

Weizsäcker–Williams-fotonipilvi

Kandidaatintutkielma, 28.05.2021 (korjattu 18.08.2021)

Tekijä:

SAMI YRJÄNHEIKKI

Ohjaaja:

HANNU PAUKKUNEN



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

© 2021 Sami Yrjänheikki

Julkaisu on tekijänoikeussäännösten alainen. Teosta voi lukea ja tulostaa henkilökohtaista käyttöä varten. Käyttö kaupallisiin tarkoituksiin on kielletty. This publication is copyrighted. You may download, display and print it for Your own personal use. Commercial use is prohibited.

Tiivistelmä

Yrjänheikki, Sami

Weizsäcker–Williams-fotonipilvi

Kandidaatintutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2021, 53 sivua

Tämän tutkielman tarkoitus on johtaa Weizsäckerin ja Williamsin menetelmässä käytetty fotonien lukumääräjakauma. Weizsäckerin ja Williamsin menetelmä on hiukkasfysiikassa käytetty approksimaatio sähkömagneettisten vuorovaikutusten ja törmäysprosessien tutkimiseen. Sähkö- ja magneettikenttien muunnoskaavat johdetaan kenttätensorin avulla, ja niistä selvitetään liikkuvan varauksen sähkö- ja magneettikentät. Lukumääräjakauman johtamisen oleellinen välivaihe, energiajakauksen johto, tehdään kahdella eri tavalla. Molemmat tavat antavat saman tuloksen, joka on myös sama kuin kirjallisuudessa esiintyvä lauseke. Lukumääräjakaumalle annetaan myös asymptoottisia approksimaatioita suuren ja pienen argumentin rajoilla. Lopuksi pohditaan energiajakauksen johtoon käytettyjen tapojen eroja sekä menetelmiin tarvittavia approksimaatioita.

Avainsanat: Weizsäckerin ja Williamsin menetelmä, ekvivalentti fotoniapproksimaatio, virtuaalifotonien menetelmä, fotonipilvi

Abstract

Yrjänheikki, Sami

Weizsäcker–Williams photon cloud

Bachelor’s thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2021, 53 pages.

The goal of this thesis is to derive the photon number spectrum used in the Weizsäcker–Williams method. The Weizsäcker–Williams method is an approximation used in particle physics to study electromagnetic interactions and collision processes. Transformation rules for the electric and magnetic fields are derived using the field tensor, and the electric and magnetic fields of a moving charge are determined from those rules. A key step in the derivation of the number spectrum, the derivation of the energy spectrum, is done in two different ways. Both approaches yield the same result, which agrees with the formula found in the literature. Asymptotic approximations are given for the number spectrum in the large and small argument limit. Finally, the different methods used in the derivation of the energy spectrum, as well as the approximations needed for them, are discussed.

Keywords: Weizsäcker–Williams method, equivalent photon approximation, method of virtual quanta, photon cloud

Esipuhe

Tässä tutkielmassa tutustutaan Weizsäckerin ja Williamsin menetelmään. Menetelmässä ultrarelativistisen varatun hiukkasen sähkö- ja magneettikenttä tulkitaan virtuaalifotoneista koostuvana pilvenä. Tutkielman tavoitteena on johtaa kaava näiden virtuaalifotonien lukumääräjakaumalle. Tutkielmassa ei kuitenkaan päästä käsittelemään menetelmän eri sovelluksia hiukkasfysiikkaan.

Tutkielman tarkoitus on käydä lukumääräjakauman johtaminen tarkasti läpi. Kirjallisuudessa jakauman johto käsitellään yleensä melko nopeasti, jolloin moni välivaihe jää lukijan selvitettäväksi. Samalla käytetyt approksimaatiot jäävät hämärän peittoon.

Energiajakauman johdon aikana vastaan tulee paljon integraalilaskentaa. Osa näistä laskuista on esitetty tutkielman lopussa olevissa liitteissä. Tarkoitus on, että liitteet sisältävät pelkästään laskujen laskemista, jolloin päätekstin voi lukea ilman liitteisiin tutustumista.

Haluaisin lopuksi kiittää ohjaajaani Hannu Paukkusta avusta tutkielman tekemisessä ja kirjoitusprosessin aikana käydyistä monista keskusteluista, sekä vanhempiani kaikesta siitä, mitä he ovat minun eteeni tehneet.

Jyväskylässä 13. toukokuuta 2021

Sami Yrjänheikki

Sisällys

Tiivistelmä	3
Abstract	5
Esipuhe	7
1 Johdanto	11
1.1 Yksiköt ja merkinnät	12
1.2 Tensorilaskentaa	13
2 Ultrarelativistisen hiukkasen kenttä	15
2.1 Sähkömagneettisen kentän Lorentz-muunnos	15
2.2 Liikkuvan varauksen kentät	18
2.3 Ekvivalentit pulssit	21
3 Taajuusjakauma	25
3.1 Energiajakauma energiatihedden avulla	25
3.2 Energiajakauma Poyntingin vektorin avulla	30
3.3 Asymptoottinen käyttäytyminen	32
3.4 Yksikkömuunnokset	34
3.5 Fotonijakauma	37
4 Päätäntö	41
Lähteet	43
A Sähkökentän ultrarelativistinen raja	45
B Fourier'n muunnokset	47
C Taajuusjakauman integrointi	51

1 Johdanto

Weizsäckerin ja Williamsin menetelmässä¹ kahden varatun hiukkasen törmäysprosessissa törmäävän hiukkasen sähkömagneettinen kenttä korvataan ekvivalentilla säteilypulssilla eli fotonipilvellä. Törmäysprosessit ovat Weizsäckerin ja Williamsin menetelmän kohdalla perifeerisiä törmäyksiä, eli hiukkaset eivät oikeasti törmää toisiinsa, vaan kulkevat toistensa ohi. Törmäysprosessia voidaan nyt tutkia analysoimalla fotonipilven törmäystä alkuperäiseen kohteeseensa. Weizsäckerin ja Williamsin menetelmä sai alkunsa Fermin [1] artikkelista vuodelta 1924. Weizsäcker [2] ja Williams [3] yleistivät Fermin idean relativistiseen tilanteeseen toisistaan riippumatta vuonna 1934. [4, s. 724]

Williamsin [3] artikkeli esittelee yleisen menetelmän lisäksi sen soveltamista esimerkiksi atomien ja ydinten virittymiseen ja ionisaatioon sekä atomiytimen hajoamiseen. Jackson [4, 15.5] puolestaan näyttää, miten jarrutussäteilyn voi tulkita virtuaalifotonien sirontana. Yleisemmällä tasolla Weizsäckerin ja Williamsin menetelmä on semiklassinen approksimaatio Feynmanin säännöille sähkömagneettisissa vuorovaikutuksissa [5, s. 9].

Tässä työssä käsitellään klassista Weizsäckerin ja Williamsin menetelmää. Menetelmästä on tehty myös yleisempiä versioita, kuten esimerkiksi hiukkasten spinin huomioiva spin- $\frac{1}{2}$ -versio [6] ja sähköheikko [7] versio. Lisäksi samaa menetelmää on myös sovellettu gravitaatiosäteilyyn [8].

Luvussa 2 johdetaan ensin sähkö- ja magneettikentän muunnoskaavat Lorentzpuskuissa, ja tämän jälkeen liikkuvan varauksen sähkö- ja magneettikenttien lausekkeet. Luvun lopussa tarkastellaan, kuinka liikkuvan varauksen kentät käyttäytyvät ultrarelativistisella rajalla. Luvussa 3 johdetaan varsinainen lukumääräjakauma. Luvun alussa energiajakauma johdetaan kahdella eri tavalla, jonka jälkeen tarkastellaan saadun energiajakauman asymptoottisia approksimaatioita. Lopuksi jakauma muunnetaan SI-yksiköihin ja johdetaan fotonien lukumääräjakauma.

¹Englanniksi *Weizsäcker–Williams method*. Tunnetaan myös nimillä ekvivalentti ftoniapproksimaatio (*equivalent photon approximation*) ja virtuaalifotonien menetelmä (*method of virtual quanta*).

1.1 Yksiköt ja merkinnät

Otetaan käyttöön luonnolliset yksiköt

$$\hbar = c = \epsilon_0 = 1, \quad (1.1)$$

missä \hbar on Planckin redusoitu vakio, c valonnopeus ja ϵ_0 tyhjiön permittiivisyys. Näitä yksiköitä käytetään, ellei toisin mainita. Mikäli jokin lauseke A ilmoitetaan SI-yksiköissä, käytetään merkintää A_{SI} . Vastaavasti Gaussin yksiköille käytetään merkintää A_{G} . Aluvuossa 3.4 käytetään yksikönmuunnosten yhteydessä merkintää $A \rightsquigarrow B$, joka tarkoittaa rakenteellista sijoitusta. Tässä jokin lauseke A korvataan toisella lausekkeella B . Merkintä otetaan käyttöön, jotta se ei sotkeutuisi raja-arvon merkintään.

Kolmiulotteisen avaruuden vektoreita merkitään lihavoidusti \mathbf{A} , ja Minkowskin avaruuden vektoreita A^μ . Kahden kolmiulotteisen avaruuden vektorin \mathbf{A} ja \mathbf{B} euklidista sisätuloa eli pistetuloa merkitään $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Minkowskin avaruudessa käytetään metristä tensoria

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

ja pisteelle $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ otetaan käyttöön merkintä

$$x^0 \equiv t, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y \quad \text{ja} \quad x^3 \equiv z.$$

Merkintä $f \sim g$ tarkoittaa asymptoottista ekvivalenssia, eli että $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ kun $x \rightarrow x^*$. Rajapiste x^* riippuu tilanteesta. Yleensä on $x^* = 0$ tai $x^* = \infty$, ja tässä työssä myös $x^* = 1$.

1.2 Tensorilaskentaa

Fysiikan kannalta tensorit ovat olioita, jotka noudattavat koordinaattimuunnoksissa tiettyjä muunnoskaavoja. Tensoreihin liittyy indeksejä, ja niiden merkintä on muotoa

$$T_{b_1, b_2, \dots, b_m}^{a_1, a_2, \dots, a_n}. \quad (1.3)$$

Yläindeksissä olevat indeksit, yhtälön (1.3) tapauksessa a_1, a_2, \dots, a_n , ovat niin kutsuttuja kontravariantteja komponentteja. Alaindeksejä, yhtälön (1.3) kohdalla b_1, b_2, \dots, b_m , kutsutaan kovarianteiksi komponenteiksi. Esimerkiksi tensoria T^{ij} kutsutaan toisen kertaluvun kontravariantiksi tensoriksi, ja tensoria T_{ij} puolestaan toisen kertaluvun kovariantiksi tensoriksi. Fysiikassa tensorit, joilla on kaksi indeksia, ovat hyvin yleisiä. Klassisen mekaniikan jännitystensori ja hitausmomenttitensori ovat esimerkkejä kahden indeksin tensoreista.

Tensoreita käsitellessä hyödynnetään yleensä Einsteinin summaussääntöä, jonka mukaan peräkkäisten indeksien yli summataan. Esimerkiksi merkintä $a_i b^i$ tarkoittaa summaa

$$a_i b^i \equiv \sum_{i=1}^n a_i b^i.$$

Kun indekseinä käytetään kreikkalaisia aakkosia, kuten μ, ν, σ tai ρ , summaus alkaa nolasta ja päättyy kolmeen, esimerkiksi

$$x_\mu y^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x_\mu y^\mu.$$

Jos toisen kertaluvun tensorin komponentit ajatellaan matriisielementteinä, voidaan tällaiselle tensorille antaa matriisiesitys. Esimerkiksi tensorin $T^{\mu\nu}$ matriisiesitys jossain koordinaatistossa on

$$T = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}.$$

Matriisiesitys riippuu aina käytössä olevasta koordinaatistosta. Tensorit itsessään ovat koordinaatistovapaita, eivätkä ne riipu käytettävästä koordinaatistosta. Juuri tämä ominaisuus tekee tensoreista hyödyllisiä fysiikan käyttöön.

