Ramseyn lause

Elina Joutsen

Matematiikan LuK-aine

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015

1. Johdanto

Ramseyn teoria on osa kombinatoriikkaa, jossa matemaattisista rakenteista etsitään järjestyneitä eli homogeenisia osia. Ramseyn teorian kehittäjä on alunperin Frank P. Ramsey ($1903 - 1930$), joka vuonna 1929 osoitti artikkelissaan [**2**], että Ramseyn luvut ovat olemassa. Samantapaisia aiheita on kuitenkin tutkittu aiemminkin. Ramseyn julkaisun jälkeen useat matemaatikot ovat olleet kiinnostuneita Ramseyn teoriasta ja erityisesti Ramseyn luvuista. Ramseyn teorialle on useita eri matemaattisia haaroja, joista tässä työssä käsitellään verkkoteorian avulla määriteltyä Ramseyn lausetta sekä Ramseyn lukuja. Ramsey todisti ensin alla olevan äärettömän Ramseyn lauseen ja tämän jälkeen hän osoitti äärellisen version, johon tässä kandidaatintutkielmassa paneudutaan. Alla on lauseen väite alkuperäisessä muodossa.

> Theorem A. Let Γ be an infinite class, and μ, and r positive integers; and let all those sub-classes of Γ which have exactly r members, or, as we may say, let all r-combinations of the members of Γ be divided in any manner into μ mutually exclusive classes C_i $(i = 1, 2, ..., \mu)$, so that every r-combination is a member of one and only one C_i; then, assuming the axiom of selection, Γ must contain an infinite sub-class Δ such that all the r-combinations of the members of Δ belong to the same C_i.[**6**]

Lauseen tekivät hiukan myöhemmin tunnetuksi matemaatikot Paul Erdős ja George Szekeres vuonna 1935. [**3**] He sovelsivat Ramseyn tulosta kombinatoriseen ongelmaan. Ramsey itse oli soveltanut lausettaan omaan tutkimusalaansa, logiikkaan. Ramseyn teorialla on edelleen paljon sovelluskohteita logiikan tutkimuksessa. Graham, Rothschild ja Spencer esittelevät kirjassaan [**4**] mielenkiintoisia kehitystuloksia Ramseyn teoriasta. Vuosien mittaan aihetta on laajennettu ja erityisesti Ramseyn lukujen tutkimuksen ja tietotekniikan avulla luvuille on pystytty määrittämään yhä tarkempia arvoja 2000-luvulla. Tutkijat ovat kuitenkin pettyneitä siihen, että edes kaikille pienille Ramseyn luvuille ei olla pystytty määrittämään tarkkoja arvoja.

Ramseyn lukujen rooli on merkittävä kun pyritään selittämään joitakin olemassa olevia yleisiä Ramseyn teorian olettamuksia. Tutkimuksen kohteena teoria on erittäin houkutteleva sinänsä, koska sen perusajatukset voidaan ymmärtää helposti värikkäiden kuvien avulla. Väitetäänkin, että Erdős kiinnostui teoriasta sen yksinkertaisuuden takia, koska Erdősiä ei pidetty aikansa etevimpänä matemaatikkona. Toisaalta, aihealue vaatii myös aktiivista perehtymistä ja tutkimusta, sillä sen monihaaraisuus herättää ilmiömäisen vaikeita kysymyksiä, joihin ei edelleenkään tiedetä vastauksia. Ramseyn lauseiden johtopäätös on usein esitetty muodossa *täydellinen epäjärjestys on mahdotonta.* Näin voidaankin ajatella, sillä Ramseyn teorian pohjalta etsitään mahdollisimman säännöllisiä ja homogeenisiä rakenteita mielivaltaisten rakenteiden sisältä.

Tässä kandidaatintutkielmassa todistamme äärellisen Ramseyn lauseen verkoille sekä tutustumme Ramseyn lukuihin. Lopuksi annamme esimerkkejä Ramseyn luvuista sekä ratkaisemme kuuluisan esimerkkiongelman näihin liittyen.

