

1. (4p) Käydään läpi luennolla s. 49–55 esitetyn kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän ratkaisun yksityiskohtia.
 - (a) Näytä, käyttämällä s. 49 annettuja dimensiottomia muuttujia y ja ϵ , että ajasta riippumattomasta Schrödingerin yhtälöstä (i) seuraa s. 50 differentiaaliyhtälö (ii).
 - (b) Sijoittamalla muoto (v) yhtälöön (ii) näytä, että saat yhtälön (vi).
 - (c) Ratkaise yhtälö (vi) sarjamenetelmällä, johda s. 52 rekursiorelaatio (viii), totea ratkaisujen normittuvuus, kun energian arvot ovat diskreetit, ja totea myös saatavat energian arvot (ix).
 - (d) Sijoita (ix) takaisin yhtälöön (vi) ja näytä, että saat Hermiten polynomien differentiaaliyhtälön (x).

2. (2p) Olkoon kvanttimekaaninen hitu harmonisen värähtelijän potentiaalissa, ja alkutilan aaltofunktio

$$\Psi(t=0, x) = A(3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)),$$

missä $\psi_0(x)$ ja $\psi_1(x)$ ovat harmonisen värähtelijän energian ominaistiloja kuvaavat aaltofunktiot.

- (a) Laske normitusvakio A kun tiedetään, että energian eri ominaisarvoihin liittyvät aaltofunktiot ovat ortonormitetut.
 - (b) Mikä on systeemin aaltofunktio $\Psi(t, x)$ hetkellä t ?
 - (c) Mitä energian arvoja voit saada, ja millä todennäköisyydellä, jos energian mittaus tehdään (1. kerran)
 - hetkellä $t = 0$?
 - hetkellä t ?
3. (2p) Olkoon kvanttimekaaninen hitu harmonisen värähtelijän potentiaalissa ja olkoon systeemi perustilassaan. Laske, millä todennäköisyydellä hitu voi löytyä klassisesti kielletystä alueesta $|x| > \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}$. Huomaa, että saatavaa integraalia ei voi laskea analyyttisesti, katso sen arvo taulukoista tai laske numeerisesti.
4. (2p) Olkoon kvanttimekaaninen hiukkanen harmonisen värähtelijän potentiaalissa ja systeemi perustilassaan, jota kuvaa aaltofunktio $\psi_0(x)$. Leikitään ajatuksella, että potentiaalilin muoto muuttuu yhtäkkiä siten, että systeemin ominaistajuus ω muuttuu yhtäkkiä 2ω :ksi, systeemin aaltofunktion pysyessä edelleen samana. Mitataan energia samantien (ei käsitellä aikakehitystä siis). Millä todennäköisyydellä uudesta systeemistä saadaan arvo $\hbar\omega/2$ (eli aiemman systeemin energia), ja millä todennäköisyydellä saadaan arvo $\hbar\omega$?
5. Onko jokin asia jäänyt epäselväksi kurssilla tähän mennessä? Kysy jotain kurssin sisältöön tai aiheeseen liittyvää, niin asiaa selvitetään tarkemmin luennoilla, laskuharjoituksissa tai kurssin kotisivulla. Tämä bonustehtävä on yhden pisteen arvoinen (tavalliset kahden), eikä sitä lueta mukaan harjoitusten maksimipisteisiin.