Raja-arvot ja jatkuvuus
Harj. 2.

1. Olk. $\varepsilon > 0$. Valit. $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$ Tällöin, jos $|x-0| < \delta$, niin

$$|f(x) - f(0)| = |x||x^9+1| \overset{\Delta\text{-e}}{\leq} |x|(|x|^9+1) \underset{\delta \leq 1 \Rightarrow |x|<1}{\leq} |x|(1^9+1) \underset{\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}}{<} \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon.$$

Siis f jatk. 0:ssa.

2. Olk. $x_0 > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Valit. $\delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right)$. Tällöin, jos $|x - x_0| < \delta$, niin ensinnäkin $|x-x_0| < \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$ ja

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x-x_0|}{|x||x_0|} \underset{\frac{x_0}{2} < x}{<} \frac{2}{x_0^2}|x - x_0| \underset{\delta \leq \frac{x_0^2}{2}\varepsilon}{<} \frac{2}{x_0^2}\,\frac{x_0^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

3. (a) Ratk. 1. Olk. $x_0 \in \mathbb{R}$. Olk. $\varepsilon > 0$. Koska f jatk. niin on olem. $\delta > 0$ s.e.

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, kun $|x - x_0| < \delta$.

Nyt

$$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \overset{\nabla\text{-ey}}{\leq} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ kun } |x - x_0| < \delta.$$

Siis $|f|$ jatk. x_0:ssa.

Ratk. 2. Itseisarvofunktio $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$ on jatk. Esim 1.3 nojalla. Näin ollen $|f| = h \circ f$ on kahden jatk. kuvauksen yhdistettynä kuvauksena jatkuva (L1.10)

(b) Ei: Esim $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ on epäjatk. 0:ssa,

mutta $|f(x)| = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on vakiofunktiona jatkuva.

4. Koska JRF Harj. 2. #1 nojalla

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)$$

niin väite seuraa Lauseesta 1.6:

$-g$ jatk $\overset{(i)}{(iii) \Rightarrow}$ $f+(-g)$ jatk $\Rightarrow |f-g|$ jatk $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $g+|f-g|$

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $f+g+|f-g|$ jatk. $\overset{(iii)}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right)$ jatk.

5. Koska f on jatk. 0:ssa, niin Lauseen 1.4 nojalla on olem. $M_1 > 0$ ja $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x)| \leq M_1 \quad \text{kaikilla} \quad x \in]-\delta, \delta[.$$

Valit. $M = \max\left(M_1, \frac{1}{\delta}\right)$. Tällöin

$$|f(x)| \leq M \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbb{R}:$$

(i) Jos $x \in]-\delta, \delta[$, niin

$$|f(x)| \leq M_1 \leq M.$$

(ii) Jos $x \notin]-\delta, \delta[$, niin

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta} \leq M.$$

6. Antiteesi: $f(0) > 0$.
Määr $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x^2$ Lauseen 1.6 nojalla h on jatk. 0:ssa. Koska $h(0) > 0$, niin Lauseen 1.5 nojalla on olem. $\delta > 0$ s.e.

$$h(x) \geq \frac{1}{2}h(0) > 0 \qquad \text{kaikilla} \quad x \in]-\delta, \delta[.$$

Eli

$$f(x) > g(x) \qquad \text{''} \quad x \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}. \text{ RR.}$$

7. Koska (JRF)

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\cos(x) = 1 - 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

Kosinifunktion jatkuvuus seuraa Lauseesta 1.6 ja tiedoista, että vakiofunktio (Esim 1.3) ja sinifunktio (Ohj 1.) ovat jatkuvia.

8. Olk. $x_0 \in \mathbb{R}$.

1° Jos $x_0 > 0$, niin tarkastellaan funktiota $f|_{]0,\infty[}(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}+6\right) + x\cos\frac{2}{x^2}$.

Funktio

$\left.\begin{array}{l} x \mapsto x \\ x \mapsto x^2 \\ x \mapsto 6 \end{array}\right\}$ jatk. $\mathbb{R}$:ssä (polynomi) $\quad \left.\begin{array}{l} x \mapsto \frac{1}{x} \\ x \mapsto \frac{2}{x^2} \end{array}\right\}$ jatk. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:ssa (rationaalifunktio)

$x \mapsto \sin x$ jatk. $\mathbb{R}$:ssä (ohj. 1.) $\quad x \mapsto \cos x$ jatk. $\mathbb{R}$:ssä (#7).

Tällöin

$x \mapsto \frac{1}{x}+6$ jatk. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:ssa (L.1.6(i)) ja $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}+6\right)$ jatk. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:ssa (L.1.10)

Edelleen

$x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}+6\right)$ jatk. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:ssa (L.1.6(ii)).

Vastaavasti

$x \mapsto x\cos\frac{2}{x^2}$ jatk. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:ssa ja näin ollen

$f|_{]0,\infty[}(x)$ on jatk. (L.1.6(ii)).

2° Jos $x_0 < 0$, niin $f|_{]-\infty,0[}(x) = x^5$ on polynomina jatk.

3° Jos $x_0 = 0$, niin sovelletaan suppiloperiaatetta:

Olk. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2|x|$ ja $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = -2|x|$.

Tällöin

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in [-1,1]$:

(a) Jos $x \in]0,1]$, niin

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}+6\right) \le 1 \Rightarrow -|x| = -x \overset{0<x\le 1}{\le} -x\cdot x = -x^2 \le x^2\sin\left(\frac{1}{x}+6\right) \le x^2 = x\cdot x \le x = |x|$$

ja

$$-1 \le \cos\frac{2}{x^2} \le 1 \Rightarrow -|x| = -x \le x\cos\frac{2}{x^2} \le x = |x|.$$

Näin ollen

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in]0,1]$.

(b) Jos $x \in [-1,0[$, niin

$$h(x) \le -|x| = x \le x\cdot x^4 = x^5 \le 0 \le g(x).$$

Lisäksi $h(0) = f(0) = g(0)$ ja h ja g ovat jatk. (Esim 1.3 + L 1.6)

Funktion f jatk 0:ssa seuraa suppiloperiaatteesta.