

1. (a) Osoita, että kompleksiluvuille ψ ja ϕ pätee

$$|\psi + \phi|^2 = |\psi|^2 + |\phi|^2 + 2\Re(\psi\phi^*) = |\psi|^2 + |\phi|^2 + 2|\psi\phi|\cos(\alpha_\psi - \alpha_\phi),$$

jossa α_ψ ja α_ϕ ovat ψ :n ja ϕ :n argumentit (vaihekulmat).

- (b) Lähtien Eulerin kaavasta $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, näytä, että

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad \sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}).$$

- (c) Laske $|z|$ ja sen vaihekulma $\arg(z)$, kun $z = (1 + i)\exp\left(\frac{-i\pi}{2}\right)$.

2. Lähtien s. 7 adjungoidun operaattorin $\hat{A}^\dagger$ määritelmästä, osoita, että

(a) $\langle \hat{A}^\dagger \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{A} \phi \rangle$

(b) $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$

(c) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

3. Osoita, että hermiittisen operaattorin $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ominaisarvot ovat aina reaalisia.

4. Näytä, että aaltofunktion $\psi = \sum_n c_n \psi_n$, missä kukin ψ_n on hermiittisen operaattorin $\hat{A}$ ominaisarvoon a_n liittyvä ominaisfunktio, normituksesta $\int d^3x \psi^* \psi = 1$ seuraa, että $\sum_n |c_n|^2 = 1$.

5. Osoita, että adjungoidun operaattorin määritelmästä 1-ulotteisessa tapauksessa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^* \hat{A}^\dagger \phi \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\hat{A} \psi)^* \phi,$$

missä $\psi \equiv \psi(x)$ ja $\phi \equiv \phi(x)$ ovat normitettuja aaltofunktioita, seuraa, että

(a) $\left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger = -\frac{d}{dx}$

(b) $\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^\dagger = \frac{d^2}{dx^2}$

6. Onko jokin asia jäänyt epäselväksi kurssilla tähän mennessä? Kysy jotain kurssin sisältöön tai aiheeseen liittyvää, niin asiaa selvitetään tarkemmin luennoilla, laskuharjoituksissa tai kurssin kotisivulla. Tämä bonustehtävä on yhden pisteen arvoinen (tavalliset kahden), eikä sitä lueta mukaan harjoitusten maksimipisteisiin.