

Johdatus kvanttilaskentaan

Mikko Möttönen

toukokuu 2018

Alkuperäisen, englanninkielisen, luentomonisteen on kirjoittanut Mikko Möttönen. Suomenkielisen version käännöstyön ja LaTeX-puhtaaksikirjoituksen on toteuttanut Henri Heinonen.

Luennot

- luento 1, Teppo Seesto (IBM), ti 22.5.2018 14:15 - 15:45, Ag D211
- luento 2, Mikko Möttönen (Aalto-yliopisto), to 24.5.2018 14:15 - 15:45, Ag D211
- luento 3, Mikko Möttönen (Aalto-yliopisto), pe 25.5.2018 12:15 - 13:45, Ag D211
- luento 4, Henri Heinonen (Jyväskylän yliopisto), ma 28.5.2018, videoluento You-Tubessa

1 Kubitti

Kvanttibitti, eli kubitti, on kvanttietokoneen osa, jota käytetään kvantti-informaation tallentamiseen ja käsittelyyn.

- Looginen kubitti on efektiivinen kaksitilakvanttisysteemi, joka toteuttaa kvanttilogiikan. Saattaa koostua useammasta fyysisestä järjestelmästä.
- Fyysinen kubitti koostuu fyysisen järjestelmän kahdesta kvanttilasta. Yksittäisiä fyysisiä kubitteja voidaan liittää yhteen muodostamaan looginen kubitti, jolla on korkeampi tarkkuus.
- Avustava kubitti eli ancilla on joko ylimääräinen looginen tai fyysinen kubitti, jota käytetään vain joissain kohdissa laskentaa.

Me emme käsittele tällä kurssilla virheitä, joten erot loogisten ja fyysisten kubittien välillä eivät ole erityisen tärkeitä.

1.1 Kvanttiformalismi

Fyysisten järjestelmien kvanttitiloja kuvataan tilavektoreilla, joita kutsutaan ket-vektoreiksi $|\psi\rangle$. Yhdessä ne muodostavat Hilbertin avaruuden

$$\mathcal{H} = \{|\psi\rangle\}_\psi, \quad (1)$$

jolla on kompleksiarvoinen sisätulo

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : (\mathcal{H}, \mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}. \quad (2)$$

Avaruudella \mathcal{H} on ortonormaalit kannat $\{|E_k\rangle\}$ siten, että

$$\langle E_m | E_n \rangle = \delta_{mn}. \quad (3)$$

Mikä tahansa tila $|\psi\rangle$ voidaan siis esittää superpositiona

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |E_k\rangle, \quad (4)$$

missä $c_k = \langle E_k | \psi \rangle$. Kun tämä kanta on kiinnitetty, voidaan kvanttitilat ja niiden sisätulot esittää

$$|\psi\rangle \triangleq \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}}_E \quad (5)$$

yhtäsuuruusmerkin päällä hattu erottaa kantariippumattoman kvanttitilan esityksestään

ja

$$\langle \psi | \triangleq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}^\dagger = (c_1^* \quad c_2^* \quad \dots)_E. \quad (6)$$

1.2 Kubittiformalismi

Kubitin tila on rajoittunut kaksiulotteiseen Hilbertin avaruuteen $\mathcal{H}^2 \subset \mathbb{C}^2$

Kubittitilat $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ muodostavat ortonormaalin kannan avaruudelle \mathcal{H}^2 .

Periaatteessa voidaan valita tämä kanta miten halutaan, mutta käytännössä usein fyysiset argumentit, kuten kahden pienimmän energiatilan valinta, määräävät sen.

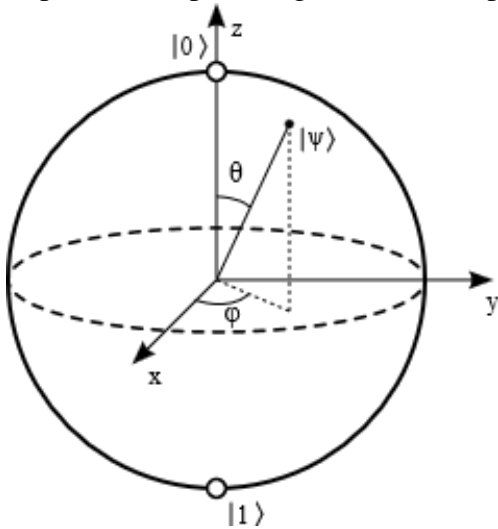
Siispä mikä tahansa tila $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^2$ voidaan esittää superpositiona

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \\ &= (\text{epärelevantti vaihetekijä}) \times \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

1.2.1 Blochin pallo

Kubittitila voidaan myös esittää pisteenä yksikköpallolla. Piste määräytyy kaavan (7) mukaan siten, että θ on elevaatiokulma ja ϕ on atsimuuttikulma. Tällöin positiivinen z-akseli vastaa tilaa $|0\rangle$ ja negatiivinen z-akseli tilaa $|1\rangle$. (Katso Kuva 1 sivulla 3.)