2. Esitietoja

Tässä osiossa on lauseita ja määritelmiä, joita tarvitaan Ramseyn lauseen todistamisessa.

2.1. Verkot. Ennen Ramseyn teoriaan perehtymistä annamme muutamia tämän kandidaatintutkielman kannalta keskeisiä verkkoteorian määritelmiä.

Määritelmä 1. Verkko on pari (V, E), missä V on epätyhjä joukko ja $E \subset V \times V$ symmetrinen ja antirefleksiivinen relaatio. Joukon V alkioita kutsutaan kärjiksi ja joukon E alkioita sivuiksi.

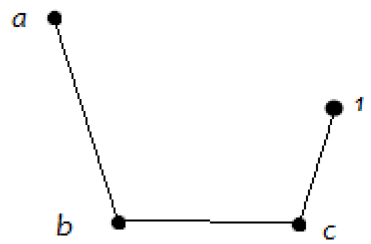
Esimerkki 2. Olkoon kuvassa 1 verkko (V, E). Nyt joukko

$$V = \{a, b, c, 1\}$$

kärkien joukko ja joukko

$$E = \{(a, b), (b, c), (c, 1), (1, c), (c, b), (b, a)\}$$

kärkien välisten sivujen joukko.



Kuva 1. Esimerkin 2 verkko.

Päästäksemme verkkoteoriasta Ramseyn teoriaan tarvisemme muutamia sopivia käsitteitä.

Määritelmä 3. Joukko $K \subset V$ on verkon (V,E) *klikki* eli *täydellinen aliverkko*, jos kaikilla eri $x, y \subset K$ pätee $(x, y) \in E$. Joukko $I \subset V$ on verkon (V, E) *riippumaton joukko*, jos jokaisella $x, y \in I$ pätee $(x, y) \notin E$.

Huomautus 4. Verkko voi sisältää sekä klikin että riippumattoman joukon, kuten kuvassa 2. Lisäksi, jokainen yhden alkion joukko on sekä klikki että riippumattoman joukko. Erityisesti siis yhden kärjen verkko sisältää sekä klikin että riippumattoman joukon.

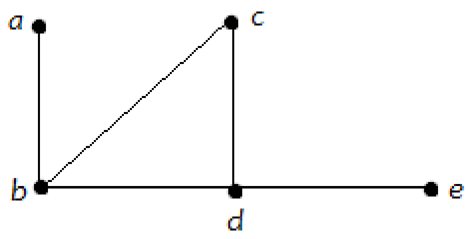
Seuraavan esimerkin avulla ymmärrämme, mitä klikki ja riippumaton joukko tarkoittavat ja miltä ne näyttävät verkkona.

Esimerkki 5. Kuvassa 2 verkko (V, E) sisältää sekä kolmen kärjen klikin

$$K = \{b, c, d\},$$

että kolmen kärjen riippumattoman joukon

$$I = \{a, c, e\}.$$



KUVA 2. Esimerkin 5 verkko.

Lisätietoa verkkoteoriasta voi lukea John Clarkin ja Derek Allan Holtonin kirjasta *A first look at graph theory.*[**1**]

2.2. Verkkoteorian sovelluksia. Verkkoteorialla on valtavasti erilaisia sovelluskohteita, joista tässä mainitsen muutamia.

Verkkoteoria lähti liikkeelle vuonna 1736 kun Euleria pyydettiin selvittämään paras polku Köningsbergin siltojen yli. Tästä muodostui ensimmäinen verkkoeorian ongelma. [**11**] Nykyään verkkoteoria on laajalti käytössä muunmuassa tietokoneiden sovelluksissa. Esimerkiksi, kun internetistä tai peleistä pyritään löytämään yhtenäisiä osia, tarvitaan verkkoteoriaa, jotta tiedot voidaan lajitella halutulla tavalla. Toisin sanoen valtavan laajoista verkoista pyritään löytämään yhtenäisiä osia. Käytännön esimerkkinä on hakukoneiden tulosten listaus tai vaikkapa GPS-laitteen pyrkimys etsiä lyhyintä reittiä kotiin. Lisäksi verkkoteoriaa käytetään muun muassa kemiassa molekyylien mallintamiseen, materiaalifysiikassa sekä sosiologiassa.