Oleellista tensoreissa ovat niiden muunnoskaavat. Siirryttäessä esimerkiksi koordinaateista $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinaatteihin $\bar{x}^i = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, toisen kertaluvun kontravariantti tensori noudattaa muunnoskaavaa [9, s. 962]

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} T^{kl}, \quad (1.4)$$

missä T^{kl} on tensorin T kontravariantit komponentit kirjoitettuna x^i -koordinaateissa ja \bar{T}^{ij} vastaavat komponentit \bar{x}^i -koordinaateissa.

Tensorien derivointi on yleisesti ottaen hieman monimutkaista. Tensorin derivaatta kutsutaan kovariantiksi derivaataksi, ja yleisessä tapauksessa sillä ja komponenttien osittaisderivoinnilla on eroa. Tässä työssä keskitytään kuitenkin Minkowskin avaruuteen metriikalla (1.2) varustettuna, jossa kovariantti derivaatta yhtyy komponentteittaiseen osittaisderivointiin². Tämän työn puitteissa tyydytään siis toteamaan, että derivointaessa tensoria derivaattaoperaattoreilla

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad \text{tai} \quad \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (1.5)$$

saadaan aina uusi tensori, jossa on yksi indeksi enemmän kuin alkuperäisessä tensorissa. Tensoreista ja niiden derivoinnista erityisesti fysiikan näkökulmasta voi lukea esimerkiksi lähteestä [10], josta suurin osa tämän alaluvun tiedoista on myös peräisin.

²Ensimmäisen kertaluvun kontravariantin tensorin T^μ kovariantti derivaatta indeksin ν suhteen $D_\nu T^\mu$ saadaan kaavalla [9, s. 969]

$$D_\nu T^\mu = \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\nu} T^\rho,$$

missä $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ on toisen lajin Christoffelin symboli. Christoffelin symbolit voidaan laskea metriikasta $\eta_{\mu\nu}$ kaavan [9, s. 967]

$$\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial \eta_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \eta_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \eta_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} \right)$$

avulla, missä $\eta^{\mu\lambda}$ on matriisin (1.2) käänteismatriisin alkio. Metriikan $\eta_{\mu\nu}$ kaikki matriisialkiot ovat vakioita, joten derivaatat häviävät ja siten myös $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ häviää kaikilla μ , ν ja ρ . Näin ollen

$$D_\nu T^\mu = \frac{\partial T^\mu}{\partial x^\nu}$$

eli kovariantti derivaatta yhtyy osittaisderivointiin.

2 Ultrarelativistisen hiukkasen kenttä

Klassisen sähkömagnetismin keskiössä ovat sähkökenttä \mathbf{E} ja magneettikenttä \mathbf{B} sekä ne yhteen kytkevät Maxwellin yhtälöt. Monesti kenttien sijaan on kätevämpää käyttää niiden potentiaaliesityksiä. Maxwellin yhtälöiden perusteella on olemassa skalaaripotentialiaali ϕ ja vektoripotentialiaali \mathbf{A} niin, että [11, 15.3]

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.1)$$

Kun sähkömagnetismin sisällytetään myös suppea suhteellisuusteoria, on helpompaa käsitellä suureita, jotka säilyvät tai noudattavat yhtälön (2.4) kaltaisia muunnoskaavoja Lorentz-muunnoksissa. Säilyvää suuretta kutsutaan Lorentz-invariantiksi ja muunnoskaavaa noudattavaa suuretta puolestaan Lorentz-kovariantiksi. Kuten yhtälöistä (2.9) tullaan näkemään, sähkö- ja magneettikenttä eivät ole tällaisia suureita. Kuitenkin esimerkiksi Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa pelkästään invarianttien ja kovarianttien suureiden avulla. Näin saadaan sähkömagnetismin kovariantti muotoilu. [11, s. 848–851] Alaluvussa 2.1 esitellään sähkömagneettisten kenttien Lorentz-muuntumisen kannalta oleelliset asiat kovariantista sähkömagnetismin teoriasta.

2.1 Sähkömagneettisen kentän Lorentz-muunnos

Aloitetaan määrittelemällä nelipotentialiaali $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ ja sähkömagneettinen kenttä-tensori [4, (11.132) ja (11.136)]

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.2)$$

missä derivaattaoperaattori ∂^μ määriteltiin yhtälössä (1.5). Kenttätensorin määritelmästä (2.2) on selvää, että $F^{\mu\mu} = 0$ ja $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$. Matriisiesitystä varten riittää siis laskea komponentit F^{01} , F^{02} , F^{03} , F^{12} , F^{13} ja F^{23} . Kun $\nu \neq 0$, saadaan yhtälöstä (2.1), että

$$F^{0\nu} = \partial^0 A^\nu - \partial^\nu A^0 = \partial_0 A^\nu + \partial_\nu A^0 = \frac{\partial A^\nu}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = -E_\nu.$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned} F^{12} &= \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_1 A^2 + \partial_2 A^1 = -(\nabla \times \mathbf{A})_z = -B_z, \\ F^{13} &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\partial_1 A^3 + \partial_3 A^1 = (\nabla \times \mathbf{A})_y = B_y, \\ F^{23} &= \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\partial_2 A^3 + \partial_3 A^2 = -(\nabla \times \mathbf{A})_x = -B_x. \end{aligned}$$

Näin saadaan tunnettu matriisiesitys

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Kuten luvussa 1.2 todettiin, tensorin kovariantti derivaatta, joka tämän työn puitteissa tarkoittaa tavallista osittaisderivointia operaattoreiden (1.5) avulla, on edelleen tensori. Määritelmästä (2.2) nähdäänkin, että $F^{\mu\nu}$ toisen kertaluvun kontravariantti tensori, kuten sen nimitys antoi jo ymmärtää. Tällaisen tensorin muunnoskaava koordinaattimuunnoksessa $x'^\mu \rightarrow x^\mu$ on yhtälön (1.4) mukaisesti

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} F'^{\rho\sigma}. \quad (2.4)$$

Tarkastellaan sitten kuvion 1 mukaista Lorentz-puskua x -akselia pitkin pilkullisesta koordinaatistosta x'^μ pilkuttomaan x^μ . Tällaiselle puskulle pätee [4, (11.18)]

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + vx'), \\ x = \gamma(x' + vt'), \\ y = y', \\ z = z', \end{cases} \quad (2.5)$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ on Lorentzin tekijä. Merkitsemällä $\Lambda^\alpha_\beta \equiv \partial x^\alpha / \partial x'^\beta$ nähdään, että muunnoskaavan (2.4) voi kirjoittaa muodossa

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho F'^{\rho\sigma} \Lambda^\nu_\sigma. \quad (2.6)$$

Osittaisderivaatat laskemalla saadaan matriisiesitys

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Nyt esimerkiksi matriisiesityksistä (2.3) ja (2.7) saadaan, että

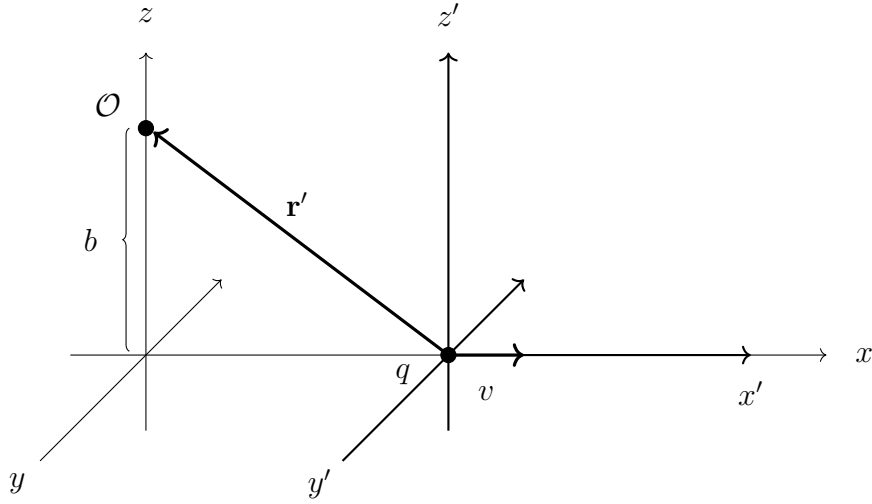
$$\begin{aligned} E_x &= -F^{01} = -\Lambda^0_\rho F'^{\rho\sigma} \Lambda^1_\sigma = -\Lambda^0_0 F'^{01} \Lambda^1_1 - \Lambda^0_1 F'^{10} \Lambda^1_0 = -\gamma^2 F'^{01} - \gamma^2 v^2 F'^{10} \\ &= \gamma^2 E'_x - \gamma^2 v^2 E'_x = \gamma^2 (1 - v^2) E'_x = E'_x. \end{aligned}$$

Laskua voi nopeuttaa huomaamalla, että muunnoskaava (2.6) vastaa matriisituloa

$$F = \Lambda F' \Lambda^\top, \quad (2.8)$$

missä Λ^\top tarkoittaa matriisin Λ transpoosia. Laskemalla matriisitulo (2.8) auki saadaan

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -E'_x & -\gamma(E'_y + vB'_z) & -\gamma(E'_z - vB'_y) \\ E'_x & 0 & -\gamma(B'_z + vE'_y) & \gamma(B'_y - vE'_z) \\ \gamma(E'_y + vB'_z) & \gamma(B'_z + vE'_y) & 0 & -B'_x \\ \gamma(E'_z - vB'_y) & -\gamma(B'_y - vE'_z) & B'_x & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Kuvio 1. Koordinaatistot S ja S' . Koordinaatisto S' liikkuu koordinaatiston S suhteen nopeudella v oikealle. Havainnoitsija on koordinaatiston S suhteen paikallaan pisteessä $(0, 0, b)$, ja varattu hiukkanen on paikallaan koordinaatiston S' origossa.

Matriisielementtejä vertaamalla nähdään, että

$$\begin{cases} E_x = E'_x, \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_z), \\ E_z = \gamma(E'_z - vB'_y), \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} B_x = B'_x, \\ B_y = \gamma(B'_y - vE'_z), \\ B_z = \gamma(B'_z + vE'_y). \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2 Liikkuvan varauksen kentät

Tarkastellaan varauksella q varattua hiukkasta, joka liikkuu havainnoijan \mathcal{O} suhteen nopeudella v . Olkoon $b > 0$ pienin etäisyys hiukkasen ja havainnoijan välillä. Parametria b kutsutaan usein törmäysparametriksi. Olkoon S havainnoijan \mathcal{O} lepokoordinaatisto, missä hiukkanen liikkuu x -akselia pitkin oikealle vauhdilla v . Olkoon S' hiukkasen lepokoordinaatisto, jossa hiukkanen on koko ajan origossa. Oletetaan, että molempien koordinaatistojen x -akselit ovat samansuuntaiset. Vaaditaan lisäksi, että ajanhetkellä $t = t' = 0$, molempien koordinaatistojen origot kohtaavat. Molemmat koordinaatistot on esitetty kuviossa 1.