Kuva 1: Blochin pallo. Lisenssi: CC BY-SA 3.0. Kuvälähde: https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch_sphere#/media/File:Bloch_sphere.svg



2 Kvanttimittaus (postulaatti)

Tutkimme vain ideaaleja projektiivisiä mittauksia.

Mittaukset voidaan tehdä missä tahansa ortonormaalissa kannassa, mutta ne voidaan kaikki redusoida unitaarisiin muutoksiin (selitetään myöhemmin) ja mittauksiin kubitikannassa $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Tilan $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ ideaali mittaus kannassa $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ tuottaa vastauksena

$$0, \quad \text{todennäköisyydellä } P_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |c_0|^2;$$

$$1, \quad \text{todennäköisyydellä } P_1 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |c_1|^2.$$

Mittauksen jälkeen kubittitila romahtaa vastaavaan tilaan:

$$\text{tulos } 0 \implies |\psi\rangle = |0\rangle;$$

$$\text{tulos } 1 \implies |\psi\rangle = |1\rangle.$$

Jos mittaus välittömästi toistetaan, saadaan sama tulos kuin edellisessä mittauksessa. Oletamme siis, että mittauksessa ei tapahdu virheitä.

3 Kvanttipiirit (yhdestä moneen kubittiin)

3.1 Yleinen kvanttidynamiikka

Kvanttitilojen dynamiikkaa kuvaa Schrödingerin yhtälö

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (8)$$

missä \hbar on redusoitu Planckin vakio ja \hat{H} on Hamiltonin operaattori eli operaattori, jota vastaa järjestelmän kokonaisenergia

$$\hat{H} = \sum E_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|. \quad (9)$$

Yllä $\{E_k\}$ ovat järjestelmän mahdolliset ominaisenergiat ja $\{|\psi_k\rangle\}$ näitä vastaavat tilat. Siis $\hat{H}|\psi_k\rangle = E_k|\psi_k\rangle$.

Kvanttilaskentaa toteutetaan hallitsemalla \hat{H} :ta ajassa.

\hat{H} on hermiittinen eli

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \implies \text{aikakehitys on unitaarinen: } |\psi(t)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle, \quad (10)$$

missä $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$.

Tehtävä 1: Näytä, että Schrödingerin yhtälö johtaa unitaariseen aikakehitykseen. Vihje: pohdi ensin infinitesimaalista aikaväliä dt , jonka aikana Hamiltonin funktiota voi pitää aikariippumattomana, ja käytä operaattorieksponentiaalia.

3.2 Yhden kubitin piirit

Yhdelle kubitille aikakehityksen voi kirjoittaa yhtenä unitaarisena 2×2 -matriisina

$$\hat{U} \triangleq U = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Tämän aikakehityksen vaikutus mihin tahansa kvanttitilaan $|\psi\rangle$ voidaan kirjoittaa piirinä

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\boxed{U}} \hat{U}|\psi\rangle. \quad (12)$$

Unitaarisia operaattoreita, jotka operoivat kubitteihin, kutsutaan kvanttiporteiksi.

Tämä piiri on ekvivalentti oheisen muunnoksen kanssa

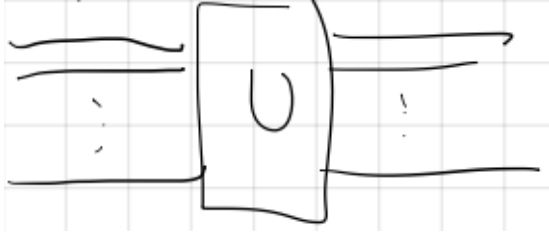
$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \triangleq |\psi\rangle \longrightarrow \hat{U}|\psi\rangle \triangleq U \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{00}c_0 + U_{01}c_1 \\ U_{10}c_0 + U_{11}c_1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Yllä oleva piiri on ekvivalentti myös yhden kubitin portille U .