Ramseyn teoriaa sovelletaan erityisesti viestinnässä ja tietotekniikassa etenkin tiedonhaussa, sillä nykypäivän tietotekniikassa käytettävät algoritmit perustuvat verkkoteoriaan ja erityisesti myös Ramseyn teoriaan. Ramsey itse oli kiinnostunut logiikasta ja sovelsi teoriaansa muunmuassa päätöksentekoon liittyviin ongelmiin. Ramsey pyrki muodostamaan käsitystä ihmisten päätöksenteosta, tekemällä niistä erilaisia karttoja, joilla päätkösentekoa voisi ennustaa.

Lisätietoa verkkoteorian sovelluskohteista voit etsiä Shariefuddin Pirzadan ja Ashay Dhardwadkerin kirjasta *Applictions of Graph Theory*[**9**] sekä erityisesti Ramseyn teorian sovelluskohteista Vera Rostan kirjasta *Ramsey Theory Applications* [**10**].

2.3. Binomikertoimet. Annetaan seuraavaksi muutamia tuloksia binomikertoimille. Tulokset ovat oleellisia Lauseen 17 todistuksessa.

LEMMA 6.
$$\binom{a}{0} = 1, \ \textit{missä } a \geq 1.$$

LEMMA 7.
$$\binom{a}{1} = a, \ \textit{missä } a \geq 1.$$

LEMMA 8.
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \ \textit{missä } k, n \geq 1.$$

Nämä lemmat on helppo todistaa binomikertoimen määritelmää käyttäen.

3. Ramseyn luvut

Tässä osiossa määritellään Ramseyn luvut sekä todistetaan niiden olemassaolo äärellisessä tapauksessa. Lisäksi todistamme aiemmin mainitun esimerkkiongelman.

3.1. Ramseyn luvut. Aloitamme käsittelemällä Ramseyn lukuihin liittyviä määritelmiä ja lauseita, joiden avulla on mahdollista todistaa Ramseyn lause äärellisessä tapauksessa.

MÄÄRITELMÄ 9. Olkoon $k, l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Olkoon $r\,(k, l)$ pienin sellainen luku q, jolle pätee että jokaisessa q kärjen verkossa on k kärjen klikki tai l kärjen riippumaton joukko. Lukuja $r\,(k, l)$ sanotaan *Ramseyn luvuiksi.*

Huomataan, että Ramseyn luvuille ovat yhtäpitäviä seuraavat väitteet, kun $k, l, n \in \mathbb{N}$.

(1) $r(k, l) \leq n$.
(2) Jokaisessa n kärjen verkossa on k kärjen klikki tai l kärjen riippumaton joukko.

Myös seuraavat ovat yhtäpitäviä.

(1) $r(k, l) > n$.
(2) On olemassa n kärjen verkko, jolle ei ole k kärjen klikkiä eikä l kärjen riippumatonta joukkoa.

Annetaan seuraavaksi esimerkki pienistä Ramseyn luvuista.

ESIMERKKI 10. Näiden esimerkkien todistaminen onnistuu helposti lemmojen 11 ja 13 avulla.

$$r(1, 1) = r(1, 2) = 1 \text{ ja}$$
$$r(2, 2) = 2.$$

Seuraavaksi todistamme, että *Ramseyn luvut* ovat olemassa ja äärellisiä. Todistus seuraa Clarkin ja Holtonin teosta *A first look at graph theory* [**1**].