S' -koordinaatistossa varaus on paikoillaan, joten tunnetusti kentille pätee

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi r'^3} \mathbf{r}' \quad \text{ja} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Tehdään sitten pusku koordinaatistosta S' koordinaatistoon S , joka voidaan laskea käyttämällä muunnoskaavoja (2.9). Yhtälöstä (2.10) saadaan

$$\begin{cases} E_x = E'_x = \frac{qx'}{4\pi(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \\ E_y = \gamma E'_y = \frac{\gamma qy'}{4\pi(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \\ E_z = \gamma E'_z = \frac{\gamma qz'}{4\pi(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Kirjoitetaan sitten kenttä (2.11) koordinaatiston S koordinaatein, jotka saadaan Lorentz-muunnoksesta (2.5). Näissä koordinaateissa sähkökentäksi (2.11) saadaan

$$\begin{cases} E_x = \frac{q\gamma(x-vt)}{4\pi(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_y = \frac{q\gamma y}{4\pi(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_z = \frac{q\gamma z}{4\pi(\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.12)$$

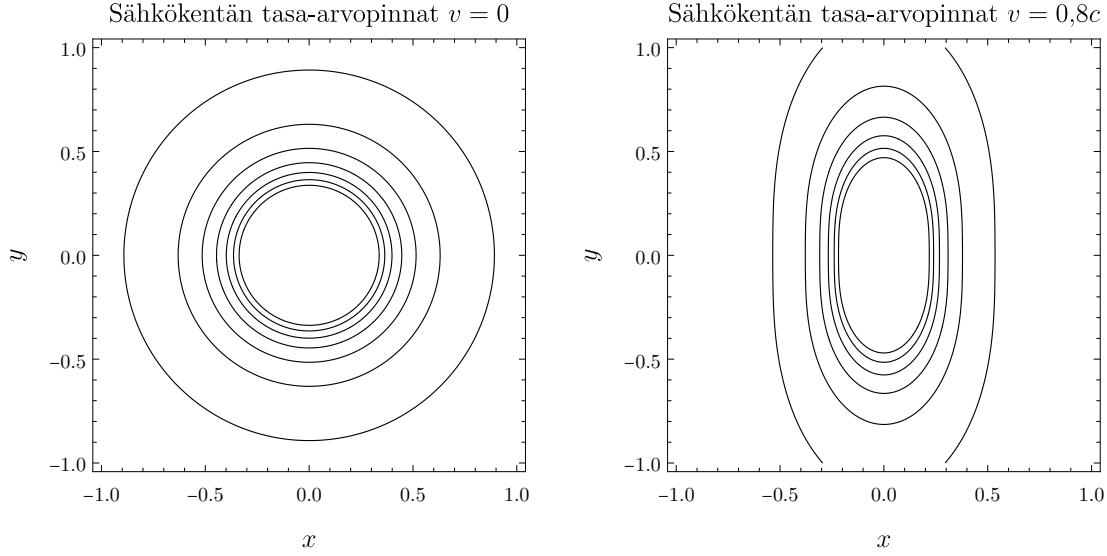
Magneettikentäksi puolestaan tulee muunnoskaavojen (2.9) avulla

$$\begin{cases} B_x = B'_x = 0, \\ B_y = \gamma(B'_y - vE'_z) = -\gamma vE'_z = -vE_z, \\ B_z = \gamma(B'_z + vE'_y) = \gamma vE'_y = vE_y. \end{cases} \quad (2.13)$$

Sähkökentän (2.12) käyttäytymistä eri nopeuksilla on esitetty kuviossa 2, josta nähdään, että kenttäviivat Lorentz-kontraktoituvat liikkeen suuntaisesti.

Havainnoitsijan \mathcal{O} koordinaatit koordinaatistossa S ovat $(0, 0, b)$. Sähkökenttä, jonka havainnoitsija \mathcal{O} mittaa, saadaan sijoittamalla koordinaatit $(0, 0, b)$ yhtälöön (2.12):

$$\begin{cases} E_x = -\frac{q\gamma vt}{4\pi(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}}, \\ E_y = 0, \\ E_z = \frac{q\gamma b}{4\pi(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}}. \end{cases} \quad (2.14)$$



Kuvio 2. Nopeudella v liikkuvan varatun hiukkasen sähkökentän (2.12) normin tasa-arvopintoja tasossa $z = 0$. Molemmissa kuvissa tasa-arvopinnat ovat samoja ja ne ovat toisistaan yhtä kaukana. Kun $v = 0$, tasa-arvopinnat muodostavat odotetusti ympyröitä. Kun $v > 0$, tasa-arvopinnat alkavat kutistua liikkeen suuntaan ja venyä liikkeen suuntaa vastaan. Tämä voidaan tulkita kenttäviivojen Lorentz-kontraktoitumisella.

Vastaavasti magneettikenttä (2.13) havainnoitsijan \mathcal{O} mittaamana on

$$\begin{cases} B_x = 0, \\ B_y = -vE_z, \\ B_z = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Tässä kohtaa on hyvä tarkistaa, että sijoittamalla havainnoitsijan \mathcal{O} koordinaatit S' -koordinaatistossa, jotka ovat $(-vt', 0, b)$, suoraan lausekkeisiin (2.11) ja (2.13), ja tekemällä muunnos $t' = \gamma(t - vx) = \gamma t$, saadaan sama tulos kuin yhtälöissä (2.14) ja (2.15).

Tarkastellaan sitten ultrarelativistista rajaa $v \rightarrow 1$. Yhtälön (2.12) perusteella

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{q\gamma}{4\pi(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.16)$$

Kun $x \neq vt$, nähdään yhtälöstä (2.16) suoraan, että $\|\mathbf{E}\| \rightarrow 0$, kun $v \rightarrow 1$. Jos taas $x = vt$, on tilanne hieman monimutkaisempi. Liitteessä A on laskettu sähkökentän normin $\|\mathbf{E}\|$ integraali yli välin $[vt - \varepsilon, vt + \varepsilon]$, missä $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen. Tulos

on yhtälön (A.4) mukaisesti

$$\int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon} \|\mathbf{E}\| dx = \frac{q}{2\pi r} E \left(\arctan \frac{\gamma\varepsilon}{r}, \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \right),$$

missä E on toisen lajin elliptinen integraali ja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ultrarelativistisella rajalla $\gamma \rightarrow \infty$ saadaan yhtälön (A.4) ja jatkuvuuden avulla

$$\int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon} \|\mathbf{E}\| dx \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \frac{q}{2\pi r}.$$

Nyt siis ultrarelativistisella rajalla $\|\mathbf{E}\|$ on nolaa kaikkialla muualla paitsi pisteessä $x = vt$, jonka ympärillä normin $\|\mathbf{E}\|$ integraali lähestyy vakioarvoa. Tämä on ominaista Diracin deltafunktiolle, joten voidaan sanoa, että

$$\lim_{v \rightarrow 1} \|\mathbf{E}\| = \frac{q}{2\pi r} \delta(x - t) = \frac{q}{2\pi \sqrt{y^2 + z^2}} \delta(x - t). \quad (2.17)$$

Yhtälöstä (2.17) nähdäänkin, että kun hiukkasen nopeus lähestyy valonnopeutta, sen sähkökentän suuruus piikittyy terävästi ja alkaa muistuttamaan vahvasti x -akselille lokalisoitunutta pulssia, joka etenee valonnopeudella. Samasta yhtälöstä nähdään myös se, että kun tarkastelupistettä siirretään kauemmas x -akselista, jolloin siis r kasvaa, niin myös sähkökentän suuruus pienenee nopeudella $1/r$. Tätä käyttäytymistä on havainnollistettu kuviossa 3.

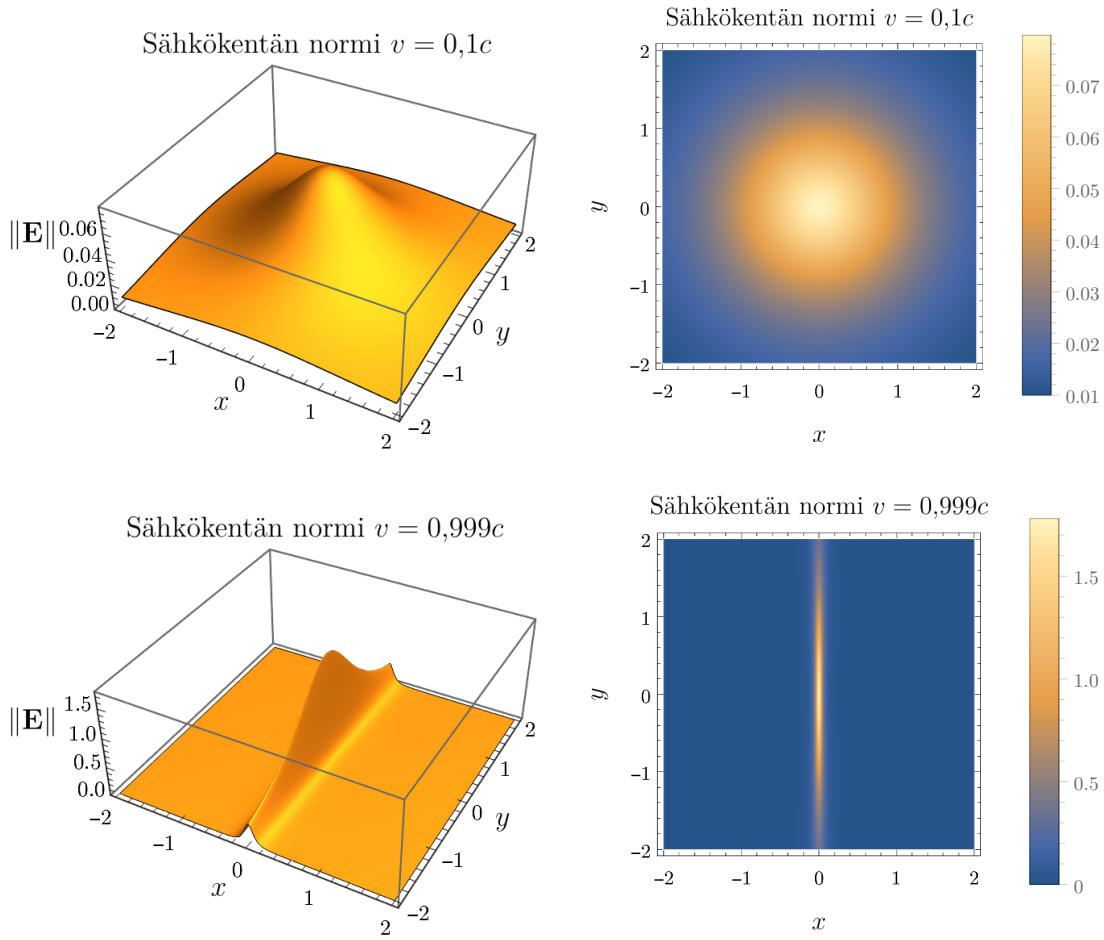
2.3 Ekvivalentit pulssit

Poyntingin vektori $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ kuvaa sitä kohtisuorassa olevan pinnan läpi virtaavaa energiaa per aikayksikkö per pinta-alayksikkö. Kenttien (2.14) ja (2.15) kohdalla Poyntingin vektoriksi tulee

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -E_z B_y \hat{\mathbf{x}} + E_x B_y \hat{\mathbf{z}} = v E_z^2 \hat{\mathbf{x}} - v E_x E_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.18)$$

Vektorin (2.18) z -komponentti $-v E_x E_z$ on pariton ajan funktiona, joten se häviää aikakeskiarvoa otettaessa. Weizsäckerin ja Williamsin menetelmässä tätä komponenttia ei huomioida [5, s. 16]. Merkitään jäljelle jäävää komponenttia

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{E}_1 = E_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.19)$$



Kuvio 3. Nopeudella v liikkuvan varatun hiukkasen sähkökentän (2.14) normi tasossa $z = 1$ ja ajanhetkellä $t = 0$. Nopeuden kasvaessa kenttä alkaa piikittymään liikkeen suuntaisesti.

Yhtälöistä (2.14) ja (2.15) nähdään heti, että $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$, eli kentät ovat kohtisuorassa toisiaan ja etenemissuuntaa vastaan. Lisäksi huomataan, että ultrarelativistisella rajalla

$$\|\mathbf{B}\| = v\|\mathbf{E}_1\| \rightarrow \|\mathbf{E}_1\|. \quad (2.20)$$

Nämä havainnot yhdessä yhtälön (2.17) kanssa oikeuttavat tulkinnan siitä, että kentät \mathbf{E}_1 ja \mathbf{B} kuvaavat ultrarelativistisella rajalla tasoaaltopulsseja. Aaltohiukkasdualismin perusteella tämä pulssi voidaan tulkita fotonipilveksi. Näille fotoneille käytetään nimitystä ekvivalentti fotoni, josta myös tulee nimitys ekvivalentti fotoniaaprosimaatio.