3.3 Monen kubitin piirit

Aikakehitys on N :lle kubitille yleisesti $2^N \times 2^N$ unitaarinen matriisi U ja porttiesityksessä on N vaakaviivaa. (Katso Kuva 2 sivulla 5.)

Kuva 2: Unitaarisen matriisin U porttiesitys.



Kuitenkin on vaikeaa suoraan toteuttaa näin suurta mielivaltaista porttia, joten on suotavaa hajottaa se yhden ja kahden kubitin portteihin.

Kvanttitila N -kubitille rekisterille voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \sum_{\underbrace{n_N \in \{0,1\}}_{\text{summa yli kaikkien binäärilukujen } n_1 n_2 \dots n_N}} \underbrace{c_{n_1 n_2 \dots n_N} |n_1 n_2 \dots n_N\rangle}_{\text{lyhyempi merkintätapa } |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes \dots \otimes |0 1 \dots\rangle} \\
 &= \sum_{k=0}^{2^N-1} \underbrace{c_k |k\rangle}_{\text{indeksi muutettu binääriesitystavasta yksittäiseksi luvuksi}}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Vastaava Hilbertin avaruus on

$$\mathcal{H}^{2^N} = \underbrace{\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^2}_{N \text{ kertaa}} \subset \mathbb{C}^{2^N}. \tag{15}$$

Yhden kubitin portti U_1 operoi \hat{U}_1 :llä valittuun k :nteen kubittiin ja identiteettimatriisilla \hat{I} muihin, esimerkiksi

$$\hat{U} = \underbrace{\hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I}}_{k-1 \text{ kertaa}} \otimes \hat{U}_1 \otimes \underbrace{\hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I}}_{N-k \text{ kertaa}}. \tag{16}$$

(Katso Kuva 3 sivulla 6.)

Kuva 3: Piiriesitys yhden kubitin portista kubitille k .

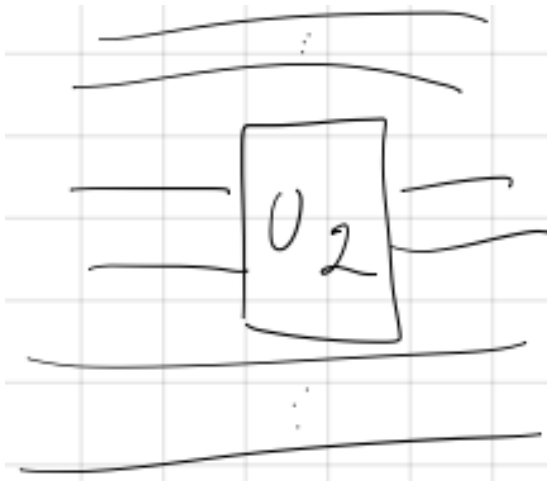


Kahden kubitin portit operoivat epätriviaalisti vain valittuihin kahteen kubittiin

$$\hat{U} = \underbrace{\hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I}}_{k-2 \text{ kertaa}} \otimes \hat{U}_2 \otimes \underbrace{\hat{I} \otimes \dots \otimes \hat{I}}_{N-k \text{ kertaa}}. \quad (17)$$

(Katso Kuva 4 sivulla 6.)

Kuva 4: Kahden kubitin portti.

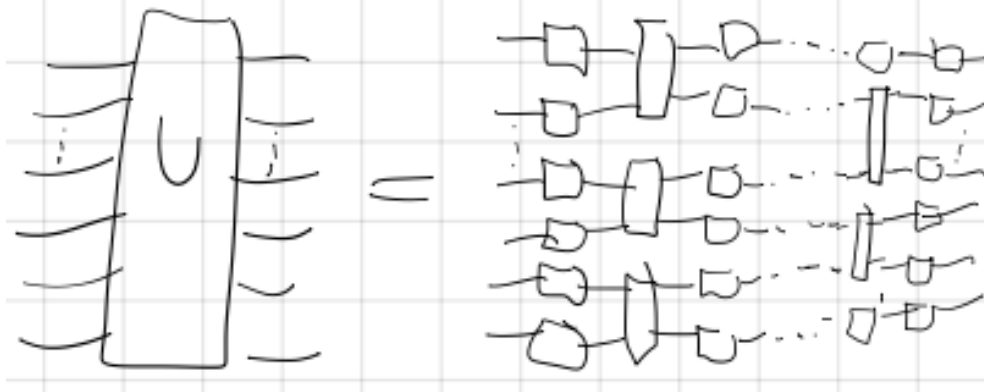


Mikä tahansa N -kubitinen portti voidaan hajottaa yhden ja kahden kubitin portteihin [M. Möttönen et al. Phys. Rev. Lett. 93, 130502 (2004)]. (Katso Kuva 5 sivulla 7.)