LEMMA 11. *$r\,(k, 1) = r\,(1, k) = 1$, kaikilla $k \in \mathbb{N}$.*

TODISTUS. Olkoon verkko (V, E) yhden kärjen muodostama verkko. Nyt siis välttämättä tämä yksi kärki muodostaa sekä verkon V klikin että riippumattoman joukon ja $r = 1$. Tällöin jokaisesta verkosta löytyy aina yhden kärjen klikki tai riippumaton joukko. □

ESIMERKKI 12. On helppo osoittaa, kuten kuvasta 3 näemme, että $r(4, 2) = 4$. Tällä $r(4, 2)$ tarkoitamme, että jos verkossa on vähintään 4 kärkeä sillä on ainakin toinen seuraavista:

(1) neljän kärjen täydellinen aliverkko
(2) kahden kärjen riipppumaton joukko

Huomaamme, että piirtämällä kolmen kärjen verkon on siihen mahdotonta piirtää neljän kärjen klikkiä ja siinä ei välttämättä ole kahden kärjen riippumatonta joukkoa. Joten $r(4, 2) > 3$, seuraavaksi lemmassa 13 osoitamme että se itseasiassa on tasan neljä.

KUVA 3. Esimerkin 12 verkot.

LEMMA 13. *$r(k,2) = r(2,k) = k$, kaikilla $k \in \mathbb{N}$.*

TODISTUS. Todistetaan vain $r(k,2) = k$, sillä toinen todistus on oleellisesti samanlainen.

$r(k,2)$ on pienin sellainen luku, että jokaisessa verkossa (V,E), jolle $|V| = r(k,2)$, on k kärjen klikki tai kahden kärjen riippumaton joukko. Osoitetaan, että $r(k,2) = k$.

(1) Jos verkossa on vähintään k kärkeä, jossa jokaisen kärjen välillä joko on tai ei ole sivua. Verkosta löytyy aina k kärjen klikki tai kahden kärjen riippumaton joukko. Tällöin pätee, että $r(k,2) \leq k$

(2) On olemassa $k-1$ kärjen verkko, jossa kaikki kärjet on yhdistetty toisiinsa sivuilla. Tällaista verkkoa kutsutaan täydelliseksi verkoksi. Tällä verkolla ei ole k kärjen klikkiä tai kahden kärjen riippumatonta joukkoa, joten pätee $r(k,2) > k-1$.

Tällöin $r(k,2) = k$. □

LEMMA 14. *Symmetria: $r(k,l) = r(l,k)$ kaikilla $k,l \geq 2$.*

TODISTUS. Jokaiselle verkolle (V,E) voidaan määritellä uusi verkko (V',E'), jolla on sama kärkien joukko kuin verkolla (V,E). Nyt kuitenkin verkon (V,E) kärjet ovat vierekkäin jos ja vain jos ne eivät ole vierekkäin verkossa (V',E'). Huomaa, että verkon (V,E) kärjet muodostavat klikin jos ja vain jos ne muodostavat riippumattoman joukon verkossa (V',E'). Näin ollen symmetriaominaisuus pätee. □

LAUSE 15. *$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1)$, kaikilla $k,l \geq 2$.*

TODISTUS. Olkoon verkko (V,E), missä $n = r(k-1,l) + r(k,l-1)$ on verkon (V,E) kärkipisteiden lukumäärä. Osoitetaan, että tällöin vekossa (V,E) on olemassa jompi kumpi seuraavista k-kärjen klikki tai l-kärjen riippumaton joukko. Kiinnitetään $u \in V$. Määritellään lisäksi

$$V_+(u) = \{v \in V : (u,v) \in E\} \text{ ja } V_-(u) = \{v \in V : v \neq u, (u,v) \notin E\}.$$

Huomioi, että $\{u\}$, $V_+(u)$ ja $V_-(u)$ ovat erillisiä ja niiden yhdiste on V.