Kentän (2.14) x -komponenttia ei esiinny ollenkaan pulssissa \mathbf{S}_1 . Jackson [4, s. 726] ottaa tässä vaiheessa käyttöön keinotekoisen kentän \mathbf{B}_a , jonka avulla myös sähkökentän komponentti E_x voidaan huomioida. Kenttä \mathbf{B}_a on vain matemaattinen apuväline eikä siis todellinen. Klusek-Gawenda [5, s. 16] kuitenkin toteaa, että tämä keinotekoinen kenttä voidaan perustella kvanttikenttäteoreettisilla laskuilla. Tässä työssä tehdään vain klassinen tarkastelu, joten keinotekoiselle kentälle ei saada mitään fysikaalista perustelua. Alaluvussa 3.1 kuitenkin huomataan, että ultrarelativistisella rajalla tämän kentän vaikutus häviää nopeasti. Keinotekoinen kenttä voidaan määritellä niin, että [5, (1.2.15)]

$$\mathbf{B}_a = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.21)$$

Näin saadaan toinen pulssi

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_a = E_x^2 \hat{\mathbf{z}}; \quad \mathbf{E}_2 = E_x \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.22)$$

Keinotekoinen kenttä (2.21) voidaan valita näin, koska nyt $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{B}_a = 0$ ja $\|\mathbf{B}_a\| = \|\mathbf{E}_2\|$.

3 Taajuusjakauma

Alaluvun 2.3 perusteella ultrarelativistisen hiukkasen sähkömagneettiset kentät voidaan korvata virtuaalifotonien pilvellä. Tässä osiossa johdetaan kaava fotonijakau-
malle $dN/d\omega$, joka kertoo niiden fotonien lukumäärän, joiden taajuus on välillä $[\omega, \omega + d\omega]$. Oleellinen välivaihe fotonijakauman johdossa on energiajakauman $dU/d\omega$ lausekkeen johtaminen. Energiajakauma ilmaisee taajuusvälillä $[\omega, \omega + d\omega]$ olevien fotonien sisältämän energian.

3.1 Energiajakauma energiatiheysten avulla

Johdetaan tässä alaluvussa energiajakauma energiatiheysten avulla kirjan [12] kap-
paleen 10 tavoin tarkastelemalla ekvivalenttien pulssien (2.19) ja (2.22) sisältämää
energiaa. Energiatiheys u kertoo sähkömagneettisten kenttien sisältämän energian
per tilavuusyksikkö ja sen yleinen lauseke mielivaltaisessa pisteessä on [11, s. 508]

$$u = u(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{E}(x, y, z, t)\|^2 + \|\mathbf{B}(x, y, z, t)\|^2 \right). \quad (3.1)$$

Kokonaisenergia saadaan integroimalla energiatiheyttä (3.1) koko avaruuden yli:

$$U(t) = \iiint u(x, y, z, t) dx dy dz. \quad (3.2)$$

Integraali (3.2) ei ole oikeasti aikariippuvainen, sillä ajan kuluessa energiatiheys
liikkuu x -akselia pitkin eikä muuta muotoaan.

Ongelma tässä kohtaa on se, että integraalin (3.2) laskemiseksi energiatiheys
 u pitäisi tietää mielivaltaisessa pisteessä. Kenttien (2.14) ja (2.15) lausekkeet pä-
tevät kuitenkin vain pisteeseen $(0, 0, b)$ asetetulle havainnoitsijalle. Tämä ongelma
voidaan ratkaista vastaavalla tavalla kuin millä kokonaisenergia U todettiin ajasta
riippumattomaksi. Idea on seuraava: sen sijaan, että integroidaan koko avaruuden
 \mathbb{R}^3 yli jollakin kiinnitetyllä ajanhetkellä, voidaan integrointi suorittaa antamalla
ajan muuttua ja integroimalla jokaisella ajanhetkellä energiatiheystä vain tason
 $x = 0$ läpäisevä osuus. Aikavälillä $]-\infty, \infty[$ koko energiatiheys läpäisee tason $x = 0$,

joten tulos on ekvivalentti yhtälön (3.2) kanssa. Tilanne on pyörähdyssymmetrinen x -akselin suhteen, joten integrointi riittää tehdä pitkin suoraa $x = y = 0$. Tälle suoralle havainnoitsija \mathcal{O} voidaan asettaa mielivaltaiseen pisteeseen, jolloin päästään hyödyntämään kenttiä (2.14) ja (2.15).

Formaalimmin: olkoon t' jokin ajanhetki ja (x, y, b) jokin piste. Pyörähdyssymmetrian nojalla voidaan olettaa, että $y = 0$. Asetetaan

$$t = \frac{x}{v} + t', \quad (3.3)$$

jolloin yhtälön (2.12) perusteella

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, 0, b, t) &= \frac{q\gamma}{4\pi (\gamma^2(x - vt)^2 + b^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x - vt \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \\ &= \frac{q\gamma}{4\pi (\gamma^2 v^2 t'^2 + b^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -vt' \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{E}(0, 0, b, t'). \end{aligned} \quad (3.4)$$

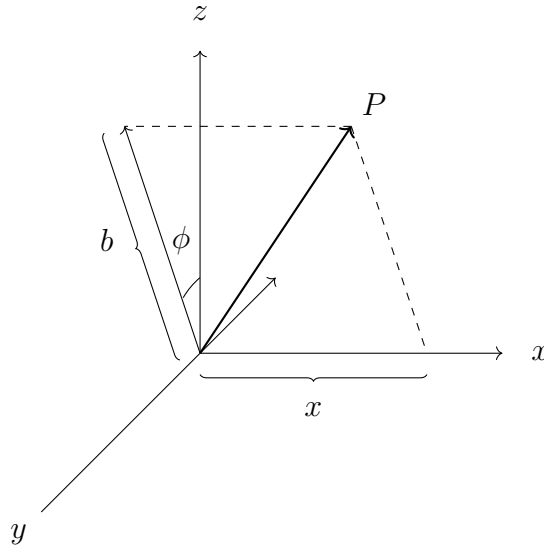
Jälkimmäinen muoto on täsmälleen sama kuin havainnoitsijan \mathcal{O} näkemä sähkökenttä (2.14). Yhtälö (3.4) kertoo siis sen, että jokainen energiatiheyden piste läpäisee jossain vaiheessa suoran $x = y = 0$, joten integrointia varten riittää tietää energiatiheys tällä suoralla. Yhtälöstä (3.3) puolestaan nähdään, että $dx = v dt$. Ultrarelativistisella rajalla voidaan kuitenkin tehdä approksimaatio $dx = dt$.

Siirrytään sitten kuvion 4 mukaisesti sylinterikoordinaatteihin (b, ϕ, x) . Kokonaisenergia (3.2) voidaan edellä näytetyn perusteella kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} U &= \iiint u(b, \phi, x, t) b db d\phi dx = \iiint u(b, 0, 0, t') b db d\phi dx \\ &= \iiint u(b, 0, 0, t) b db d\phi v dt = \iiint u(b, 0, 0, t) b db d\phi dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Kyseinen integraali ei kuitenkaan suppene, joten katkaistaan integraali radiaaliakselilla b pisteeseen $b_{\min} > 0$, jota kutsutaan minimitörmäysparametriksi. Integrointi tehdään siis yli joukon $[b_{\min}, \infty[\times [0, 2\pi] \times]-\infty, \infty[$. Katkaisu ei vaikuta integrandin aikainvarianssiominaisuuksiin, sillä integrointi x -akselia pitkin tapahtuu edelleen koko reaaliakselin yli.

Tässä työssä keskitytään yhteen varattuun hiukkaseen. Weizsäckerin ja Williamsin menetelmää sovelletaan kuitenkin usein perifeerisiin törmäyksiin, joille on



Kuvio 4. Piste P esitys sylinterikoordinaateissa (b, ϕ, x) .

olemassa jokin pienin etäisyys $b_{\min} > 0$ niin, että jos hiukkaset kulkisivat toistensa ohi yhtään lähempää, ne törmäisivät toisiinsa. Tällaiset tapaukset eivät enää kuulu perifeeristen törmäysten piiriin. Esimerkiksi ydintörmäysten kohdalla minimitörmäysparametriksi b_{\min} voidaan valita ydinten säteiden summa. Tilanteesta riippuen minimitörmäysparametrille voidaan antaa myös muita arvoja [4, s. 725–729].

1. pulssi (2.19) koostuu kentistä \mathbf{E}_1 ja \mathbf{B} , joiden energiatiheys on yhtälön (3.1) perusteella

$$u_1 = u_1(b, t) = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{E}_1(b, t)\|^2 + \|\mathbf{B}(b, t)\|^2 \right). \quad (3.6)$$

Yhtälön (2.20) perusteella ultrarelativistisella rajalla voidaan tehdä approksimaatio $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{E}_1\|$. Yhtälöstä (3.6) saadaankin siis, että

$$u_1 = \|\mathbf{E}_1(b, t)\|^2. \quad (3.7)$$

2. pulssi (2.22) puolestaan koostuu kentistä \mathbf{E}_2 ja \mathbf{B}_a , joten jälleen yhtälön (3.1) mukaisesti

$$u_2 = u_2(b, t) = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{E}_2(b, t)\|^2 + \|\mathbf{B}_a(b, t)\|^2 \right). \quad (3.8)$$

Pulssien kokonaisenergiatiheydeksi saadaan yhtälöiden (3.7) ja (3.8) perusteella

$$u = u(b, t) = u_1(b, t) + u_2(b, t) = \frac{1}{2} \left(2\|\mathbf{E}_1(b, t)\|^2 + \|\mathbf{E}_2(b, t)\|^2 + \|\mathbf{B}_a(b, t)\|^2 \right),$$

jolloin sijoittamalla lausekkeet (2.19), (2.21) ja (2.22) saadaan, että

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(2|E_z(b, t)|^2 + |E_x(b, t)|^2 + |E_x(b, t)|^2 \right) \\ &= |E_x(b, t)|^2 + |E_z(b, t)|^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pyörähdyssymmetrian perusteella integraalissa (3.5) muuttuja ϕ voidaan integroida pois, jolloin siitä jää jäljelle kerroin 2π . Näin ollen

$$\begin{aligned} U &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b_{\min}}^{\infty} u(b, t) b \, db \, dt \\ &= 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b \int_{-\infty}^{\infty} u(b, t) \, dt \, db \\ &= 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(\int_{-\infty}^{\infty} |E_x(b, t)|^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} |E_z(b, t)|^2 \, dt \right) db. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Soveltamalla Parsevalin lausetta (B.2) integraaliin (3.10) saadaan

$$U = 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}_x(\omega)|^2 \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}_z(\omega)|^2 \, d\omega \right) db, \quad (3.11)$$

missä \hat{E}_x ja \hat{E}_z ovat sähkökentän (2.14) komponenttien Fourier'n muunnokset. Fourier'n muunnoksia on käsitelty tarkemmin liitteessä B. Komponentit E_x ja E_z ovat reaalisia, joten liitteessä B osoitetun kaavan (B.5) nojalla taajuusintegraali (3.11) voidaan kirjoittaa vain positiivisten taajuuksien avulla, jolloin siis

$$\begin{aligned} U &= 4\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(\int_0^{\infty} |\hat{E}_x(\omega)|^2 \, d\omega + \int_0^{\infty} |\hat{E}_z(\omega)|^2 \, d\omega \right) db \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(|\hat{E}_x(\omega)|^2 + |\hat{E}_z(\omega)|^2 \right) db \, d\omega. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Yhtälöstä (3.12) voidaan nyt lukea, että

$$\frac{dU}{d\omega} = 4\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(|\hat{E}_x(\omega)|^2 + |\hat{E}_z(\omega)|^2 \right) db. \quad (3.13)$$

Taajuusjakauman (3.13) integraali on laskettu liitteessä C ja tuloksena on yhtälön (C.6) mukaisesti

$$\frac{dU}{d\omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - v^2 \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}, \quad \chi = \frac{\omega b_{\min}}{\gamma v},$$

missä funktiot K_ν ovat toisen lajin modifioituja Besselin funktiota.

Tarkastellaan liitteessä C tehtyä laskua vielä hieman tarkemmin. Yhtälössä (C.4) on esitetty 2. pulssin (2.22) osuus ja yhtälössä (C.5) puolestaan 1. pulssin (2.19) osuus energiajakaumasta. Näistä yhtälöistä nähdään, että 2. pulssin osuus taajuusjakaumassa on ultrarelativistisella rajalla paljon pienempi kuin 1. pulssin osuus, sillä 2. pulssin lausekkeessa (C.4) on edessä tekijä $1/\gamma^2$, joka lähestyy nopeasti nollaa ultrarelativistisella rajalla $\gamma \rightarrow \infty$. Tämä tarkoittaa, että keinotekoisen kentän vaikutus on melko pieni, ja sitä voidaankin pitää kertaluvun $1/\gamma^2$ korjauksena 1. pulssin muodostamaan jakaumaan.