Tehtävä 2: Kirjoita kvanttipiiri, joka vastaa aikakehitysoperaattoria

$$\hat{U} = (\hat{A} \otimes \hat{I}) \hat{B} (\hat{I} \otimes \hat{C}) (\hat{D} \otimes \hat{I}). \quad (18)$$

Kuva 5: N :n kubitin portti hajotettuna yhden ja kahden kubitin portteihin.



4 Tärkeitä yhden kubitin portteja

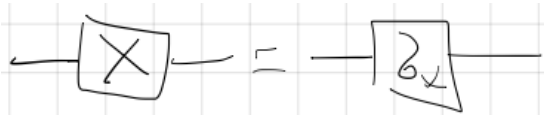
4.1 Heijastusportit

NOT-portti (negaatioportti / heijastus x -akselin suhteen / Paulin X):

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

(Katso Kuva 6 sivulla 7.)

Kuva 6: Paulin X-portti.

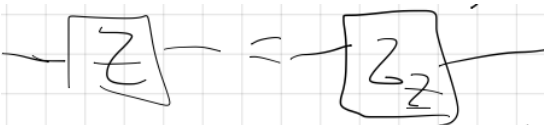


Vaihekäännös (heijastus z -akselin suhteen, Paulin Z):

$$\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

(Katso Kuva 7 sivulla 7.)

Kuva 7: Paulin Z-portti.

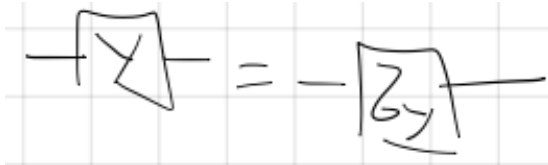


Yhdistetty vaiheen ja bitin käännös (Paulin Y):

$$\hat{\sigma}_y = -i |0\rangle \langle 1| + i |1\rangle \langle 0| \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

(Katso Kuva 8 sivulla 8.)

Kuva 8: Paulin Y-portti.

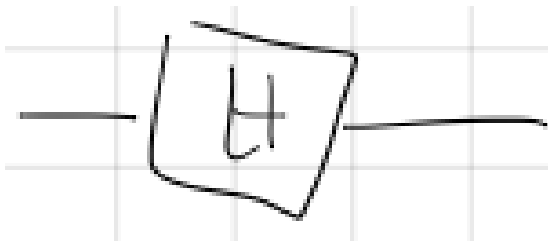


Hadamardin portti:

$$\hat{H} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

(Katso Kuva 9 sivulla 8.)

Kuva 9: Hadamardin portti.



Tehtävä 3: Näytä, että Hadamardin portti on kannanvaihto z - ja x -kantojen välillä. Tässä α -kannalla tarkoitetaan sitä kantaa, jossa $\hat{\sigma}_\alpha$ on diagonaalinen.

4.2 Kierrot

Yhden kubitin kierto kulman θ verran akselin \vec{n} suhteen on määritelty

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \underbrace{e^{-i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\theta/2}}_{\text{joskus määritellään ilman miinus-merkkiä}} = I \cos(\theta/2) - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin(\theta/2), \quad (23)$$

missä $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$ ja $|\vec{n}| = 1$. Tästä saamme erikoistapauksina

$$R_x(\theta) = e^{-i\sigma_x \theta/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i \sin(\theta/2) \\ -i \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\sigma_y\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\sigma_z\theta/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Fyysisessä kubitissa, jossa $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ on koodattu Hamiltonin operaattorin energian ominaistiloihin, z-kierrot voidaan suorittaa muuttamalla energiaa hetkeksi $(i\partial_t |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle = \underbrace{\hbar\Delta\hat{\sigma}_z}_{\text{indusoitu muutos kulmataajuudessa}} |\psi\rangle \implies \hat{U}(t) = e^{-i\hat{\sigma}_z\Delta t}$).

x- ja y-kierrot on toisaalta toteutettu käyttäen niin kutsuttuja Rabi-värähtelyitä, jotka indusoidaan resonanssilla ($\omega = \omega_l$) suuntaan, joka on kohtisuorassa energian ominaistiloja vastaan ($\hat{H}_{\text{resonanssi}} \propto \underbrace{\sin(\omega t + \phi) [\cos(\alpha)\hat{\sigma}_x + \sin(\alpha)\hat{\sigma}_y]}_{\phi \text{ ja } \alpha \text{ ovat vapaita parametreja, jotka määrittävät vektorin } \vec{n}}$).