Näin ollen

$$|V_+(u)| + |V_-(u)| = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1$$

Tämä tarkoittaa, että on

$$|V_+(u)| \geq r(k-1,l) \text{ tai } |V_-(u)| \geq r(k,l-1).$$

Saadaan siis kaksi tapausta:

(1) $|V_+(u)| \geq r(k-1,l)$ ja tällöin verkko $V_+(u)$ sisältää $(k-1)$ kärjen klikin tai l kärjen riippumattoman joukon. Jälkimmäisessä tapauksessa verkossa V on selvästi l kärjen riippumaton joukko. Muuten on olemassa $K \subseteq V_+(u)$ missä K on $(k-1)$-klikki. Joukko $\{u\} \cup K$ muodostaa siis k kärjen klikin.
(2) Nyt $|V_-(u)| \geq r(k, l-1)$ ja on siis k kärjen klikki verkossa $V_-(u)$ jolloin lause pätee tai sitten on riippumaton joukko $I \subseteq V_-(u)$, missä $|I| = l-1$. Ensimmäisessä tapauksessa verkossa V on selvästi k kärjen klikki. Jälkimmäisessä tapauksessa $\{u\} \cup I$ muodostaa nyt l kärjen riippumattoman joukon.

□

Suraavaksi osoitamme lauseen 15 hiukan yleisemmässä muodossa.

Lause 16. [**12**, Lause 3] *Jos* $r(k-1,l) = 2p$ *ja* $r(k,l-1) = 2q$ *niin*

$$r(k,l) < 2p + 2q = r(k-1,l) + r(k,l-1).$$

Todistus. Olkoon kärkien lukumäärä verkossa $2p + 2q - 1$ ja kiinnitetään kärki a. Nyt kärjellä a voi olla $2p - 2q - 2$ sivua.

Tällöin saamme kolme mahdollista tapausta kärjelle a:

(1) vähintään $2p$ kärkeä on yhtydessä kärkeen a sivulla
(2) vähintään $2q$ kärkeä ei ole yhteydessä kärkeen a, tai
(3) $2p-1$ kärkeä on yhteydessä kärkeen a sivulla ja $2q-1$ kärkeä ei ole yhteydessä käkeen a

Käsitellään ensin tapaus 1: Olkoon joukko T_1 niiden kärkien joukko, jotka on yhteydessä kärjen a kanssa. Koska kärkien lukumäärä joukossa T_1 on suurempi tai yhtä suuri kuin $r(k-1,l)$, niin pätee, että on olemassa $k-1$ kärjen klikki tai l kärjen riippumaton joukko. Ensimmäisessä tapauksessa joukko $T_1 \cup \{a\}$ sisältää k kärjen klikin. Jolloin väite on tosi tapauksessa 1. Samoin perustein pätee tapaus 2.

Tapaus 3 ei voi koskea jokaista joukon kärkeä. Jos jokaisesta kärjestä lähtee $2p-1$ sivua ja kärkiä on $2p + 2q - 1$, on verkossa sivuja yhteensä $\frac{1}{2}(2p+2q-1)(2p-1)$. Tämä ei kuitenkaan ole kokonaisluku. Näin ollen täytyy päteä, että vähintään yksi kärki noudattaa tapausta 1 tai 2 ja väite pätee molemmissa tapauksissa. □

Lause 17. $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$, *missä* $k, l \in \mathbb{N}$.

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun $k + l$ suhteen. Todistuksessa käytetään hyväksi binomikertoimille annettuja oletuksia.

Jos $k = 1$ tai $l = 1$, niin väite seuraa lemmoista 6 ja 11.

Jos $k = 2$ tai $l = 2$, niin väite seuraa lemmoista 7 ja 13

Oletetaan, että $k, l \geq 2$. Nyt yhdistämällä lause 15 induktiiviseen hypoteesiin ja käyttämällä lemmaa 8 saamme

$$
\begin{aligned}
r(k,l) &\le r(k-1,l) + r(k,l-1) \\
&\le \binom{(k-1)+l-2}{(k-1)-1} + \binom{k+(k-1)-2}{k-1} \\
&= \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} \\
&= \binom{(k+l-3)+1}{k-1} \\
&= \binom{k+l-2}{k-1}.
\end{aligned}
$$

□

Olemme edellä todistaneet Ramseyn luvuille ylärajan. Seuraavaksi annamme lauseen, jonka tarkoituksena on antaa Ramseyn luvuille eräs alaraja. Alarajan todisti Erdős vuonna 1947. [**4**] Tässä kandidaatintutkielmassa emme kuitenkaan todista tätä lausetta.