Korostetaan vielä tässä kohtaa, että edellä tehtiin neljä approksimaatioita:

- (1) Yhtälön (2.18) komponentti $-v E_x E_z \hat{\mathbf{z}}$ jätettiin laskuista pois.
- (2) Energiatiheyttä (3.9) laskettaessa oletettiin, että $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{E}_1\|$, eikä $\|\mathbf{B}\| = v\|\mathbf{E}_1\|$.
- (3) Siirryttäessä integroimaan x -akselilta aika-akselille, oletettiin yhtälössä (3.5), että $x = t$ ja $dx = dt$, eikä $x = vt$ ja $dx = v dt$.
- (4) 2. pulssin (2.22) kohdalla otettiin käyttöön keinotekoinen kenttä \mathbf{B}_a .

Tässä alaluvussa kuvattu menetelmä toimii myös ilman näitä approksimaatioita. Energiatiheys voidaan nimittäin kirjoittaa suoraan kenttien (2.14) ja (2.15) avulla ilman oletusta $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{E}_1\|$ tai keinotekoista kenttää, jolloin tuloksena on

$$u = u(b, t) = \frac{1}{2} \left(|E_x(b, t)|^2 + (1 + v^2) |E_z(b, t)|^2 \right). \quad (3.14)$$

Integroimalla energiatiheyttä (3.14) kuten yhtälössä (3.10) huomioimalla, että nyt $dx = v dt$ saadaan, että

$$U = \pi v \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(\int_{-\infty}^{\infty} |E_x(b, t)|^2 dt + (1 + v^2) \int_{-\infty}^{\infty} |E_z(b, t)|^2 dt \right) db,$$

jolloin Parsevalin lauseen perusteella saadaan yhtälöä (3.12) vastaava lauseke

$$U = \pi v \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}_x(\omega)|^2 d\omega + (1 + v^2) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}_z(\omega)|^2 d\omega \right) db.$$

Kun kirjoitetaan vielä integraali positiivisten taajuuksien avulla, tuloksena on

$$U = 2\pi v \int_0^{\infty} \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(|\hat{E}_x(\omega)|^2 + (1 + v^2) |\hat{E}_z(\omega)|^2 \right) db d\omega,$$

josta saadaan yhtälön (3.13) tapaan

$$\frac{dU}{d\omega} = 2\pi v \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(|\hat{E}_x(\omega)|^2 + (1 + v^2) |\hat{E}_z(\omega)|^2 \right) db. \quad (3.15)$$

Integraalin (3.15) voi laskea samalla tavalla kuin yhtälössä (C.6) näytettiin. Tuloksena on

$$\frac{dU}{d\omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 v} \left\{ (1 + v^2) \chi K_0(\chi) K_1(\chi) - v^2 \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}, \quad (3.16)$$

missä jälleen $\chi = \omega b_{\min} / \gamma v$. Alaluvussa 3.3 tullaan näkemään, että jakauma (3.16) yhtyy aiemmin johdettuun jakaumaan (C.6) ultrarelativistisella rajalla. Tästä voidaan päätellä, että jakauman (C.6) johdossa tehdyt approksimaatiot pätevät ultrarelativistisellä rajalla. Alaluvussa 2.3 tehty fotonitulkinna on kuitenkin jakauman (3.16) kohdalla kyseenalainen, joten sen jatkokäsittely jää vähemmälle huomiolle.

3.2 Energiajakauma Poyntingin vektorin avulla

Alaluvussa 2.3 kuvattiin, että Poyntingin vektori \mathbf{S} on kohtisuoran pinnan läpäisevä energiavuo aikayksikköä kohti. Suuntaan $\hat{\mathbf{n}}$ siirtyvä teho differentiaalisen pinta-alan dA läpi on siis

$$\frac{dP}{dA} = \frac{d^2U}{dt dA} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.17)$$

Yhtälön (3.17) perusteella pinnan läpi virtaava energiavuo on

$$\frac{dU}{dA} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2U}{dt dA} dt. \quad (3.18)$$

Pulssille (2.19) pätee ultrarelativistisellä rajalla $\mathbf{S}_1 \rightarrow E_z^2$, jolloin

$$\mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}} = |E_z(b, t)|^2. \quad (3.19)$$

Pulssille (2.22) saadaan puolestaan

$$\mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}} = |E_x(b, t)|^2,$$

joten yleinen $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ voidaan tässä tapauksessa korvata jollakin sähkökentän \mathbf{E} komponentilla. Merkitään tätä komponenttia funktiolla $G(t)$, jolloin yhtälöiden (3.17) ja (3.18) nojalla

$$\frac{dU}{dA} = \int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt. \quad (3.20)$$

Soveltamalla yhtälöön (3.20) Parsevalin lausetta (B.2) saadaan

$$\frac{dU}{dA} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{G}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.21)$$

Sähkökentän komponentti G on reaalinen, joten liitteessä B osoitetun kaavan (B.5) nojalla voidaan taajuusintegraali (3.21) kirjoittaa vain positiivisten taajuuksien avulla. Tuloksena on

$$\frac{dU}{dA} = 2 \int_0^{\infty} |\hat{G}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.22)$$

Yhtälöstä (3.22) voidaan nyt lukea, että

$$\frac{d^2U}{d\omega dA} = 2 |\hat{G}(\omega)|^2. \quad (3.23)$$

Pulssille (2.19) pätee $\hat{G}(\omega) = \hat{E}_z(\omega)$ ja pulssille (2.22) puolestaan $\hat{G}(\omega) = \hat{E}_x(\omega)$, joten yhtälön (3.23) avulla

$$\frac{d^2U_1}{d\omega dA} = 2 |\hat{E}_z(\omega)|^2, \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2U_2}{d\omega dA} = 2 |\hat{E}_x(\omega)|^2, \quad (3.25)$$

missä U_1 on pulssiin \mathbf{S}_1 liittyvä energia ja U_2 vastaavasti pulssiin \mathbf{S}_2 liittyvä energia.

Kuten alaluvussa 3.1, energiajakauma saadaan integroimalla jakaumia (3.24) ja

(3.25) sylinterikoordinaatistossa suoran $x = y = 0$ yli, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\omega} &= \iint \left(\frac{d^2U_1}{d\omega dA} + \frac{d^2U_2}{d\omega dA} \right) dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(|\hat{E}_x(\omega)|^2 + |\hat{E}_z(\omega)|^2 \right) db d\phi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Hiukkasen liike x -akselia pitkin on pyörähdyssymmetrinen, joten kenttien komponentit eivät riipu muuttujasta ϕ . Integroimalla muuttuja ϕ pois saadaan yhtälö (3.26) muotoon

$$\frac{dU}{d\omega} = 4\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} b \left(|\hat{E}_x(\omega)|^2 + |\hat{E}_z(\omega)|^2 \right) db. \quad (3.27)$$

Integraali (3.27) on täysin sama kuin yhtälössä (3.13), joten saatiin sama jakauma kuin alaluvussa 3.1 energiatiheyden avulla.

3.3 Asymptoottinen käyttäytyminen

Tarkastellaan seuraavaksi pienen ($\chi \rightarrow 0$) ja suuren ($\chi \rightarrow \infty$) argumentin asymptoottisia kehitelmiä. Lähdetään liikkeelle Besselin funktioiden asymptoottisista muodoista. Rajalla $z \rightarrow 0$ pätee [13, (10.31.2) ja (10.30.3)]

$$K_\nu(z) \sim \begin{cases} \log \frac{2}{ze^{\gamma_E}}, & \nu = 0, \\ \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu}, & \nu > 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

missä merkintä $f \sim g$ tarkoittaa asymptoottista ekvivalenssia, ja $\gamma_E \approx 0,577$ on Eulerin ja Mascheronin vakio. Rajalla $z \rightarrow \infty$ puolestaan pätee [13, (10.40.2)]

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \begin{cases} 1 - \frac{1}{8z}, & \nu = 0, \\ 1 + \frac{3}{8z}, & \nu = 1. \end{cases} \quad (3.29)$$

Soveltamalla yhtälöä (3.28) energiajakaumaan (C.6) saadaan, että

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\omega} &\sim \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ 2\chi \log \frac{2}{\chi e^{\gamma_E}} \frac{1}{\chi} - v^2 \chi^2 \left(\frac{1}{\chi^2} - \left(\log \frac{2\chi}{\chi e^{\gamma_E}} \right)^2 \right) \right\} \\
&= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ 2 \log \frac{2}{\chi e^{\gamma_E}} - v^2 + v^2 \chi^2 \left(\log \frac{2}{\chi e^{\gamma_E}} \right)^2 \right\} \\
&\sim \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ 2 \log \frac{2}{\chi e^{\gamma_E}} - v^2 \right\},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

missä viimeinen arvio seuraa raja-arvosta $x \log x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Huomautetaan, että $2/e^{\gamma_E} \approx 1,123$, joka on Jacksonin [4, (15.56)] esittämän asymptoottisen approksimaation sisältämän numeerisen arvon 1,123 suljettu muoto. Täysin vastaavasti saadaan arvio jakaumalle (3.16)

$$\frac{dU}{d\omega} \sim \frac{q^2}{4\pi^2 v} \left\{ (1 + v^2) \log \frac{2}{\chi e^{\gamma_E}} - v^2 \right\}. \tag{3.31}$$

Yhtälöistä (3.30) ja (3.31) nähdään myös, että ultrarelativistisella rajalla $v \rightarrow 1$, jolla $\chi \rightarrow 0$, jakaumat (C.6) ja (3.16) yhtyvät toisiinsa ja ovat asymptoottisesti ekvivalentteja.

Sovelletaan sitten suuren argumentin approksimaatioita (3.29) jakaumaan (C.6). Tuloksena on

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\omega} &\sim \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \frac{\pi}{2} e^{-2\chi} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{8\chi} \right) \left(1 + \frac{3}{8\chi} \right) - v^2 \chi \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{8\chi^2} \right) \right\} \\
&\sim \frac{q^2}{8\pi v^2} e^{-2\chi} (2 - v^2),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

missä viimeinen arvio seuraa siitä, että $(1 - 1/8\chi)(1 + 3/8\chi) \sim 1$ ja $1/8\chi \sim 0$.

Tarkastellaan sitten vielä jakauman (C.6) sisältämää kokonaisenergiaa, joka saadaan integroimalla yli kaikkien taajuuksien:

$$U = \int_0^\infty \frac{dU}{d\omega} d\omega. \tag{3.33}$$

Jakauman (C.6) tapauksessa integraali (3.33) on laskettu liitteessä C. Tulos on yhtälön (C.13) mukaisesti

$$U = \frac{q^2}{64b_{\min} v} \gamma (4 - v^2). \tag{3.34}$$

Toistamalla vastaava lasku jakaumalle (3.16) saadaan tulokseksi

$$U = \frac{q^2}{64b_{\min}} \gamma (2 + v^2). \quad (3.35)$$

Relativistisella rajalla $v \rightarrow 1$ lausekkeet (3.34) ja (3.35) yhtyvät, kuten voikin olettaa, mutta epärelativistisella rajalla $v \rightarrow 0$ lauseke (3.35) lähestyy vakioarvoa

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{q^2}{64b_{\min}} \gamma (2 + v^2) = \frac{q^2}{32b_{\min}}.$$

Sen sijaan (3.34) hajaantuu äärettömyyteen. Tässä mielessä jakauma (3.16) käyttäytyy paremmin kuin (C.6). Epärelativistinen raja ei kuitenkaan ole mielekäs jakaumalle (C.6), sillä alaluvussa 2.3 tehty fotonitulkinta pätee vain ultrarelativistisella rajalla.