Eulerin kulmat:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma). \quad (27)$$

Vain kaksi kohtisuoraa kiertoakselia tarvitaan mille tahansa yhden kubitin portille!

Tehtävä 4: Näytä, että $R_{\vec{n}}(\theta)$ kiertää Blochin vektorin Eulerin kiertonä.

5 Tärkeitä kahden kubitin portteja

5.1 Portteja

Kontrolloitu NOT-portti (CNOT):

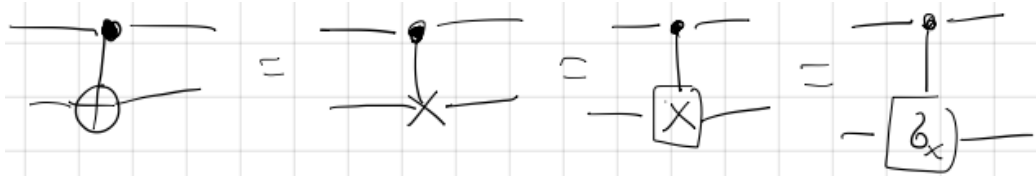
$$|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{\sigma}_x \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}. \quad (28)$$

(Katso Kuva 10 sivulla 10.)

Kontrolloitu vaiheenkäännösportti (CPHASE):

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{\sigma}_z \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (29)$$

Kuva 10: CNOT-portti.

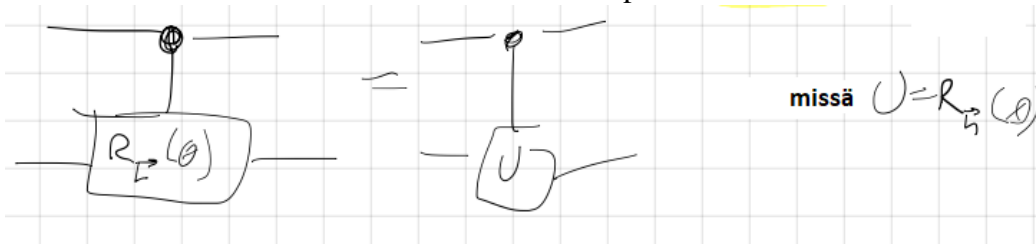


Kontrolloitu kiertoportti (CROT):

$$|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{R}_n(\theta) \triangleq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & R_n(\theta) \end{pmatrix} \quad (30)$$

(Katso Kuva 11 sivulla 10.)

Kuva 11: CROT-portti.



Tehtävä 5: Näytä, että

Kuva 12: Tehtävään 5 liittyvä kuva.



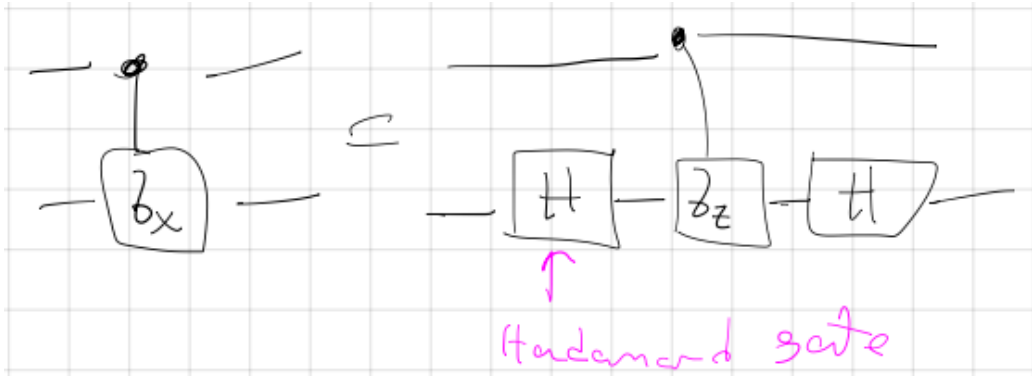
5.2 Tärkeitä ominaisuuksia

(Katso Kuva 13 sivulla 11.)