Lause 18. [**5**, Lause 2.1] *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin Ramseyn luvuille saadaan alaraja:*

$$r(n,n) \geq \sqrt{2}^n$$

3.2. Ramseyn lause äärellisille verkoille. Tarkastellaan tässä Ramseyn lausetta äärellisille verkoille.

Lause 19. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa $r \in \mathbb{N}$ siten, että jos verkossa (V, E) on vähintään r kärkeä, niin siinä on n alkion klikki tai n alkion riippumaton joukko.*

Todistus. Väite seuraa lauseesta 15 valitsemalla luvuksi r Ramseyn luku $r(n, n)$. □

Mainittakoon myös, että on olemassa Ramseyn lause äärettömille verkoille. Annetaan tässä äärellisen Ramseyn teorian yleistys, jossa äärelliset homogeeniset joukot korvataan äärettömillä.

Lause 20. [**5**, Lause 1.8] *Äärettömässä verkossa $G = (V, E)$ on aina ääretön klikki tai ääretön riippumaton joukko.*

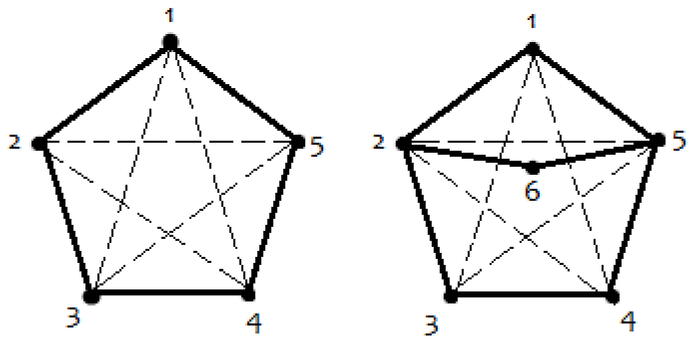
3.3. Esimerkkejä. Esittelemme muutamia esimerkkejä Ramseyn lauseen käytöstä.

Esimerkki 21. $r(3, 3) > 5$

Todistus. Viiden kärjen verkossa ei välttämättä ole kolmen kärjen klikkiä tai kolmen kärjen riippumatonta joukkoa. Kuten kuvan 4 vasemmanpuoleisesta verkosta voidaan havaita. Välttämättä siis pätee, että $r(3, 3) > 5$. □

Seuraavaksi käymme läpi esimerkin *Ramseyn teorian* ongelmasta, johon viittasimme tutkielman alussa. Tämän ongelman isä Paul Erdős on käyttänyt Lausetta 22 esimerkkinä osoittamaan matemaattisen todistuksen voimaa. Erityisesti, vaikkei

Erdős ole keksinyt *Ramseyn teoriaa* hänen voidaan ajatella kehittäneen sitä eniten. [**8**]



KUVA 4. Esimerkin 21 verkko, joista toisessa on viisi kärkeä ja toisessa kuusi. Kuuden kärjen verkko liittyy lauseeseen 22.

LAUSE 22. *Jokaisessa kuuden ihmisen joukossa on vähintään kolme ihmistä, jotka joko tuntevat kaikki toisensa tai eivät lainkaan tunne toisiaan.*

Todistetaan tämä kahdella tavalla.

LAUSEEN 22 ENSIMMÄINEN TODISTUS. Kiinnitetään ensimmäinen henkilö A.