3.4 Yksikkömuunnokset

Yhtälö (C.6) on esitetty hiukkasfysiikan luonnollisissa yksiköissä (1.1). Muunnetaan ensin tämä lauseke SI-yksiköihin. Luonnollisissa yksiköissä ilmaistu nopeus v on SI-yksiköissä vc . Tästä saadaan ensinnäkin Lorentz-tekijän γ esitys SI-yksiköissä:

$$\gamma_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.36)$$

Yhtälössä (3.36), ja vastaavasti seuraavissa yhtälöissä, merkinnällä A_{SI} tarkoitetaan, että lausekkeen A annettu lauseke on SI-yksiköissä. Mielivaltainen suureen Q esitys luonnollisissa yksiköissä voidaan muuntaa SI-yksiköihin sijoittamalla $v \rightsquigarrow v/c$ ja tekemällä yrite

$$Q_{\text{SI}} = Q \hbar^\alpha c^\beta \epsilon_0^\delta, \quad (3.37)$$

missä \hbar , c ja ϵ_0 ovat ne luonnonvakiot, jotka alun perin asetettiin yhdeksi yhtälössä (1.1), ja vaatimalla, että vasemman ja oikean puolen yksiköt täsmäävät. Sijoitusta $v \rightsquigarrow v/c$ ei ole välttämätöntä tehdä, mutta se nopeuttaa muunnoksia. Todetaan jo tässä vaiheessa, että

$$\begin{aligned}
[\hbar]^\alpha [c]^\beta [\epsilon_0]^\delta &= (\text{Js})^\alpha (\text{m/s})^\beta (\text{F/m})^\delta \\
&= (\text{kgm}^2\text{s}^{-1})^\alpha (\text{ms}^{-1})^\beta (\text{A}^2\text{s}^4\text{kg}^{-1}\text{m}^{-3})^\delta \\
&= \text{A}^{2\delta} \text{m}^{2\alpha + \beta - 3\delta} \text{kg}^{\alpha - \delta} \text{s}^{4\delta - \alpha - \beta}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Esimerkiksi kerroin χ on dimensioton, joten yritteen (3.37) perusteella asettamalla

$$\chi_{\text{SI}} = \frac{c\omega b_{\text{min}}}{\gamma v} \hbar^\alpha c^\beta \epsilon_0^\delta \tag{3.39}$$

ja vaatimalla, että χ_{SI} on dimensioton, saadaan yhtälö

$$\frac{[c] [\omega] [b_{\text{min}}]}{[\gamma] [v]} [\hbar]^\alpha [c]^\beta [\epsilon_0]^\delta = \text{A}^{2\delta} \text{m}^{2\alpha + \beta - 3\delta + 1} \text{kg}^{\alpha - \delta} \text{s}^{4\delta - \alpha - \beta - 1} = 1. \tag{3.40}$$

Yhtälöstä (3.40) saadaan nyt yhtälöryhmä

$$2\delta = 2\alpha + \beta - 3\delta + 1 = \alpha - \delta = 4\delta - \alpha - \beta - 1 = 0,$$

jonka ratkaisu on $\alpha = \delta = 0$ ja $\beta = -1$. Sijoittamalla tämä ratkaisu yhtälöön (3.39) saadaan, että

$$\chi_{\text{SI}} = \frac{c\omega b_{\text{min}}}{\gamma v} c^{-1} = \frac{\omega b_{\text{min}}}{\gamma v}.$$

Kertoimella χ on siis sama lauseke sekä luonnollisissa yksiköissä että SI-yksiköissä.

Tarkastellaan sitten energiajakaumaa (C.6). SI-yksiköissä

$$\left(\frac{dU}{d\omega}\right)_{\text{SI}} = \left(\frac{q^2}{4\pi^2 v^2}\right)_{\text{SI}} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - \frac{v^2}{c^2} \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}. \tag{3.41}$$

Aaltosulkeiden sisällä oleva termi on dimensioton, joten riittää selvittää etutekijän $q^2/4\pi^2 v^2$ esitys SI-yksiköissä. Kuten edellä, asetetaan

$$\frac{q^2 c^2}{4\pi^2 v^2} \hbar^\alpha c^\beta \epsilon_0^\delta \tag{3.42}$$

ja vaaditaan, että lausekkeella (3.42) on sama yksikkö kuin energiajakaumalla $dU/d\omega$. Jakauman $dU/d\omega$ yksikkö on $\text{Js} = \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$, joten yhtälöstä (3.38) saadaan, että

$$\frac{[q]^2 [c]^2}{[v]^2} [\hbar]^\alpha [c]^\beta [\epsilon_0]^\delta = \text{A}^{2\delta+2} \text{m}^{2\alpha+\beta-3\delta} \text{kg}^{\alpha-\delta} \text{s}^{4\delta-\alpha-\beta+2} = \text{kgm}^2 \text{s}^{-1},$$

josta puolestaan saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2\delta + 2 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 3\delta = 2, \\ \alpha - \delta = 1, \\ 4\delta - \alpha - \beta + 2 = -1. \end{cases} \quad (3.43)$$

Yhtälöryhmän (3.43) ratkaisuksi tulee $\alpha = 0$ ja $\beta = \delta = -1$. Sijoittamalla saatu ratkaisu takaisin etutekijän lausekkeeseen (3.42) on tuloksena

$$\left(\frac{q^2 c^2}{4\pi^2 v^2} \right)_{\text{SI}} = \frac{q^2 c}{4\pi^2 \epsilon_0 v^2}. \quad (3.44)$$

Nyt yhtälöistä (3.41) ja (3.44) saadaan lopulta energiajakauman (C.6) esitys SI-yksiköissä:

$$\left(\frac{dU}{d\omega} \right)_{\text{SI}} = \frac{q^2 c}{4\pi^2 \epsilon_0 v^2} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - \frac{v^2}{c^2} \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}. \quad (3.45)$$

Jacksonin [4, (15.54)] johtama lauseke energiajakaumalle on Gaussin yksiköissä

$$\left(\frac{dU}{d\omega} \right)_{\text{G}} = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v} \right)^2 \left\{ \chi K_0(\chi) K_1(\chi) - \frac{v^2}{2c^2} \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}. \quad (3.46)$$

Yhtälö (3.46) voidaan muuntaa SI-yksiköihin sijoittamalla $q^2 \rightsquigarrow q^2/4\pi\epsilon_0$ [4, s. 779], jolloin tuloksena on

$$\left(\frac{dU}{d\omega} \right)_{\text{SI}} = \frac{q^2 c}{4\pi^2 \epsilon_0 v^2} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - \frac{v^2}{c^2} \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}. \quad (3.47)$$

Huomataan, että lausekkeet (3.45) ja (3.47) ovat täysin samat, joten johdettu jakauma (C.6) vastaa kirjallisuudessa saatua tulosta.

Asymptoottisten arvioiden (3.30) ja (3.32) muunnos SI-yksiköihin on nyt helppoa, sillä kun aaltosulkujen sisällä oleviin lausekkeisiin tehdään sijoitus $v \rightsquigarrow v/c$, niistä tulee dimensiottomia. Toisaalta, etutekijän SI-muunnos on jo laskettu yhtälössä (3.44), joten saadaan

$$\left(\frac{dU}{d\omega}\right)_{\text{SI}} \sim \frac{q^2 c}{4\pi^2 \epsilon_0 v^2} \begin{cases} 2 \log \frac{2}{\chi e^{\gamma E}} - \frac{v^2}{c^2}, & \chi \rightarrow 0, \\ \frac{\pi}{2} e^{-2\chi} \left(2 - \frac{v^2}{c^2}\right), & \chi \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.48)$$

3.5 Fotonijakauma

Kun energian taajuusjakauma (C.6) on laskettu, päästään tästä helposti fotonien määrän N taajuusjakaumaan. Yhdellä fotonilla on energiaa $U = \hbar\omega$, joten

$$\left(\frac{dN}{d\omega}\right)_{\text{SI}} = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{dU}{d\omega}\right)_{\text{SI}}. \quad (3.49)$$

Sijoittamalla yhtälöön (3.49) SI-yksiköissä oleva jakauma (3.45) saadaan fotonien lukumääräjakaumaksi lopulta

$$\left(\frac{dN}{d\omega}\right)_{\text{SI}} = \frac{q^2 c}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar v^2 \omega} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - \frac{v^2}{c^2} \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}. \quad (3.50)$$

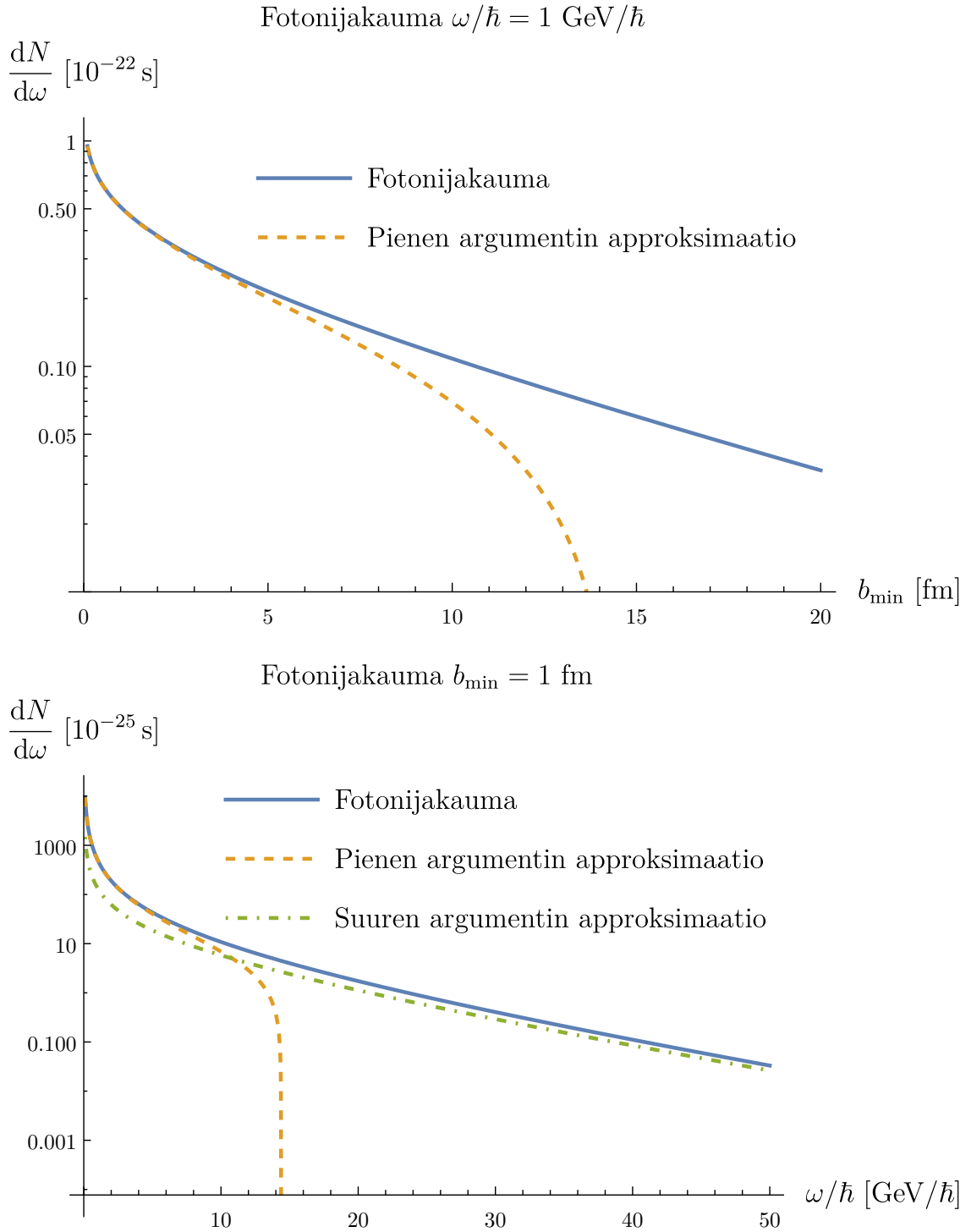
Fotonijakauma (3.50) ei välttämättä anna aina kokonaislukuarvoja, vaikka se kuvaakin fotonien lukumääräjakaumaa. Jakauman johto on kuitenkin ollut pääasiassa klassinen, joten esimerkiksi sähkö- ja magneettikentät voivat saada mielivaltaisia arvoja eivätkä ne ole kvantittuneet.