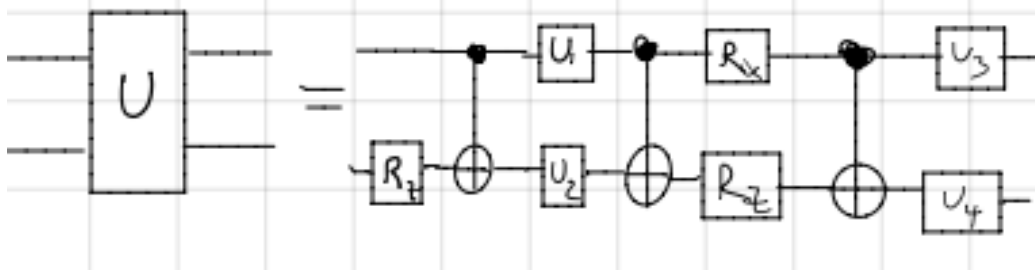
(Katso Kuva 14 sivulla 11.)

(Katso Kuva 15 sivulla 11.)

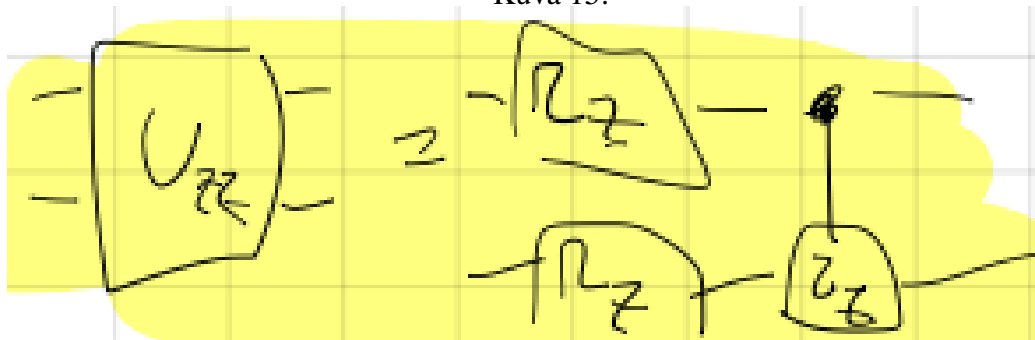
Kuva 13: H on Hadamardin portti.



Kuva 14: Tehokas hajotelma mielivaltaisesta kahden kubitin portista.



Kuva 15:



6 Kvanttialgoritmeja

6.1 DiVincenzon kriteerit kvanttietokoneille

1. Skaalautuva fyysikaalinen järjestelmä, jossa on hyvin kuvatut kubitit
2. Kyky alustaa kubitit yksinkertaiseen tunnettuun tilaan
3. Pitkät dekoherenssiajat (tätä ei käsitellä luennoilla, mutta se tarkoittaa sitä, että kubittien pitää olla hyvin eristetyt ympäristöstään)
4. Universaali joukko kvanttiportteja

5. Kubittikohtainen mittauskyky

Nämä kriteerit vaikuttavat hyvin ilmeisiltä, mutta se, mikä on vähemmän ilmeistä, on että skaalautuva kvanttietokone on mahdollinen myös, jos nämä kriteerit eivät virheettömästi täyty. Tässä tarvitaan kvanttivirheenkorjausta, jota ei käsitellä luennoilla enempää.

6.2 Yleinen resepti kvanttialgoritmile

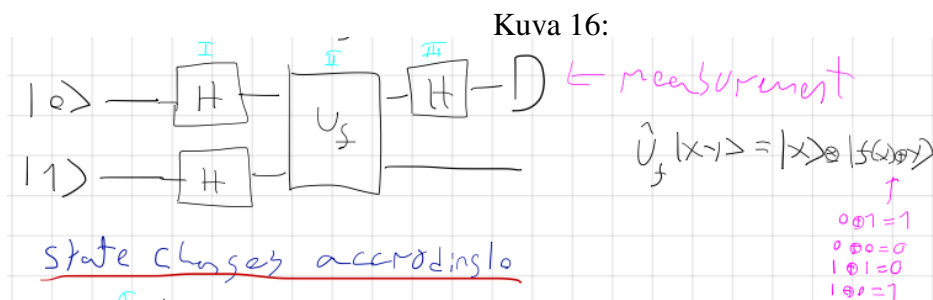
1. Alusta kubitit tilaan $|0\rangle^{\otimes N}$, missä N on kubittien kokonaismäärä.
2. Käytä N -kubittista unitaarista muunnosta, joka riippuu algoritmistasi ja mistä tahansa klassisesta informaatiosta, jota olet kerännyt tähän mennessä ongelmaan liittyen.
3. Mittaa valittu joukko kubitteja (saadaksesi klassisen informaation).
4. Mene kohtaan 2), kunnes sinulla on vastaus.