Tapaus 1: A tuntee vähintään kolme ihmistä ja olkoot ne B, C ja D. Jos B, C ja D eivät tunne toisiaan, niin silloinhan $\{B, C, D\}$ on haluttu joukko. Sillä jos jotkin kaksi joukosta $\{B, C, D\}$ tuntevat toisensa, esimerkiksi B ja C tuntevat toisensa, niin saadaan joukko $\{A, B, C\}$ jossa on kolme ihmistä jotka tuntevat toisensa.

Tapaus 2: A tuntee korkeintaan kaksi ihmistä kuuden ihmisen joukosta. Olkoot E, F ja G ihmiset joita A ei tunne. Jos taas E, F ja G tuntevat toisensa, niin joukko $\{E, F, G\}$ on haluttu joukko. Sillä jos näin ei olisi niin esimerkiksi E ja F eivät tunne toisiaan ja näin muodostuisi joukko $\{A, E, F\}$, jossa on kolme toisilleen tuntematonta ihmistä. [**1**] □

LAUSEEN 22 TOINEN TODISTUS. Lauseen 17 nojalla saadaan, että

$$r(3,3) \leq \binom{3+3-2}{3-1} = \binom{4}{2} = 6.$$

Lisäksi esimerkin 21 nojalla on olemassa viiden kärjen verkko, jossa ei ole kolmen kärjen klikkiä eikä kolmen kärjen riippumatonta joukkoa. Joten $r(3,3) > 5$. Joten yhdistämällä nämä tulokset saadaan, että $r(3,3) = 6$. □

ESIMERKKI 23. $r(3,4) = 9$.

TODISTUS. Osoitamme ensin, että $r(3,4) < 10$.

Lauseiden 15 ja 16 nojalla saadaan, koska $r(k-1,l)$ ja $r(k,l-1)$ ovat parillisia niin

$$r(k,l) < 2p + 2q = r(k-1,l) + r(k,l-1).$$

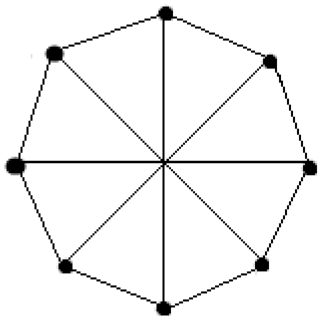
Lisäksi edellisessä esimerkissä osoitimme, että $r(3,3) = 6$ sekä esimerkissä 12 havaitsimme, että $r(4,2) = 4$.

Nyt valitsemalla $p = 2$ ja $q = 3$ saamme, että

$$r(3,4) < 4 + 6 = r(2,4) + r(3,3)$$

eli $r(3,4) \leq 9$.

Osoitamme lisäksi, että $r(3,4) > 8$. Kuten alla olevasta kuvasta 5 voimme havaita on siis mahdollista piirtää verkko jolla on kahdeksan kärkeä, mutta ei kolmen kärjen klikkiä tai neljän kärjen riippumatonta joukkoa.



Kuva 5. Esimerkin 23 verkko.

Näin olemme osoittaneet, että $r(3,4) = 9$. □

3.4. Ramseyn lukujen tarkat arvot. Onko olemassa Ramseyn lukua $r(5,5)$? Tälläinen luku on kyllä olemassa, mutta sille ei olla pystytty määrittämään tarkkaa arvoa. Tiedetään, että sen arvo on jotain 43 ja 49 välillä. Tällaisia lukuja on vielä paljon jäljellä, sillä niiden selvittäminen samaan tapaan, kuin edellisessä esimerkissä, piirtämällä verkko on lähes mahdotonta.[**7**]

l / *k*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	69 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	121 316	141 442	157	181	205	233	261
6				102 165	111 298	127 495	169 780	178 1171	253	262	317		401
7					205 540	216 1031	232 1713	2826	405	416	511		
8						282 1870	317 3583	6090			817		861
9							565 6588	580 12677					
10								798 23556					1265

Taulukko 1. Tähän taulukkoon on koottu kaikki tällä hetkellä tunnetut Ramseyn luvut. Taulukosta nähdään myös Ramseyn luvut, joille on määritetty lukuarvot joidenka väliltä tarkka arvo löytyy. [**7**]