Soveltamalla aiemmin johdettuja asymptoottisia arvioita (3.48) saadaan myös lukumääräjakaumalle arvio

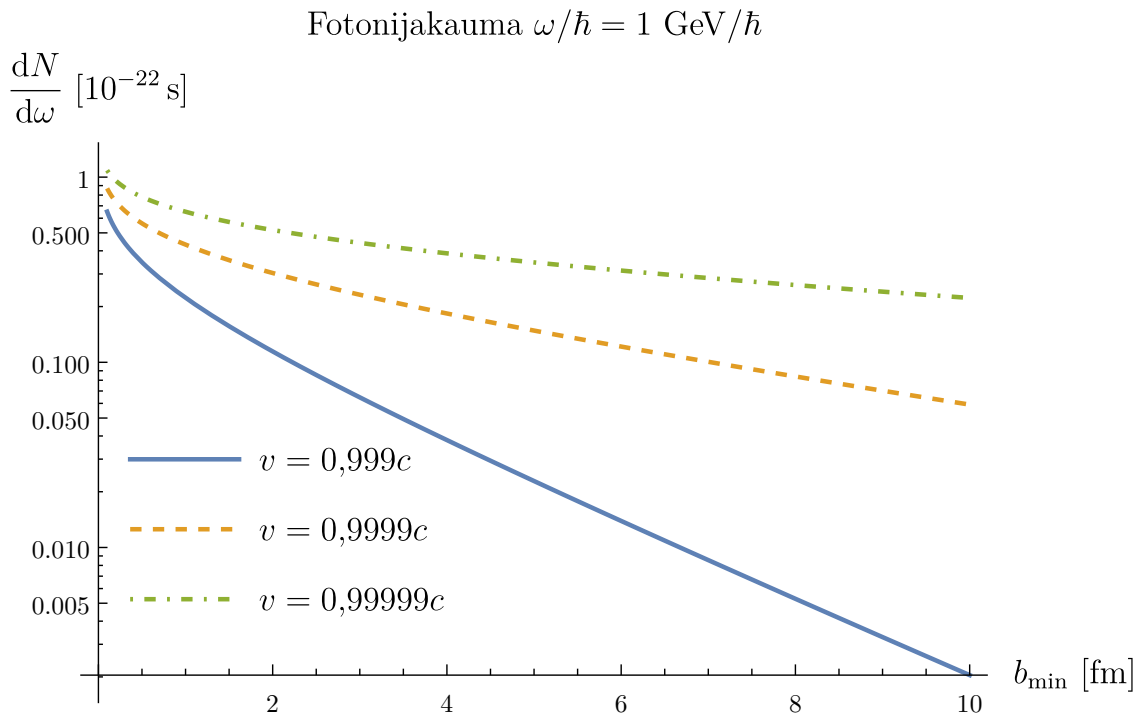
$$\left(\frac{dN}{d\omega}\right)_{\text{SI}} \sim \frac{q^2 c}{4\pi^2 \epsilon_0 \hbar v^2 \omega} \begin{cases} 2 \log \frac{2}{\chi e^{\gamma E}} - \frac{v^2}{c^2}, & \chi \rightarrow 0, \\ \frac{\pi}{2} e^{-2\chi} \left(2 - \frac{v^2}{c^2}\right), & \chi \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.51)$$

Fotonijakauma ja sen asymptoottisia approksimaatioita on esitetty kuviossa 5. Määritelmästä $\chi = \omega b_{\text{min}}/\gamma v$ nähdään, että kun b_{min} tai ω kasvaa, niin myös χ kasvaa.

Tämä selittää sen, miksi pienen argumentin approksimaatio toimii hyvin pienillä muuttujien b_{\min} ja ω arvoilla, ja miksi suuren argumentin approksimaatio alkaa toimimaan vasta riittävän suurilla muuttujan ω arvoilla. Kuviossa 6 puolestaan esitetään, miten jakauma riippuu hiukkasen nopeudesta v .



Kuvio 5. Lukumääräjakauma (3.50) ja asymptootiset approksimaatiot (3.51) mimitörmäysparametrin b_{\min} (ylempi kuva) ja taajuuden ω (alempi kuva) funktioina logaritmisella asteikolla. Molemmissa kuvissa on käytetty kahden $^{197}_{79}\text{Au}$ -ytimen törmäyksen realistisia arvoja $\gamma = 107$ ja $q = 97e$, missä e on alkeisvaraus [5, s. 22]. Taajuudet on ilmoitettu hiukkasfysiikalle tyypillisemmissä yksiköissä GeV, jolloin vastaava arvo SI-yksiköissä saadaan jakamalla Planckin redusoidulla vakiolla \hbar .



Kuvio 6. Lukumääräjakauma (3.50) minimitörmäysparametrin b_{\min} funktiona eri nopeuksilla v . Kuvassa on käytetty kahden $^{197}_{79}\text{Au}$ -ytimen törmäyksen realistisia arvoja $\gamma = 107$ ja $q = 97e$, missä e on alkeisvaraus [5, s. 22]. Taajuudet on ilmoitettu hiukkasfysiikalle tyypillisemmissä yksiköissä GeV, jolloin vastaava arvo SI-yksiköissä saadaan jakamalla Planckin redusoidulla vakiolla \hbar . Kuten odotettua, suuremmalla nopeudella liikkuvan hiukkasen fotonipilvi sisältää enemmän fotoneita, sillä hiukkasen kentissä on tällöin enemmän energiaa.

4 Päätäntö

Kirjallisuutta vastaava energiajakauma (C.6) johdettiin kahdella eri tavalla, alaluvussa 3.1 energiatiheyden avulla ja alaluvussa 3.2 Poyntingin vektorien avulla. Tulos oli molemmissa sama, mikä on täysin odotettua, sillä energiatiheys ja Poyntingin vektori liittyvät molemmat läheisesti sähkömagneettisten kenttien energiaan ja ovat oikeastaan saman kolikon kaksi eri puolta. Kirjallisuudessa energiajakauma on johdettu yleensä aina Poyntingin vektorien avulla, kuten lähteissä [4], [5] ja [7] on tehty. Sen sijaan johtoa energiatiheyden kautta ei löytynyt kuin yhdestä lähteestä [12]. Käytetyt approksimaatiot tulevat kuitenkin selkeämmin esiin energiatiheyden avulla. Myös integraalin (3.10) muodostaminen on selkeämpää ja helpommin perusteltavissa energiatiheyden kautta laskettaessa.

Lasku energiatiheyden avulla antaa myös mielenkiintoisen mahdollisuuden johtaa energiajakauma ilman yleensä käytettyjä approksimaatioita. Käytetyt approksimaatiot, jotka esiteltiin alaluvussa 3.1, ovat melko epätyytyttäviä. Esimerkiksi arviossa $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{E}_1\|$ raja $v \rightarrow 1$ on viety vain osittain kentän \mathbf{B} lausekkeeseen sisälle. Klassisessa tarkastelussa keinotekoiselle kentälle \mathbf{B}_a ei myöskään saada tyydyttävää oikeutusta. Voidaan vain todeta, että ultrarelativistisella rajalla keinotekoisen kentän aiheuttama korjaustermi häviää nopeasti. Keinotekoisen kentän käyttäminen on välttämätöntä Poyntingin vektorien kanssa laskettaessa. Energiatiheyden avulla keinotekoinen kenttä voidaan kuitenkin jättää pois. Ongelmana tällöin on, että alaluvussa 2.3 tehty ultrarelativistisen hiukkasen kenttien fotonitulkinta ei välttämättä enää päde. Tuloksena saatu jakauma (3.16) muistuttaa kuitenkin paljon jakaumaa (C.6). Tämän tutkielman puitteissa kyseisen jakauman pätevyys jää kuitenkin selvittämättä.

Fotonijakaumaa (3.50) johdettaessa liikkuva hiukkanen on oletettu pistemäiseksi. Tämä ei ole aina kovin hyvä approksimaatio. Realistisempi jakauma saataisiin olettamalla, että liikkuvalla kappaleella olisi jokin muoto. Tällöin fotonijakaumaan tulisi lisäksi muototekijä, joka ottaisi huomioon kappaleen varausjakauman. Näin on tehty esimerkiksi Klusek-Gawendan [5] väitöskirjassa, mutta muototekijän huomioiminen ei myöskään kuulu tämän tutkielman puitteisiin.

Lähteet

- [1] Enrico Fermi. “On the Theory of Collisions between Atoms and Electrically Charged Particles”. *Electromagnetic Probes of Fundamental Physics* s. 243–252 (2003). DOI: 10.1142/9789812704214_0026. Kääntänyt Michele Gallinaro ja Sebastian White. New York 2001. Alkuperäinen julkaisu “Sulla teoria dell’ urto tra atomi e corpuscoli elettrici”, *Nuovo Cim* 2, s. 143–158 (1925).
- [2] C. von Weizsäcker. “Ausstrahlung bei Stößen sehr schneller Elektronen”. *Zeitschrift für Physik* 88 (1934) s. 612–625.
- [3] E. J. Williams. “Correlation of Certain Collision Problems with Radiation Theory”. *Konglde Danske Videnskabernes Selskab: Matematisk-Fysiske Meddelelser* 13N4(4) (1935) s. 1–50.
- [4] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. 3. painos. John Wiley & Sons. 1999.
- [5] Mariola Klusek-Gawenda. “Production of pairs of mesons, leptons and quarks in ultraperipheral ultrarelativistic heavy ion collisions”. Väitöskirja. Krakova: Krakow University, The Henryk Niewodniczański Institute of Nuclear Physics. 2014. URI: <http://rifj.ifj.edu.pl/handle/item/60>. Luettu 29.11.2020.
- [6] R. H. Dalitz ja D. R. Yennie. “Pion Production in Electron-Proton Collisions”. *Physical Review*. 105 (1957) s. 1598–1615.
- [7] Sean Ahern. “An Electroweak Weizsäcker-Williams Method”. Väitöskirja. University of Wisconsin-Milwaukee. 2001.
- [8] R. A. Matzner ja Y. Nutku. “On the Method of Virtual Quanta and Gravitational Radiation”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 336 (1974) s. 285–305. URL: <https://www.jstor.org/stable/78452>. Luettu 20.12.2020.

- [9] K. F. Riley, M. P. Hobson ja S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press. 3. painos. 2006.
- [10] Dwight. E. Neuenschwander. *Tensor Calculus for Physics*. Johns Hopkins University Press. 1. painos. 2015.
- [11] Andrew Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press. 1. painos. 2013.
- [12] Ashok Das. *Lectures on Electromagnetism*. World Scientific / Hindustan Book Agency. 2. painos. 2013. DOI: 10.1142/8805.
- [13] Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert ja Charles W. Clark. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press. 2010.
- [14] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Daniel Zwillinger ja Victor Moll. *Table of Integrals, Series and Products*. Boston: Academic Press. 8. painos. 1994.