7 Deutschin algoritmi

Kyseessä on yksinkertainen algoritmi, jolla on kvanttietulyöntiasema.

Havaitsee, onko funktio f vakio vai tasapainotettu yhdellä funktiokutsulla.

(Katso Kuva 16 sivulla 12.) (Katso Kuva 17 sivulla 13.)



8 Tiheysoperaattori

Jos kubitti vuorovaikuttaa toisen kvanttijärjestelmän kanssa, ei välttämättä riitä esittää sitä vain puhtaana tilana $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, joten on pohdittava tiheysoperaattoria

$$\hat{\rho} = \hat{I}/2 + \vec{a}/2 \cdot \vec{\sigma}, \text{ missä } |\vec{a}| \leq 1. \quad (31)$$

Kuva 17:

$$\begin{aligned}
 |01\rangle &\xrightarrow{I} \frac{1}{2}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle) \\
 &\xrightarrow{II} \frac{1}{2} \left[|0\rangle\otimes(|f(0)\oplus 0\rangle-|f(0)\oplus 1\rangle) + |1\rangle\otimes(|f(1)\oplus 0\rangle-|f(1)\oplus 1\rangle) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[(-1)^{f(0)} |0\rangle\otimes(|0\rangle-|1\rangle) + (-1)^{f(1)} |1\rangle\otimes(|0\rangle-|1\rangle) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (-1)^{f(0)} \left[|0\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)} |1\rangle \right] \otimes (|0\rangle-|1\rangle) \\
 &\xrightarrow{III} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes (|0\rangle-|1\rangle), & \text{if } f(0)=f(1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes (|0\rangle-|1\rangle), & \text{if } f(0)\neq f(1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow A single measurement of the first bit tells whether the function is constant or balanced.

Puhtaille tiloille $|\psi\rangle$, tiheysoperaattori on

$$\hat{\rho}_{\text{puhdas}} = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{I}/2 + \vec{a}/2 \cdot \vec{\sigma}, \text{ missä } |\vec{a}| = 1. \quad (32)$$

Vektori \vec{a} on sama kuin aikaisemmin määritelty vektori Blochin pallolla.

Odotusarvot lasketaan kuten

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle &= \text{Tr}\{\hat{A}\hat{\rho}\} = \langle 0|\hat{A}\hat{\rho}|0\rangle + \langle 1|\hat{A}\hat{\rho}|1\rangle = \langle a|\hat{A}\hat{\rho}|a\rangle + \langle b|\hat{A}\hat{\rho}|b\rangle \\
 &= a\langle a|\hat{\rho}|a\rangle + b\langle b|\hat{\rho}|b\rangle = a\hat{\rho}_{aa} + b\hat{\rho}_{bb}.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Yllä pitää muistaa, että a ja b ovat A :n ominaistiloja

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle, \quad (34)$$

$$\hat{A}|b\rangle = b|b\rangle. \quad (35)$$

ρ :n komponentit ρ_{aa} ja ρ_{bb} ovat todennäköisyyksiä olla tiloissa a ja b .

Puhtaille tiloille on

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|\} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle. \quad (36)$$

Yleisesti $\langle \hat{\sigma}_k \rangle = \text{Tr}\left\{\frac{\hat{\sigma}_k}{2} + \frac{\vec{a}}{2} \cdot \vec{\sigma}\hat{\sigma}_k\right\} = a_k$.

9 Suprajohtava kvanttietokone

Tällä hetkellä ainoastaan suprajohtavan kvanttietokoneen on demonstroitu olevan skaalautuva ja riittävän tarkka mahdollistaakseen vikasietoisen kvanttilaskennan.

Johdatus annetaan PowerPointilla.