta p)_n$.
5. (1 lisäpiste) Onko jokin asia jäänyt epäselväksi kurssilla tähän mennessä? Kysy jotain kurssin sisältöön tai aiheeseen liittyvää, niin asiaa selvitetään tarkemmin luennoilla, laskuharjoituksissa tai kurssin kotisivulla.