A Sähkökentän ultrarelativistinen raja

Tarkastellaan yhtälöä (2.16). Merkitään $r^2 \equiv y^2 + z^2$, jolloin muuttujanvaihdoilla $u = x - vt$ saadaan, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned} \int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon} \|\mathbf{E}\| dx &= \frac{q\gamma}{4\pi} \int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon} \frac{\sqrt{(x-vt)^2 + r^2}}{(\gamma^2(x-vt)^2 + r^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{q\gamma}{4\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{u^2 + r^2}}{(\gamma^2 u^2 + r^2)^{3/2}} du \\ &= \frac{q}{4\pi\gamma^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{u^2 + r^2}}{\left(u^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} du. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Yhtälön (A.1) integrandi on parillinen, joten

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\sqrt{u^2 + r^2}}{\left(u^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} du = 2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{u^2 + r^2}}{\left(u^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} du. \quad (\text{A.2})$$

Huomataan, että $r^2 > r^2/\gamma^2$, jolloin yhtälön (A.2) integraali voidaan lukea taulukosta [14, (3.172.3)]. Tuloksena on

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{u^2 + r^2}}{\left(u^2 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right)^{3/2}} du = \frac{\gamma^2}{r} E\left(\arctan \frac{\gamma\varepsilon}{r}, \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\right), \quad (\text{A.3})$$

missä $E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$ on toisen lajin elliptinen integraali. Sijoittamalla yhtälöt (A.2) ja (A.3) takaisin yhtälöön (A.1) saadaan

$$\int_{vt-\varepsilon}^{vt+\varepsilon} \|\mathbf{E}\| dx = \frac{q}{2\pi r} E\left(\arctan \frac{\gamma\varepsilon}{r}, \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\right). \quad (\text{A.4})$$

B Fourier'n muunnokset

Määritellään integroituvan funktion f Fourier'n muunnos \hat{f} integraalina

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt. \quad (\text{B.1})$$

Kirjallisuudessa näkee erilaisia käytänteitä esimerkiksi normituksen suhteen. Yhtälössä (B.1) valitulle normitustekijälle $1/\sqrt{2\pi}$ Fourier'n käänteismuunnos on siten

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} dt.$$

Parsevalin lause [9, (13.46)] voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{B.2})$$

Sähkökenttien Fourier'n muunnoksien laskemiseksi tarvitaan muutamia yleisiä Fourier'n muunnosten ominaisuuksia. Tarkastellaan ensin parillisten ja parittomien funktioiden Fourier'n muunnoksia. Olkoon e parillinen ja o pariton funktio. Eulerin kaavan avulla

$$\begin{aligned} \hat{e}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e(t)e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \cos(\omega t) dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Koska $t \mapsto e(t) \cos(\omega t)$ on edelleen parillinen ja $t \mapsto e(t) \sin(\omega t)$ pariton, häviää parittoman funktion integraali symmetrisen välin yli eli

$$\hat{e}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e(t) \cos(\omega t) dt. \quad (\text{B.3})$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}
\hat{o}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} o(t) e^{i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} o(t) \cos(\omega t) dt + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} o(t) \sin(\omega t) dt \\
&= i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} o(t) \sin(\omega t) dt.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Näytetään lopuksi, että reaalisen funktion f Fourier'n muunnos \hat{f} on hermiittinen funktio. f on reaaliarvoinen, joten $f(t) = f^*(t)$. Laskemalla funktion f Fourier'n muunnos saadaan

$$\begin{aligned}
\hat{f}(-\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) (e^{i\omega t})^* dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) e^{i\omega t})^* dt \\
&= \hat{f}^*(\omega).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Aloitetaan laskemalla sähkökentän (2.14) x -komponentin Fourier'n muunnos aikatasosta taajuustasoon lähdettä [5, liite A] mukailten. E_x on pariton, joten yhtälön (B.4) nojalla

$$\hat{E}_x(\omega) = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} E_x(t) \sin(\omega t) dt = -iq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\gamma v t \sin(\omega t)}{4\pi (\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} dt. \tag{B.6}$$

Yhtälön (B.6) integrandi voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_0^{\infty} \frac{\gamma v t \sin(\omega t)}{4\pi (\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} dt = \frac{1}{4\pi b^2} \int_0^{\infty} \frac{t \sin(\omega t)}{\left(1 + \frac{\gamma^2 v^2}{b^2} t^2\right)^{3/2}} \frac{\gamma v}{b} dt. \tag{B.7}$$

Sijoittamalla $u = \frac{\gamma v}{b} t$ yhtälöstä (B.7) saadaan, että

$$\int_0^{\infty} \frac{t \sin(\omega t)}{\left(1 + \frac{\gamma^2 v^2}{b^2} t^2\right)^{3/2}} \frac{\gamma v}{b} dt = \int_0^{\infty} \frac{b}{\gamma v} \frac{u \sin\left(\frac{\omega b}{\gamma v} u\right)}{(1 + u^2)^{3/2}} du = \int_0^{\infty} \frac{\partial_\omega \cos\left(\frac{\omega b}{\gamma v} u\right)}{(1 + u^2)^{3/2}} du. \tag{B.8}$$

Vaihtamalla derivoinnin ja integroinnin järjestystä yhtälössä (B.8) saadaan, että

$$\int_0^\infty \frac{\partial_\omega \cos\left(\frac{\omega b}{\gamma v} u\right)}{(1+u^2)^{3/2}} du = \frac{d}{d\omega} \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\omega b}{\gamma v} u\right)}{(1+u^2)^{3/2}} du. \quad (\text{B.9})$$

Lukemalla integraali (B.9) taulukosta [14, (8.432.5)] saadaan

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\omega b}{\gamma v} u\right)}{(1+u^2)^{3/2}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) = \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right), \quad (\text{B.10})$$

missä Γ on Eulerin gammafunktio ja K_ν on toisen lajin modifioitu Besselin funktio. Gammafunktion arvoja löytyy taulukoituna, mutta tässä työssä tarvitaan vain gammafunktion arvoja pisteissä $n + 1/2$, missä n on luonnollinen luku. Tällaisille arvoille löytyy yksinkertainen suljettu muoto [14, (8.339.2)]

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (\text{B.11})$$

Toisaalta, K_1 toteuttaa relaation [14, (8.486.14)]

$$\frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) = -z^\nu K_{\nu-1}(z),$$

joten ketjusäännön nojalla

$$\frac{d}{d\omega} \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) = -\frac{\omega b^2}{\gamma^2 v^2} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right). \quad (\text{B.12})$$

Sijoittamalla yhtälöt (B.7) – (B.12) takaisin yhtälöön (B.6) saadaan

$$\hat{E}_x(\omega) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{iq}{\gamma^2 v^2} \omega K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right). \quad (\text{B.13})$$

Lasketaan seuraavaksi sähkökentän (2.14) z -komponentin Fourier'n muunnos.

Tällä kertaa E_z on parillinen, joten (B.3) antaa samalla sijoituksella $u = \frac{\gamma v}{b}t$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_z(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty E_z(t) \cos(\omega t) dt \\
&= q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\gamma b \cos(\omega t)}{4\pi (\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{q}{vb^2} \int_0^\infty \frac{b \cos(\omega t)}{\left(1 + \frac{\gamma^2 v^2}{b^2} t^2\right)^{3/2}} \frac{\gamma v}{b} dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{q}{vb} \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\omega b}{\gamma v} u\right)}{(1 + u^2)^{3/2}} du.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Sijoittamalla yhtälöön (B.14) jo laskettu tulos (B.10) saadaan, että

$$\hat{E}_z(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{q}{vb} \frac{\omega b}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{q}{\gamma v^2} \omega K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right). \tag{B.15}$$

C Taajuusjakauman integrointi

Lasketaan ensin yhtälöstä (3.13) x -komponentin integraali. Yhtälön (B.13) perusteella integraaliksi tulee

$$I_1 \equiv \int_{b_{\min}}^{\infty} b |\hat{E}_x(\omega)|^2 db = \frac{q^2}{(2\pi)^3 \gamma^4 v^4} \omega^2 \int_{b_{\min}}^{\infty} b K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) db. \quad (\text{C.1})$$

Yllä esiintyvälle integraalille (C.1) löytyy taulukosta [14, (5.54.2)] antiderivaatta, joten

$$\int_{b_{\min}}^{\infty} b K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) db = \left[\frac{1}{2} b^2 \left\{ K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) - K_{-1} \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right\} \right]_{b=b_{\min}}^{b=\infty}. \quad (\text{C.2})$$

Hyödyntämällä Besselin funktion K_ν integraaliesitystä reaaliakselilla [14, (8.432.1)]

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh \nu t dt$$

saadaan monotonisen konvergenssin avulla, että

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_\nu(z) = 0.$$

Lisäksi $K_{-\nu} = K_\nu$ [14, (8.486.16)], joten integraali (C.2) saa arvon

$$\int_{b_{\min}}^{\infty} b K_0^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) db = \frac{1}{2} b_{\min}^2 \left\{ K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi) \right\}, \quad (\text{C.3})$$

kun otetaan käyttöön merkintä

$$\chi \equiv \frac{\omega b_{\min}}{\gamma v}.$$

Siispä yhtälöiden (C.1) ja (C.3) perusteella

$$I_1 = \frac{q^2 b_{\min}^2 \omega^2}{2(2\pi)^3 \gamma^4 v^4} \left\{ K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi) \right\} = \frac{q^2}{2(2\pi)^3 \gamma^2 v^2} \chi^2 \left\{ K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi) \right\}. \quad (\text{C.4})$$

Vastaavalla laskulla komponentille (B.15)

$$\begin{aligned}
I_2 &\equiv \int_{b_{\min}}^{\infty} b |\hat{E}_z(\omega)|^2 db = \frac{q^2}{(2\pi)^3 \gamma^2 v^4} \omega^2 \int_{b_{\min}}^{\infty} b K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) db \\
&= \frac{q^2}{(2\pi)^3 \gamma^2 v^4} \omega^2 \left[\frac{1}{2} \left\{ K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) - K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) K_2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right\} \right]_{b=b_{\min}}^{b=\infty} \\
&= \frac{q^2}{2(2\pi)^3 v^2} \chi^2 \left\{ K_0(\chi) K_2(\chi) - K_1^2(\chi) \right\}.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Kirjoitetaan vielä $K_2(\chi)$ muotoon $\frac{2}{\chi} K_1(\chi) + K_0(\chi)$ [14, (8.486.17)], jolloin sijoittamalla integraalit (C.4) ja (C.5) yhtälöön (3.13) saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\omega} &= 4\pi (I_1 + I_2) \\
&= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \chi^2 [K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)] + \chi^2 [K_0(\chi) K_2(\chi) - K_1^2(\chi)] \right\} \\
&= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ \chi^2 (1 - v^2) [K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)] \right. \\
&\quad \left. + [2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) + \chi^2 K_0^2(\chi) - \chi^2 K_1^2(\chi)] \right\} \\
&= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - v^2 \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Lasketaan sitten yhtälön (C.6) avulla kokonaisenergia, eli lasketaan integraali

$$\begin{aligned}
U &= \int_0^{\infty} \frac{dU}{d\omega} d\omega \\
&= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \int_0^{\infty} \left\{ 2\chi K_0(\chi) K_1(\chi) - v^2 \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) \right\} d\chi.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Taulukosta [14, (6.576.4)] saadaan, että

$$\int_0^{\infty} \chi K_0(\chi) K_1(\chi) d\chi = \frac{2^{-1}}{\Gamma(2)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; 0\right), \tag{C.8}$$

missä $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ on hypergeometrinen funktio. Hypergeometrisen funktion sarjaesityksestä [14, 9.100] nähdään, että

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1. \tag{C.9}$$

Gammafunktion arvot saadaan yhtälöstä (B.11). Sijoittamalla äskenen (C.9) yhtä-

lööön (C.8) saadaan, että

$$\int_0^\infty \chi K_0(\chi) K_1(\chi) d\chi = \frac{\pi^2}{8}. \quad (\text{C.10})$$

Vastaavasti taulukosta [14, (6.576.4)] saadaan, että

$$\int_0^\infty \chi^2 K_1^2(\chi) d\chi = \frac{2^0}{\Gamma(3)} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}; 3; 0\right) = \frac{3\pi^2}{32} \quad (\text{C.11})$$

ja

$$\int_0^\infty \chi^2 K_0^2(\chi) d\chi = \frac{2^0}{\Gamma(3)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^4 F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; 0\right) = \frac{\pi^2}{32}. \quad (\text{C.12})$$

Sijoittamalla integraalit (C.10), (C.11) ja (C.12) alkuperäiseen integraaliin (C.7) saadaan muuttujanvaihdolla $\chi = \omega b_{\min}/\gamma v$, että

$$\begin{aligned} U &= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \left\{ \frac{2\gamma v}{b_{\min}} \int_0^\infty \chi K_0(\chi) K_1(\chi) d\chi - \frac{\gamma v^3}{b_{\min}} \int_0^\infty \chi^2 (K_1^2(\chi) - K_0^2(\chi)) d\chi \right\} \\ &= \frac{q^2}{4\pi^2 v^2} \frac{\gamma v}{b_{\min}} \left\{ \frac{\pi^2}{4} - v^2 \left(\frac{3\pi^2}{32} - \frac{\pi^2}{32} \right) \right\} \\ &= \frac{q^2}{64 b_{\min} v} \gamma (4 - v^2). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$