Taulukossa 1 on esitettynä muutamia Ramseyn lukuja. Esimerkiksi tarkka arvo on määritetty Ramseyn luvulle $r(4,5) = 25$, luvulle $r(5,9)$ on pystytty määrittämään alaraja 121 ja yläraja 316, luvulle $r(6,12)$ taas on määritetty alaraja 262, mutta ei ylärajaa ja luvulle $r(7,10)$ on voitu määrittää tällä hetkellä yläraja 2826, mutta ei alarajaa. Seuraava taulukko saa meidät ymmärtämään laskennallisten ja tarkkojen arvojen eroja.

n	Alaraja $\sqrt{2}^n$	Yläraja $\binom{2n-2}{n-1}$	tarkka arvo
3	3	6	6
4	4	20	18
5	6	70	43–49
6	8	252	102–165
7	11	924	205–540
8	16	3432	282–1870
9	23	12870	565–6588
10	32	48620	798–23556

TAULUKKO 2. Ramseyn lukujen $r(n,n)$ arvoja. Taulukossa on esitetty tarkat arvot mahdollisuuksien mukaan.

Taulukossa 2 esitellään Ramseyn luvut $r(n,n)$, missä $n = 3, 4, ..., 10$. Lisäksi taulukossa esitetään lukujen tarkat arvot, jotka on taulukon 1 mukaiset sekä lauseiden 17 ja 18 nojalla määrittämämme rajat. Taulukon 2 avulla voidaan verrata tarkkoja ja laskennallisia arvoja keskenään ja havaitaan, että laskennalliset arvot ovat hyvin kaukana tarkoista arvoista. Edellisten taulukoiden avulla voidaan siis havaita kuinka haasteellista Ramseyn lukujen tarkka laskeminen on, sillä vain pienet Ramseyn luvut ovat tunnettuja.

Lähdeluettelo

[1] John Clark, Derek Allan Holton: *A first look at graph theory.* toinen laitos, World Scientific, 1998.

[2] Ramsey, F. P.: *On a Problem of Formal Logic*, Proc. London Math. Soc., Vol. 30 (1929), 264286.

[3] P. Erdös, G. Szekeres *A Combinatorial Problem in Geometry*, Compositio Math 2 (1935), 463-470.

[4] Ronald L.Graham, Bruce L. Rothschild, Joel H. Spencer: *Ramsey Theory.* Second Edition, Wiley, 1990.

[5] Kerkko Luosto: *Ramseyn teoria*, `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/Ramsey/Ramte.pdf`, Matematiikan laitos, Helsingin yliopisto, 2003, viitattu 22.3.2015.

[6] Jarkko Peltomäki: *Ramseyn lauseen ensimmäinen sovellus*, `http://turambar.org/jarkko/texts/logiikka_ramsey.pdf`, 20.3.2012, viitattu 22.3.2015.

[7] Stanislaw P. Radziszowski: *Small Ramsey Numbers*, Rochester Institute of Technology, (2004), `http://www.emis.ams.org/journals/EJC/Surveys/ds1.pdf`, viitattu 22.3.2015.

[8] R.L.Graham, J. Nesetril *Ramsey Theory in the Work of Paul Erdős*, `http://www.math.ucsd.edu/~ronspubs/96_01_ramsey_and_erdos.pdf`, viitattu (5.5.2015).

[9] Shariefuddin Pirzada, Ashay Dharwadker *Applictaions of Graph Theory*, Journal of the korean soviety for industrial and applied mathematics vol.11 no.4, 2007.

[10] Vera Rosta *Ramsey Theory Applications*, The electronic journal of combinatorics, 2004.

[11] Jonathan Hayes *A Graph Model for RDF*, Technische Universität Darmstadt, Universidad de Chile, 2004.

[12] R.E.Greenwood, A.M. Gleason *Combinatorial relations and chromatic graphs*, University of Texas, Harvard University.